

برآورد ناپارامتری تابع چگالی احتمال پوش سیگنال در کانال محوکننده چند راهه با تصادفی انگاشتن تعداد راهها (N) به کمک شبیه سازی مونت کارلو

کارولوکس

دانشیار گروه برق، دانشکده فنی، دانشگاه تهران

علی عبدی

دانشجوی کارشناسی ارشد الکترونیک، گروه برق، دانشکده فنی، دانشگاه تهران

پژوهشگر در دانشگاه صنعتی شریف

چکیده :

در این مقاله نخست مدل کانالهای با اثر محوکنندگی چند راهه و نیز روش محاسبه تابع چگالی احتمال پوش سیگنال میانگین در این گونه کانالها را در حالت های گوناگون مطرح کرده ایم. از آنجا که تاکنون اثر تصادفی بودن تعداد راهها بر روی تابع چگالی احتمال پوش چندان بررسی نشده است، لذا با بکارگیری شبیه سازی مونت کارلو، کانالهای محوکننده ای با تعداد راههای تصادفی (با پخش پواسن و یکنواخت گسسته) را شبیه سازی کرده و تابع چگالی احتمال پوش در این کانالها را با استفاده از یک برآورد کننده ناپارامتری، برآورد کرده ایم. این برآوردها نشان می دهند که تصادفی بودن و نیز تابع چگالی احتمال تعداد راهها، تأثیر چشمگیری بر روی تابع چگالی احتمال پوش دارند. در پایان، شرایط برقراری قضیه حد مرکزی برای این گونه کانالهای محوکننده را به گونه ای مناسبتر از پیش بیان کرده ایم.

Nonparametric Estimation of the PDF of Signal Envelope in a Multipath Fading Channel with Random Number of Paths (N) Using Monte Carlo Simulation

Caro Lucas , Ph.D.

Assoc. Prof. of E.E. Dept., Eng. Faculty, University of Tehran

Ali Abdi, B.Sc.

M.Sc. Student of E.E. Dept., Eng. Faculty, University of Tehran

Researcher in Sharif University of Technology

ABSTRACT

In this paper, at first we have discussed on the model of multipath fading channels and methods for computing the pdf (probability density function) of the envelope of

a bandpass signal in such channels in various situations. Since the effect of a random N on the envelope pdf has not been investigated thoroughly yet, we have simulated fading channels with random number of paths (with Poisson and discrete uniform distributions) using Monte Carlo simulation and have estimated the envelope pdf in such channels by means of a nonparametric estimator. These estimates show that the randomness of N and its pdf have a considerable effect on the envelope pdf. At last we have formulated the conditions for the validity of central limit theorem for such fading channels more appropriate than before.

مقدمه

تصادفی بودن محیط انتشار امواج (کانال) سبب می‌گردد که سیگنال ارسالی دچار تغییراتی ناخواسته و تصادفی شود. تصادفی بودن کانال از عوامل گوناگون و متفاوتی ناشی می‌شود. در مخابرات به کمک تروپوسفر و یونسفر، ضریب‌های بازتابش و جذب تروپوسفر به فشار، رطوبت، دما و در یونسفر به چگالی حجمی الکترونها و یونها بستگی دارند که بدلیل تغییرات تصادفی آنها، سیگنال بازتاب شده از این لایه‌ها نیز رفتاری تصادفی خواهد داشت ([۱] - [۲]). در مخابرات سیار (چه درون ساختمان (Indoor) و چه بیرون ساختمان (Outdoor)) متحرک بودن آنتنهای فرستنده و گیرنده، وجود موانع سیار با ضریب‌های جذب و بازتابش گوناگون و غیره باعث ایجاد تغییرات تصادفی در سیگنال دریافتی می‌گردند به گونه‌ای که برای مدلسازی کانال در مخابرات سیار از مدل‌های آماری استفاده می‌کنند ([۳]-[۱۱]).

مهمترین ویژگی کانالهای تصادفی، اثر محوکنندگی (Fading) می‌باشد که عبارتست از ایجاد نوسانات تصادفی و ناخواسته در پوش سیگنال. به بیان دقیق‌تر اگر سیگنال سینوسی تک فرکانس با فاز دلخواه و پوش ثابت و معین (Deterministic) با نام سیگنال آزمایشی ارسالی (Transmitted Test Signal) را از طریق این گونه کانالها ارسال نماییم، پوش سیگنال آزمایشی دریافتی (Received Test Signal) یک فرآیند تصادفی خواهد بود.

می‌توان پوش سیگنال دریافتی را حاصل ضرب پوش سیگنال ارسالی (که در حالت کلی خود یک فرآیند تصادفی است) در فرآیند تصادفی ناشی از کانال دانست. بنابراین اثر محوکنندگی را نویز ضرب شونده نیز می‌خوانند ([۱۲]-[۱۳]).

۱ - مدل اثر محوکنندگی

بک مدل مناسب و رایج برای توصیف اثر محوکنندگی، برپایه انتشار چند راهه (Multipath Propagation) بیان می‌شود [۱۳]. در این مدل فرض می‌شود که سیگنال آزمایشی ارسالی به

هنگام گذشتن از کانال تصادفی، به چندین سیگنال سینوسی با همان فرکانس ولی دامنه‌ها و فازهای متفاوت شکسته می‌شود که از چندین راه و باتاخیرهای گوناگون به گیرنده می‌رسند. سیگنال آزمایشی دریافتی از جمع این سیگنالها تشکیل می‌شود. شکل ۱ طرحی ساده از این مدل را برای چندین راه باتأخیر یکسان نشان می‌دهد.

اگر سیگنال آزمایشی ارسالی را بصورت زیر نمایش دهیم (بدون آنکه به کلیت بحث لطمه‌ای وارد شود، فاز آنرا برای سادگی صفر در نظر می‌گیریم):

$$S_{TT}(t) = \text{Re} \{ e^{i\omega_0 t} \} \quad (1)$$

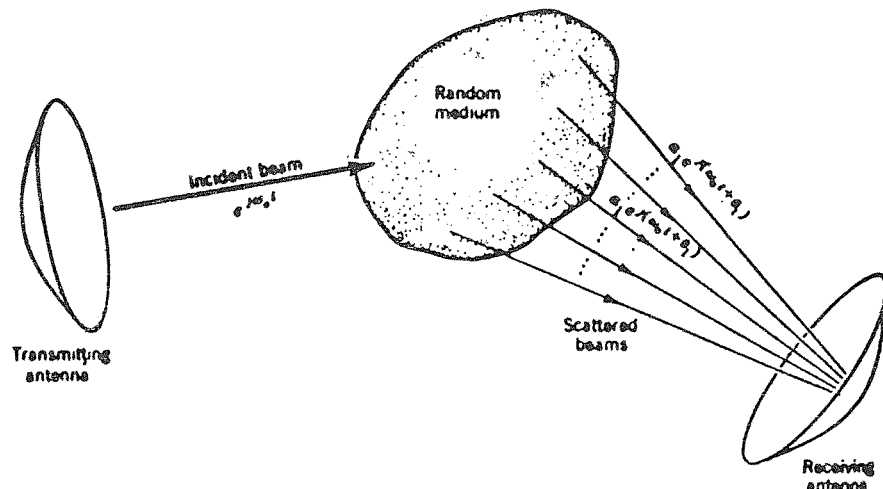
و فرض کنیم که بعد از τ ثانیه، N سیگنال سینوسی با همان فرکانس ω_0 ولی دامنه‌های A_1, \dots, A_N و فازهای $\Theta_1, \dots, \Theta_N$ به گیرنده برسند، آنگاه سیگنال آزمایشی دریافتی در زمان $t + \tau$ به شکل زیر خواهد بود:

$$S_{RT}(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{l=1}^N A_l e^{i[\omega_0(t-\tau) + \Theta_l]} \right\} \\ = \text{Re} \{ \text{Re}^{i[\omega_0(t-\tau) + \Theta]} \} \quad (2)$$

که:

$$R e^{i\Theta} = \sum_{l=1}^N A_l e^{i\Theta_l} \quad (3)$$

(N ، A_l ، Θ_l ، Θ و R و متغیرهای تصادفی هستند). از مقایسه (۱) و (۲) در می‌یابیم که مقدار پوش از t در زمان $t + \tau$ به R در زمان $t + \tau$ تغییر کرده است. به ازاء تاخیرهای دیگر، مقدار پوش متفاوت و بنابراین پوش سیگنال آزمایشی دریافتی یک فرآیند تصادفی خواهد بود. آشکار است که جمع برداری تصادفی (۳) باعث ایجاد تغییرات تصادفی در پوش می‌شود. اگر دو مولفه عمود بر هم X و Y را بصورت زیر تعریف کنیم:



شکل ۱ -

می بینیم، نمی توانیم مقدار N را تعیین کنیم). اکنون برای یافتن $f(r)$ ، برحسب رفتار N طبقه بندی زیر را در نظر می گیریم:

الف - N یک کمیت معین است

الف - ۱ CLT (قضیه حد مرکزی) برقرار است در اینجا N به اندازه کافی بزرگ بوده، بردارها از یکدیگر مستقل هستند و سایر شرایط کافی CLT نیز برقرار می باشند [۱۵]. بنابراین X و Y در (۴)، متغیرهای تصادفی توأماً نرمال خواهند بود. با این شرطها وبدون اعمال هیچ محدودیت دیگر بروی A_i و Θ_i ها می توان $f(r)$ را به شکل یک بسط بی پایان بیان کرد (۱)، صفحه ۱۳۰، رابطه (۲۸-۴.۶)، [۱۶]، صفحه ۱۲۴، رابطه (۲۵)، [۱۷]، صفحه ۲۴، رابطه (۹۳)]. آشکار است که با افزایش N ، دقت این تقریب نیز افزایش می یابد (یادآور می شویم که اگرچه [۱۶] نسبت به دو مرجع دیگر، بگونه ای جامع تر و کامل تر به بررسی مساله پرداخته، ولی با اینحال تنها محدودیت بسط بی پایان یاد شده را بزرگ بودن N ذکر کرده و صریحاً تأکید نموده که آن بسط بی پایان برای بردارهای وابسته نیز درست است [۱۶]، صفحه ۱۳۵؛ در صورتیکه یکی از شرطهای کافی CLT ، استقلال متغیرهای تصادفی جمع شونده می باشد که ما در ابتدا بدان اشاره کرده ایم).

الف - ۲ CLT برقرار نیست

در این حالت برخی از شرایط کافی CLT (مانند بزرگ بودن N ، استقلال بردارها و غیره) برقرار نمی باشد. بنابراین یافتن $f(r)$ در مقایسه با حالت پیشین بسیار پیچیده تر می شود. در بین کتابها و مقاله های در باره اثر محوکنندگی چند راهه، تنها تعداد اندکی به

$$X = \sum_{l=1}^N A_l \cos \Theta_l = R \cos \Theta$$

$$Y = \sum_{l=1}^N A_l \sin \Theta_l = R \sin \Theta$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

هدف اصلی مطالعات انجام شده در باره اثر محوکنندگی چند راهه، یافتن تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی R (یعنی $f(r)$) بر حسب تابع چگالی احتمال توأم $2N + 1$ متغیر تصادفی N و $\Theta_1, \dots, \Theta_N, A_1, \dots, A_N$ می باشد. در بیش از ۹۰٪ مقاله های چاپ شده در باره اثر محوکنندگی چند راهه در ۵۰ سال اخیر، حالت های بسیار ساده و خاصی از مساله کلی بالا مورد بررسی قرار گرفته اند و توابع چگالی احتمال ساده ای معرفی شده اند که معروف ترین و شناخته شده ترین آنها عبارتند از ریلی (Rayleigh)، رایس (Rice)، ناکاگامی (Nakagami)، ویبول (Weibull) و نرمال لگاریتمی (Log - Normal) [۱۴] (یادآور می شویم که نباید این N را با کمیتی بظاهر مشابه در مقاله های مخابرات سیار، که آنرا \bar{N} می نامیم یکسان دانست. برای یافتن پاسخ ضربه آماری کانال در مخابرات سیار، معمولاً یک پالس سینوسی باریک تک فرکانس با دامنه ثابت می فرستند. در این صورت N عبارتست از تعداد پالس هایی که گیرنده در یک محدوده زمانی با تأخیرهای متفاوت دریافت می کند [۴] - [۵]، [۸]، [۱۰] - [۱۱]). پس \bar{N} کمیتی است قابل اندازه گیری در صورتیکه با تعبیر بالا، N عبارتست از تعداد پالس هایی که با تأخیر یکسان به گیرنده می رسند که چون درگیرنده جمع این N پالس را

بررسی این امر در حالت‌های کلی پرداخته‌اند. بتازگی یک بررسی جامع از این حالت در [۱۸] ارائه شده است.

ب - N یک کمیت تصادفی است

ب - ۱ - CLT برقرار است

قضیه ۱ - اگر داشته باشیم:

$$1 - N(n) = 0 \text{ به ازاء } n < n_0 \text{ (که } n_0 \gg 1 \text{)},$$

۲ - برقراری CLT برای X و Y در (۴) به شرط $N = n$ (به ازاء هر n به گونه‌ای که $n \geq n_0$),

۳ - یکسان بودن همه $f(a_i, \theta_i)$,

$$4 - \sigma(N)/E(N) \ll 1 \text{ (که } \sigma(N) = \sqrt{Var(N)} \text{)},$$

آنگاه X و Y در (۴) متغیرهای تصادفی توأمأ نرمال خواهند بود [بخش ۴.۸].

بنابراین می‌توان بدلیل شرط $\sigma(N)/E(N) \ll 1$ بجای $E(N)$ را قرار داده و همانند قسمت (الف - ۱) از همین بخش $f(r)$ را به شکل یک بسط بی‌پایان بیان کرد. آشکار است که هر چه n بزرگتر و $\sigma(N)/E(N)$ کوچکتر باشد، تقریب بالا بهتر می‌گردد.

ب - ۲ - CLT برقرار نیست

در اینجا برخی از شرایط قضیه (۱) برقرار نمی‌باشند. به علت تصادفی بودن N ، یافتن $f(r)$ در مقایسه با قسمت (الف - ۲) بمراتب دشوارتر است. در حقیقت اگرچه می‌توان از ترکیب قضیه احتمال کل [۱۵] با روشهای بیان شده در [۱۸]، $f(r)$ را به شکلی بسته بیان نمود؛ ولی پیچیدگی و مفصل بودن محاسبه‌های لازم، ما را از ادامه کار باز خواهند داشت. تا جائیکه آگاهی داریم، هیچ یک از کتابها و مقاله‌های در باره اثر محوکنندگی چند راهه و یا مساله بردارهای تصادفی، به بررسی این امر در حالت‌های کلی نپرداخته‌اند. یک حالت حدی جالب و مهم (با این فرض که N دارای پخش دو جمله‌ای منفی است) در [۴۵] بررسی شده است.

۲ - برآوردکننده ناپارامتری تابع چگالی احتمال

فرض می‌کنیم که تابع چگالی احتمال ناشناخته، $p(x)$ ؛ داده‌های موجود x_1, \dots, x_m ، و تعداد، انحراف معیار و اندازه محدود ($Range$) داده‌ها برترتیب m ، s_x و r_x باشند.

الف - بافتنما ($Histogram$)

این برآوردکننده ناپارامتری بگونه‌ای گسترده بکار می‌رود و تنها از لحاظ ترسیمی اهمیت دارد؛ یعنی برای کشیدن برآوردی از تابع چگالی احتمال ناشناخته بکار می‌رود.

برای بدست آوردن آن، نخست محدوده داده‌ها را به تعدادی ($nbins$) بازه هم طول (به طول $2h$) و جدا از هم تقسیم می‌کنیم.

سپس تعداد نقطه‌های موجود در هر بازه را می‌نویسیم (تعداد نقطه‌های بازه i ام عبارتند از m_i). اگر مرز پایین و بالای i ام را $x_{i,min}$ و $x_{i,max}$ بنامیم، خواهیم داشت:

$$\hat{p}_{hist}(x) = \frac{m_i}{2hm} : x_{i,min} < x \leq x_{i,max} \quad i = 1, \dots, nbins \quad (6)$$

اریبی ($bias$) و واریانس این برآوردکننده در [۲۷]، زیر بخش ۳.۵.۸ بیان شده‌اند. این برآوردکننده به ازاء بیشتر x ها اریب بوده که اریبی آن با افزایش h افزوده می‌شود؛ در صورتیکه واریانس آن با افزایش h کم می‌شود (با ثابت انگاشتن m). اگر چه همیشه بین مقادیرهای اریبی و واریانس کشمکش هست ولی می‌توان از راه ایجاد شرطهای $m \rightarrow \infty$ و $2h \rightarrow 0$ به گونه‌ای که $2h \times m \rightarrow \infty$ (مثلاً $2h = 1/\sqrt{m}$)، اریبی و واریانس را به سوی صفر میل داد.

یک راه سودمند برای انتخاب تعداد بازه‌ها (که با $2h$ نسبت عکس دارد زیرا: $nbins = r_x/2h$) عبارتست از [۲۸]:

$$nbins = \frac{r_x}{3.65s_x} m^{1/3} + 1 \quad (7)$$

در بیشتر کاربردها، تعداد بازه‌ها را عددی بین ۴ و ۱۲ در نظر می‌گیرند [۲۸].

ب - برآوردکننده پارزن ($Parzen$)

این برآوردکننده ناپارامتری با آنکه اهمیت فراوان دارد، تقریباً ناشناخته مانده و به همین علت (تا جایی که ما آگاهی داریم) بیشتر از بافتنما برای برآورد کردن ناپارامتری یک تابع چگالی احتمال ناشناخته سود می‌جویند. گواه برتری این برآوردکننده آنستکه $\hat{p}_{parzen}(x)$:

اولاً: از نظر ترسیمی، شکلی پیوسته و هموار دارد (برخلاف $\hat{p}_{hist}(x)$ که ناپیوسته و پله‌ای است).

ثانیاً: از نظر تحلیلی، شکلی بسته ($Closed Form$) دارد.

برای بدست آوردن آن ابتدا نقاطی که خواهان برآورد کردن $p(x)$ در آنها هستیم را مشخص می‌کنیم ($x^{(1)}, \dots, x^{(l)}$). سپس طول بازه حول $x^{(i)}$ ها ($2h$) را انتخاب می‌کنیم (این بازه همان $[x^{(i)} - h, x^{(i)} + h]$ می‌باشد که از x های موجود در آن برای یافتن $\hat{p}_{parzen}(x^{(i)})$ استفاده می‌نماییم). بعد از انتخاب تابع وزن مورد نظر (تابعی کراندار و نامنفی که سطح زیر آن برابر یک بوده و آنرا $W(x)$ می‌نامیم) خواهیم داشت:

$$\hat{p}_{parzen}(x^{(i)}) = \frac{1}{mh} \sum_{j=1}^m W\left(\frac{x^{(i)} - x_j}{h}\right); \quad i = 1, \dots, l \quad (8)$$

اگر چه پارزن نخستین کسی بود که رابطه (۸) را بعنوان یک برآوردکننده ناپارامتری تابع چگالی احتمال معرفی کرد [۲۹]،

ولی به نحوه انتخاب h و $W(0)$ اشاره‌ای نکرده است. با اینحال باید دانست که اثر h بروی (۸) بیشتر از تاثیر نوع تابع وزن $W(0)$ می‌باشد [۲۸].

تعدادی تابع وزن (از جمله گوسی و چهارگوش) در [۲۸] و [۲۹] بیان شده‌اند. در بیشتر موارد بر انتخاب تابع وزن گوسی تاکید می‌کنند [۲۷].

برای انتخاب پهنای باند (h) نیز راه زیر در [۲۸] بیان شده است:

$$h = 1/\sqrt{5} \sigma_x m^{-9}$$

که q برای تابع وزن چهارگوش $1/3$ و برای سایر توابع وزن یادشده در [۲۸]، برابر $1/5$ می‌باشد.

اریبی و واریانس این برآورد کننده در [۲۷]، زیربخش ۸.۵.۴ [۲۹] بیان شده‌اند. بدلیل تشابه این مقادارها با اریبی و واریانس مربوط به بافتنما، نتیجه‌های بافتنما در اینجا نیز برقرار می‌باشند. برخی مؤلفین تابع وزن را هسته (*Kernel*)، و برآورد کننده پارزن را برآورد کننده با هسته (*Kernel Estimator*) می‌خوانند.

۳ - شبیه‌سازی مونت کارلو

همانگونه که در بخش (۱) دیدیم؛ زمانیکه N کمیته معین باشد، می‌توان از روشهای تحلیلی برای یافتن $f(r)$ سود جست ولی برای N ‌های تصادفی، بکارگیری راههای تحلیلی - با آنکه امکان دارد - بادشواری فراوان همراه خواهد بود. به همین علت بهتر است که به ازاء N ‌های تصادفی، از شبیه‌سازی مونت کارلو برای بررسی $f(r)$ بهره بریم.

شبه کار بدین شکل است که نخست یک N با تابع چگالی احتمال $f_N(n)$ تولید می‌کنیم. سپس $2N$ متغیر تصادفی A_1, \dots, A_N و $\Theta_1, \dots, \Theta_N$ را با توابع چگالی احتمال مورد نظر تولید می‌نمایم. بعد مقدار R را از روی (۴) و (۵) بدست می‌آوریم. آنگاه این کار (تولید N ، A_i ، Θ_i ها و یافتن R) را بارها تکرار می‌کنیم (m بار) و در آخر $f(r)$ را بر پایه m مقدار بدست آمده برای R و با بکارگیری یک برآورد کننده ناپارامتری تابع چگالی احتمال، برآورد می‌کنیم.

الف - انتخاب تابع چگالی احتمال N

اگر بر پایه تعریف‌ها و تعبیرهای متغیرهای تصادفی گسسته [۱۹] قضاوت کنیم، در می‌یابیم که متغیرهای تصادفی پواسن (*Poisson*) و یکنواخت گسسته (*discrete uniform*)، مناسبترین پخشها برای N هستند.

پخش یکنواخت گسسته را می‌توان متناظر با محیط انتشاری ناهمگن (مکانی) و غیرایستا (زمانی) دانست زیرا که تعداد راه‌های

موجود بین فرستنده و گیرنده در این محیطها می‌تواند هر مقدار را با احتمال یکسان داشته باشد در صورتیکه پخش پواسن نمایانگر محیط انتشاری همگن تر و ایستاتر می‌باشد که در آن تعداد راه‌ها تغییرات و نوسانات کمتری دارد. در [۱]، [۲۰] و [۴۶] (که N را کمیته تصادفی در نظر گرفته‌اند)، تنها از پخش پواسن استفاده کرده‌اند.

یادآور می‌شویم که متغیر تصادفی یکنواخت گسسته مورد نظر ما، اعداد طبیعی موجود در بازه $[1, n_{max}]$ را با احتمال یکسان ($1/n_{max}$) اختیار می‌کند.

ب - انتخاب توابع چگالی احتمال A_i ها و Θ_i ها

برای آنکه اثر تصادفی بودن N بروی $f(r)$ هر چه بیشتر آشکار شود، بایست که سایر عوامل تصادفی را تا آنجا که می‌شود، کاهش داد. به همین علت مدل ساده‌ای را در نظر می‌گیریم که در آن همه A_i ها معین و برابر ۱، همه Θ_i ها مستقل از یکدیگر و دارای پخش یکنواخت در بازه $[0, 2\pi]$ می‌باشند. این مدل را *UAUDP (Unit Amplitudes Uniformly Distributed Phases)* می‌نامیم. یکنواخت بودن پخش فازها فرض رایجی است که در بیشتر کتابها و مقاله‌های در باره در اثر محوکنندگی چند راهه بکار می‌رود ولی معین و برابر ۱ بودن دامنه‌ها حالت خاصی است که برای مشخص تر شدن اثر تصادفی بودن N بروی $f(r)$ در نظر گرفته‌ایم.

این مدل از پیشینه تاریخی نیز برخوردار بوده و در مقاله‌های قدیمی ریاضی مربوط به مساله گام برداری تصادفی (*Random Walk*) ([۲۱] - [۲۵]) و یا مقاله‌های قدیمی مخابرات [۲۶] هم بکار گرفته شده است.

ج - انتخاب برآورد کننده ناپارامتری $f(r)$

بدلیل برتری برآورد کننده پارزن، در همه حالتها از آن استفاده کرده‌ایم. برای کشیدن هر $\hat{p}_{parzen}(0)$ پهنای باند را از روی (۹) یافته و تابع وزن را گوسی گرفته‌ایم.

د - جزئیات شبیه‌سازی مونت کارلو و بسته‌های (*Packages*) نرم افزاری بکار رفته

ما در هر حالت ۴۵۰۰ بار R را تولید کرده‌ایم ($m=4500$) و هر $\hat{p}_{parzen}(0)$ را در ۱۰۰ نقطه یافته‌ایم ($t=100$). برای تولید ۳ متغیر تصادفی یکنواخت در بازه $[0, 2\pi]$ ، پواسن و یکنواخت گسسته در بازه $[1, n_{max}]$ و نیز نوشتن برنامه لازم برای تولید متغیر تصادفی R در (۵)، از بسته نرم‌افزاری *Mathematica* سود جست‌ایم [۳۰]. برای تجزیه و تحلیل آماری داده‌ها و کشیدن برآورد کننده‌های پارزن، بسته نرم افزاری *Timeslab* را بکار برده‌ایم [۲۸].

۴ - بررسی شکلهای بدست آمده از شبیه سازی مدل

UAUDP

در شکل (۲)، N یک کمیت معین است به گونه ای که :
 در شکل (۳)، $N = ۲, ۳, ۴, ۵, ۱۰, ۲۰$ یک متغیر تصادفی پواسن و در شکل (۴)، N یک متغیر تصادفی یکنواخت گسسته است که اعداد طبیعی موجود در بازه $[۱, n_{max}]$ را با احتمال یکسان اختیار می کند و البته در هر دو حالت داریم: $۲, ۳, ۴, ۵, ۱۰, ۲۰$ و $E(N)$ (برای سادگی، در شکلهای (۲)، (۳) و (۴) را برترتیب $f_1(r)$ ، $f_2(r)$ و $f_3(r)$ می نامیم. همچنین از آنجا که به ازاء N معین داریم: $E(N) = N$ ، پس در بحثهای آتی همیشه از $E(N)$ استفاده خواهیم کرد، مگر آنکه صریحاً خلاف آنرا یادآور شویم).

همانگونه که پیش از این گفتیم، $f(r)$ با معین انگاشتن N به شکلی بسته بیان می شود؛ بنابراین می توان آنرا کشید. برای آنکه از درستی شبیه سازی انجام شده مطمئن شویم، می توانیم $f(r)$ های کشیده شده در مقاله های دیگر را با شکلهای خود (البته به ازاء N های معین) مقایسه کنیم. برای نمونه با معین و مساوی انگاشتن دامنه ها و یکنواخت بودن پخش فازها در بازه $[۰, ۲\pi]$ ، $f(r)$ با بکارگیری سری فوریه - بستن (Fourier - Bessel)، به ازاء $N=۲$ در [۳۱، شکل ۲] و $N=۳$ در [۳۱، شکل ۴] کشیده شده است. از مقایسه شکل (۲ - الف) با [۳۱، شکل ۲] و شکل (۲ - ب) با [۳۱، شکل ۴] و دیدن هماهنگی آنها با یکدیگر، به درستی نتیجه های بدست آمده از شبیه سازی پی می بریم.

الف - اثر تصادفی بودن N در مدل UAUDP

از مقایسه شکل (۲) با شکلهای (۳) و (۴) در می یابیم که به ازاء $E(N)$ یکسان، تصادفی بودن N تأثیر زیادی بروی شکل $f(r)$ دارد. آشکارترین اختلاف، هموار بودن $f_1(r)$ نسبت به $f_2(r)$ و $f_3(r)$ به ازاء همه مقدارهای $E(N)$ می باشد که البته با بکارگیری قضیه احتمال کل و نیز گسسته بودن متغیر تصادفی N بسادگی توجیه می شود.

ب - اثر نوع تابع چگالی احتمال N در مدل UAUDP

از مقایسه شکلهای (۳) و (۴) در می یابیم که به ازاء $E(N)$ های برابر، نوع پخش N در شکل $f(r)$ مؤثر است. البته به ازاء $E(N)$ های بزرگ (مثلاً $E(N)=۲۰$)، شکلهای در هر دو حالت هموارتر شده و از نظر ظاهری تا حدی شبیه یکدیگر می شوند. تنها وجه تشابه عمومی آنستکه بیشتر شکلهای دارای دو حداکثر محلی در $r=۱$ و $r=۲$ می باشند.

یک اختلاف عمده بین شکلهای (۳) و (۴) که به ازاء $E(N) = ۲, ۳, ۴$ به چشم می خورد آنستکه $f_2(r=۰)$ صفر نیست در صورتیکه $f_3(r=۰)$ صفر می باشد. این تفاوت از آنجا

ناشی می شود که متغیر تصادفی پواسن با احتمال $exp[-E(N)]$ صفر می شود (پس در اینجا R می تواند صفر شود)، در صورتیکه متغیر تصادفی یکنواخت گسسته ای که ما برگزیده ایم، هیچگاه صفر نمی شود. البته به ازاء $E(N)$ بزرگتر، $f_2(r=۰)$ هم تقریباً صفر می شود. زیرا که با افزایش $E(N)$ ، احتمال صفر شدن متغیر تصادفی پواسن بطور نمایی کاهش می یابد.

۵ - بررسی برقراری CLT در نتیجه های بدست آمده از

شبیه سازی مدل UAUDP

به آسانی می توان ثابت کرد که در مدل UAUDP، شرط لازم و کافی برای برقراری CLT، ریلی بودن $f(r)$ می باشد (می دانیم که تابع چگالی احتمال ریلی به شکل زیر است:

$$\frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2}; \quad r \geq 0 \quad (۱۰)$$

که در مدل UAUDP داریم: $\sigma^2 = E(N)/۲$.

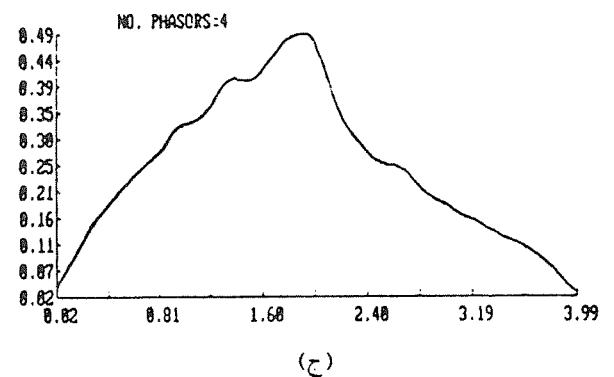
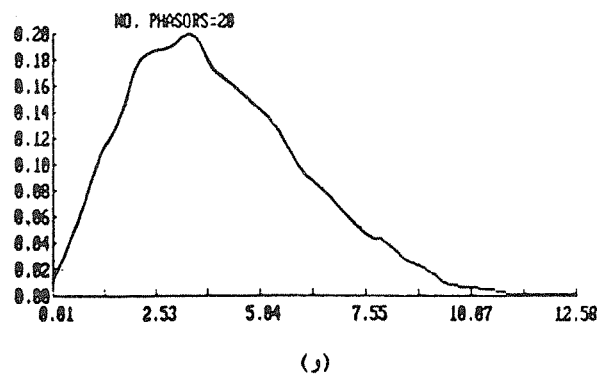
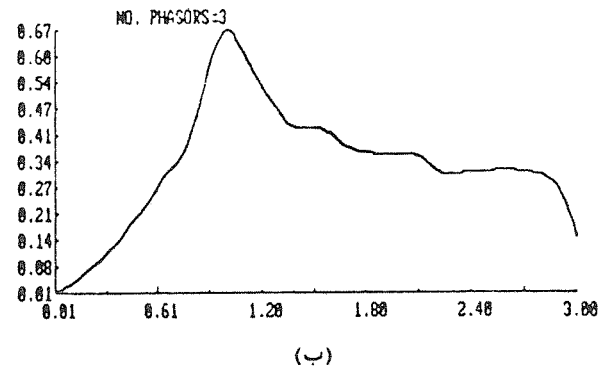
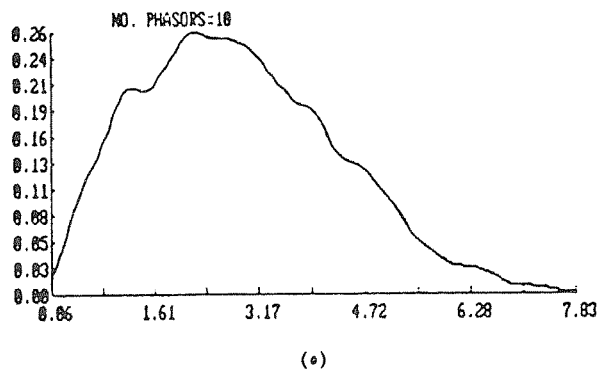
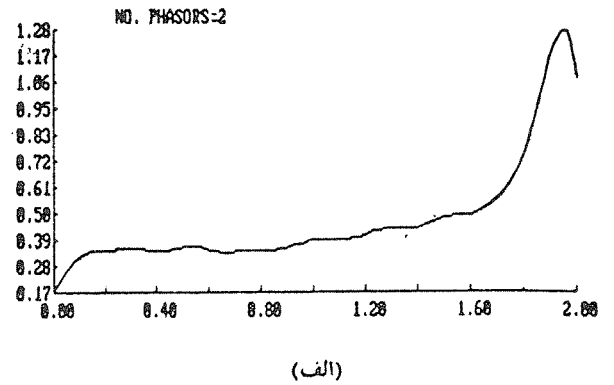
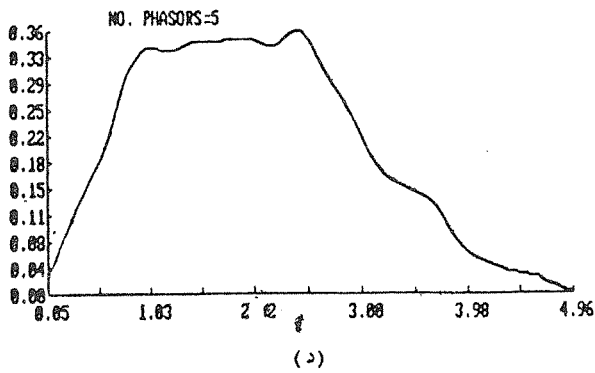
اثبات لازم بودن به آسانی امکان پذیر است زیرا که با فرض برقراری CLT در مدل UAUDP، X و Y در (۴) دو متغیر تصادفی نرمال مستقل با میانگین صفر و واریانس $E(N)/۲$ می شوند و بنابراین R در (۵) ریلی می گردد. برقراری کافی بودن مشروط به آنستکه دو شرط بیان شده در [۳۲۵۵، صفحه ۳۲] برآورده شوند. این دو شرط عبارتند از استقلال R و Θ در (۳) و نیز یکنواخت بودن تابع چگالی احتمال Θ در بازه $[۰, ۲\pi]$ که بدلیل استقلال Θ_i ها از یکدیگر، یکنواخت بودن پخش آنها در $[۰, ۲\pi]$ و نیز استقلال Θ_i ها از A_i ها در مدل UAUDP، این دو شرط برقرار می باشند. بنابراین اثبات کافی بودن، عکس اثبات لازم بودن می گردد.

پس برای بررسی اثر N بروی برقراری CLT در مدل UAUDP می توانیم ریلی بودن $f(r)$ های کشیده شده در شکلهای (۲)، (۳) و (۴) را به ازاء $E(N)$ های بزرگ (یعنی $۲۰, ۱۰, E(N)$) و با بکارگیری یک آزمون نیکویی برازش (Goodness of Fit) بیازماییم. سه آزمون نیکویی برازش شناخته شده برای پخش ریلی به شرح زیر می باشند:

روش اول: نخست m داده موجود x_1, \dots, x_m را به $m/۲$ داده جدید $y_1, \dots, y_{m/۲}$ تبدیل می کنیم که در آن m زوج بوده و:

$$y_i = \frac{x_i}{x_{i+m/۲}}; \quad i = 1, \dots, m/۲ \quad (۱۱)$$

اگر x_i ها مستقل و دارای پخش ریلی باشند، آنگاه y_i ها نیز مستقل و دارای پخش F مرکزی خواهند بود. اکنون آزمون KS (Kolmogorov - Smirnov) را به y_i ها اعمال می کنیم [۳۳]. ایراد این روش در آنستکه تصمیم گیری را بر پایه نیمی از داده های

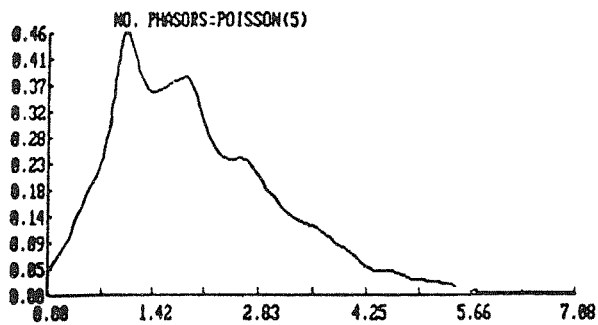


شکل ۲ - برآورد ناپارامتری تابع چگالی احتمال پوش $(f_1(r))$ به ازای N های معین.

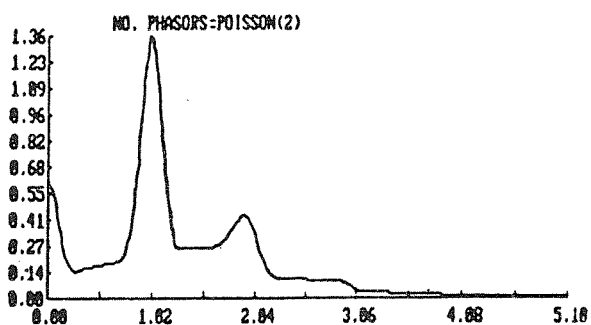
زیر: (*Maximum Likelihood*)

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m x_i^2 \quad (۱۲)$$

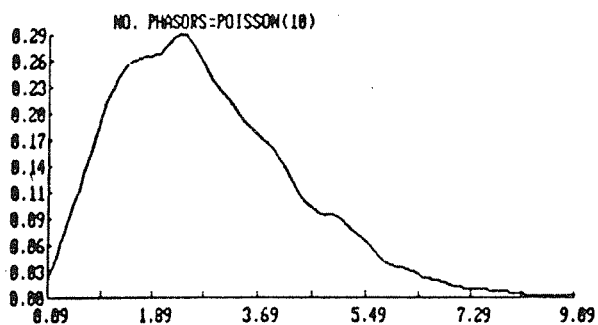
موجود انجام می‌دهد. روش دوم: به کمک آزمون KS ، شباهت بخش داده‌های موجود x_1, \dots, x_m را با یک بخش ریلی که نمای $(mode)$ آن (یعنی σ^2 در (۱۰)) توسط برآورد کننده حداکثر درستمایی



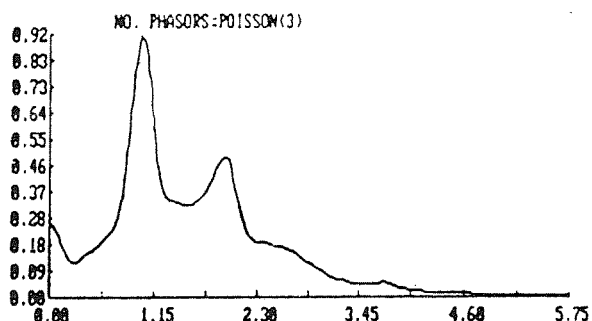
(د)



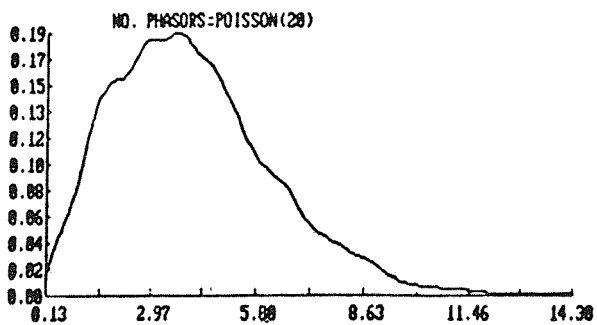
(الف)



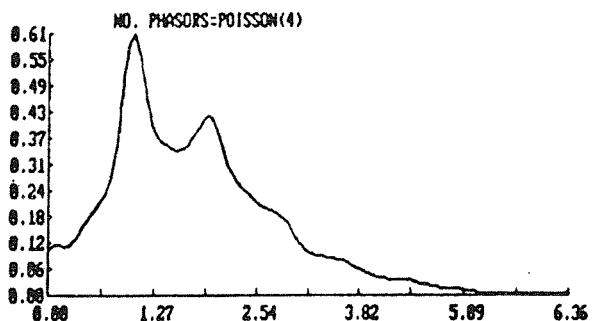
(ه)



(ب)



(و)

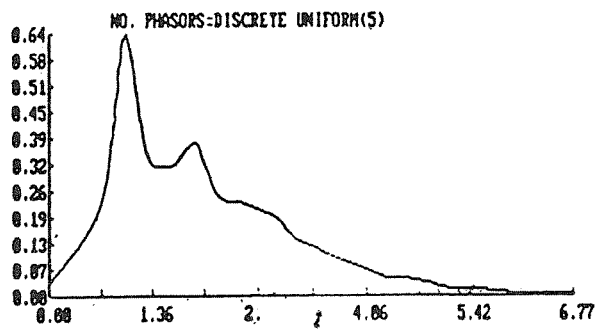


(ج)

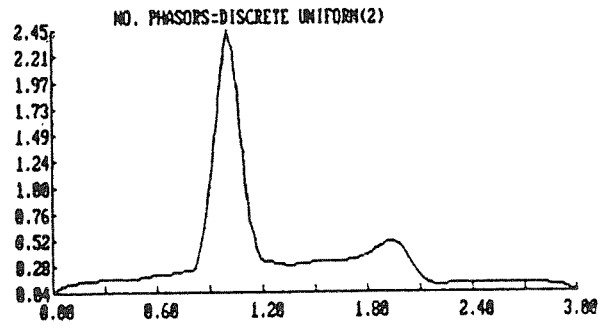
شکل ۳ - برآورد ناپارامتری تابع چگالی احتمال پوش $(f_2(r))$ به ازای N های تصادفی با بخش بواسن.

نبوده و همانگونه که می دانیم، بکارگیری جدولهای رایج آزمون KS در مواردی که بخش تحت فرض صفر (*Null Hypothesis*) کاملاً مشخص نبوده و پارامترهای ناشناخته‌ای دارد که باید از روی داده‌ها برآورد شوند، مخاطره آمیز می‌باشد ([۳۶]-[۳۷]).

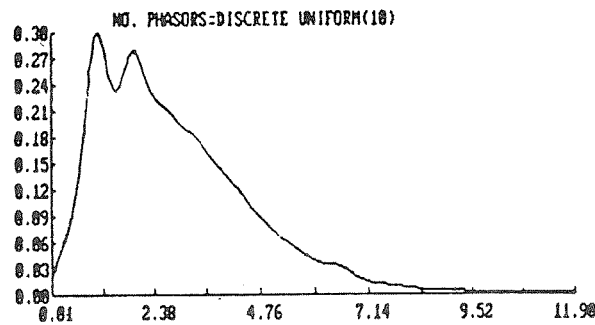
برآورد شده است، می‌سنجیم [۳۵]. (ویژگیهای برآورد کننده (۱۲) بطور کامل در [۳۴] بررسی شده‌اند). ایراد این روش در آنستکه بخش آماره آزمون KS (Test Statistic) برای بخش ریلی با نامی ناشناخته (که باید از روی (۱۲) برآورد شود) معلوم



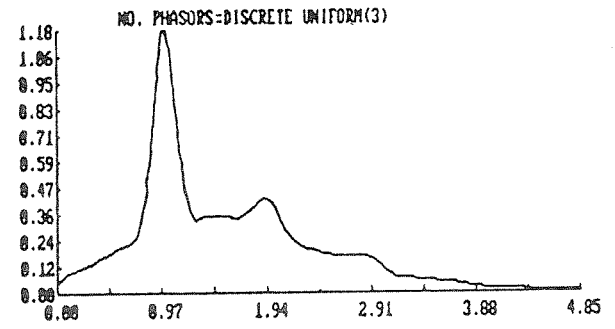
(د)



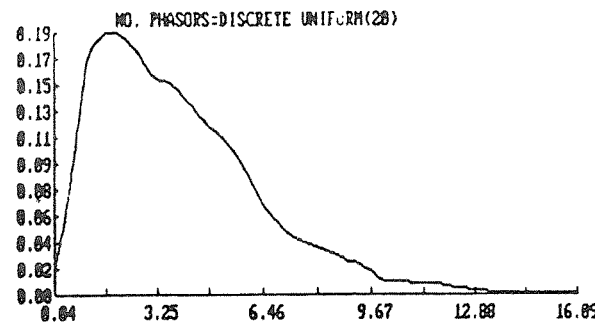
(الف)



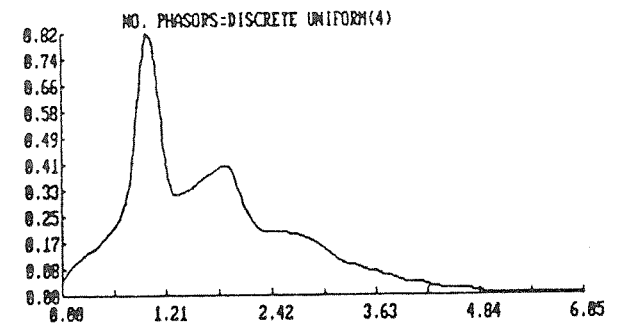
(ه)



(ب)



(و)



(ج)

شکل ۴ - برآورد ناپارامتری تابع چگالی احتمال پوش $(f_T(r))$ به ازای N های تصادفی با پخش یکنواخت گسسته.

یک پخش نمایی که میانگین آن بروشی ساده (میانگین گیری) از روی داده‌های جدید برآورد شده است، می‌سنجیم [۳۵]. برخلاف روش گذشته، پخش آماره آزمون KS برای پخش نمایی با میانگین ناشناخته، معلوم می‌باشد که جدولهای آن برای

روش سوم: نخست داده‌های موجود x_1, \dots, x_m را به توان دو می‌رسانیم. اگر آنها مستقل و دارای پخش ریلی باشند، آنگاه x_i^2 ها نیز مستقل و دارای پخش نمایی خواهند بود. اکنون به کمک آزمون KS ، شباهت پخش داده‌های جدید x_1^2, \dots, x_m^2 را با

جدول ۲ -

نوع N	پواسن	یکنواخت گسسته
۱۰	۰/۳۲	۰/۵۵
۲۰	۰/۲۲	۰/۵۶

دیده می شود که با افزایش $E(N)$ می توان $\sigma(N)/E(N)$ را برای پخش پواسن به اندازه دلخواه کوچک کرد در صورتیکه $\sigma(N)/E(N)$ در پخش یکنواخت گسسته با افزایش $E(N)$ زیاد شده و به سوی مقدار حدی $۰/۵۸ \approx ۱/\sqrt{۳}$ میل می کند. بنابراین بر پایه بند (۴) از قضیه (۱) و رفتار (۱۴) و (۱۴) می توان گفت که امکان ریلی شدن $f_p(r)$ (بسته به مقدار $E(N)$) وجود دارد (در حقیقت برای مدل $UAUDP$ می توان به گونه ای تحلیلی ثابت کرد که اگر N دارای پخش پواسن باشد و $E(N)$ نیز به اندازه کافی بزرگ باشد، آنگاه تابع چگالی احتمال پوش ریلی خواهد شد [۴۵])، در صورتیکه $f_p(r)$ (بدلیل عدم برقراری بند (۴) قضیه (۱) به ازاء هیچ $E(N)$ و نیز بندهای (۱) و (۲)) نمی تواند ریلی باشد. نتیجه های بدست آمده از آزمون KS برای N های تصادفی، درستی گفته پیشین را تایید می کنند. در حالتی که N دارای پخش پواسن است، به دو نکته جالب بر می خوریم:

نکته اول آنستکه اگرچه $f_p(r)$ (برخلاف $f_p(r)$ به ازاء $E(N)$ های بزرگ ریلی می گردد، ولی در مقایسه با $f_1(r)$ به $E(N)$ های بزرگتری نیاز دارد تا ریلی شود. در حقیقت به ازاء $E(N) = ۱۰$ ، $f_1(r)$ با سطح معنی دار بون $۰/۰۱$ ریلی است ولی در همان شرایط $f_p(r)$ ریلی نمی باشد در صورتیکه با افزایش $E(N)$ به ۲۰ ، $f_p(r)$ فهم ریلی می گردد. نکته دوم آنستکه برای پخش پواسن، بند (۱) از قضیه (۱) به ازاء هیچ n ای دقیقاً برقرار نخواهد بود مگر آنکه (بطور حسی) $E(N)$ بزرگ و $\sigma(N)/E(N)$ کوچک باشد (البته با توجه به (۱۳))، بزرگ بودن $E(N)$ کافیت. در این صورت است که می توان گفت:

$$f_N(n) \approx 0; \quad n \ll E(N) \quad (۱۵)$$

یعنی بند (۱) از قضیه (۱) بگونه ای تقریبی برقرار می شود. به بیان دیگر بخاطر بزرگ بودن $E(N)$ و کوچک بودن $\sigma(N)/E(N)$ به ازاء $E(N) = ۲۰$ ، با آنکه بند (۱) از قضیه (۱) بگونه ای دقیق برقرار نیست، $f_p(r)$ ریلی شده است.

۶ - نتیجه گیری

در کتابها و مقاله های موجود، هیچ شکلی برای $f(r)$ به ازاء N های تصادفی کشیده نشده است، بنابراین با نگاه کردن به شکلهای ۳ و ۴ و مقایسه آنها با شکل ۲ می توان ایده و تصویری

نخستین بار به کمک روش مونت کارلو در [۳۸] و به کمک روشهای تحلیلی در [۳۹] ارائه شده اند. آشکار است که روش سوم از دو روش دیگر بهتر می باشد. به همین علت از آن بعنوان آزمون نیکویی برازش برای پخش ریلی سود جستیم. جدول ۱ نمایانگر مقادیرهای آماره آزمون KS یعنی d_{max} (بیشترین اختلاف بین تابع پخش تجربی و تابع پخش تحت فرض صفر) می باشد که از روش سوم بدست آمده اند:

جدول ۱ -

نوع N	معین	پواسن	یکنواخت گسسته
۱۰	۰/۰۱۸(۰/۰۱)	۰/۰۲۳(۰/۰۱۶)	۰/۰۶۸(۰/۰۱۶)
۲۰	۰/۰۱۱(۰/۰۴)	۰/۰۱۲(۰/۰۳)	۰/۰۹۱(۰/۰۱۶)

هر عدد داخل برانتر عبارتست از سطح معنی دار بودن بحرانی ($Critical Level of Significance$) که از روی [۳۷]، جدول صفحه های ۴۶۴ و ۴۶۵ بدست آمده است.

اگر سطح معنی دار بودن آزمون را $۰/۰۱$ در نظر بگیریم، آنگاه مرز تصمیم برابر با $۰/۰۱۹$ خواهد بود. بنابراین می توان گفت که $f_1(r)$ به ازاء $N = ۱۰, ۲۰$ و $f_p(r)$ به ازاء $E(N) = ۲۰$ ریلی می باشند در صورتیکه $f_p(r)$ به ازاء هیچ $E(N)$ ای ریلی نیست.

ریلی بودن $f_1(r)$ به ازاء N های بزرگ از مدتها پیش شناخته شده بود. به گونه ای که حتی جدولهایی عددی آماده شده اند [۲۵] که به کمک آنها می توان کمترین N لازم برای ریلی شدن $f_1(r)$ را با دقتی مورد نظر و در محدوده ای از r تعیین نمود. به همین علت پیروزی $f_p(r)$ در آزمون ریلی بودن به ازاء ۲۰ ، $N = ۱۰$ شگفت انگیز نمی باشد.

پیش از بررسی نتیجه های بدست آمده از آزمون KS برای N های تصادفی، نخست کمیت $\sigma(N)/E(N)$ را برای هر دو نوع پخش N پیدا می کنیم [۴۰]:

$$\frac{\sigma(N)}{E(N)} (Poisson) = \{E(N)\}^{-1/2} \quad (۱۳)$$

$$\frac{\sigma(N)}{E(N)} (discrete uniform) = \left\{ \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{E(N)} \right] \right\}^{1/2} \quad (۱۴)$$

جدول ۲ نمایانگر مقادیرهای $\sigma(N)/E(N)$ برای هر دو نوع پخش N و به ازاء ۲۰ ، ۱۰ می باشد که از روی روابط ۱۳ و ۱۴ بدست آمده اند:

$$\frac{\sigma(N)}{E(N)} \ll 1 \quad (17)$$

که در این صورت بند (۴) از قضیه یاد شده نیز بطور خودکار کنار گذاشته می‌شود. برقراری این دو شرط بدین مفهوم هستند که تابع چگالی احتمال N حول یک مقدار بزرگ $E(N)$ فشرده شده است.

اکنون قضیه (۱) را به شکل ساده‌تر زیر بیان می‌کنیم:
قضیه (۲) - اگر داشته باشیم:

$$1 - E(N) >> 1$$

$$2 - \sigma(N)/E(N) \ll 1$$

۳ - برقراری قضیه حد مرکزی برای X و Y در (4) به شرط $N=n$ (به ازاء n های حول $E(N)$).

۴ - یکسان بودن تمام $f(a_i, \theta_i)$ ها،

آنگاه X و Y در (4) متغیرهای تصادفی تواما نرمال خواهند بود (بنظر می‌رسد که شاید بتوان بند (4) از قضیه (2) را نیز کنار گذاشت اگرچه ما به بررسی این موضوع نپرداخته‌ایم).

حال بر پایه قضیه (2) به آسانی می‌توان ریلی بودن و یا نبودن $f_1(r)$ و $f_2(r)$ بدست آمده از شبیه‌سازی مدل $UAUDP$ را به ازاء $E(N) = 10, 20$ توجیه نمود.

در پایان باید این نکته را یادآور شویم که نتیجه‌های بدست آمده منحصر به اثر محوکنندگی چند راهه نبوده و برای هر مساله که با جمع تعدادی بردار (که تعداد، دامنه‌ها و فازهای بردارها، متغیرهای تصادفی هستند) مدل بشود، قابل استفاده می‌باشند [۳۱].

قدردانی

در اینجا لازم می‌دانیم که از خانمها طاهری و عسگری، و آقایان مهندس بخت آزاد و مهندس تابش که در تهیه این مقاله ما را یاری کردند، تشکر و قدردانی نمایم.

از اثر تصادفی بودن N بر روی $f(r)$ بدست آورد. این شکلها می‌توانند برخی از توجیه‌های ارائه شده برای اثر محوکنندگی و نیز برخی تصورات ما از این پدیده را زیر سؤال ببرند. برای مثال، دیده شده است که تابع چگالی احتمال پوش سیگنال رادیویی بازتاب شده از لایه E دارای دو حداکثر محلی می‌باشد که برای توجیه کیفی آن، از مدل مجموع دو سیگنال سینوسی و فرآیند گوسی استفاده کرده‌اند [۴۱]. ویژگیهای این مدل بگونه‌ای کامل در [۴۲] بررسی و روشهای عددی مناسب و کارآ برای کشیدن تابع چگالی احتمال پوش این مدل در [۴۲] و [۴۴] معرفی شده‌اند. اگرچه می‌توان با این مدل به تابعهای چگالی احتمال با دو حداکثر محلی دست یافت، ولی این تنها راه ممکن نبوده و برخی از شکلهای ۳ و ۴ نیز چنین ویژگی را از خود نشان می‌دهند. در نتیجه این پرسش در ذهن ایجاد می‌شود که آیا توجیه [۴۱] برای وجود دو حداکثر محلی در تابع چگالی احتمال پوش بی‌عیب و نقص است؟

برقراری CLT در اثر محوکنندگی چند راهه به ازاء N های تصادفی، موضوع بسیار مهم و قابل توجهی است که به همین علت، آنرا به کمک شبیه‌سازی مونت کارلو بررسی کرده‌ایم. تا جائیکه آگاهی داریم، تنها بیان کلی و نسبتاً دقیق موجود در این زمینه، قضیه (۱) می‌باشد [۱، بخش ۴.۸]. نتیجه‌های بدست آمده از شبیه‌سازی مدل $UAUDP$ (بوژه دومین نکته بیان شده در آخر بخش ۵) این تصور را در ذهن ایجاد می‌کنند که شاید بتوان این قضیه را به شکلی ساده‌تر و منطقی‌تر بیان کرد. در حقیقت با ایجاد تغییراتی اندک در اثبات قضیه (۱) می‌توان در حالت کلی بند (۱) از آن راکنار گذاشته و بجای آن دو شرط زیر را قرار داد:

$$E(N) \gg 1 \quad (16)$$

مراجع:

- 1 - P. Beckman, *Probability in Communication Engineering*. New York: Harcourt, Brace and World, 1967.
- 2 - J. G. Proakis, *Digital Communications*. 2nd ed., New York: McGraw - Hill, 1989.
- 3 - R. H. Clarke, "A statistical theory of mobile - radio reception," *Bell. Syst. Tech. J.*, vol. 47, pp. 957-1000, 1968.
- 4 - G. L. Turin, et al., "A statistical model of urban multipath propagation," *IEEE Trans. Vehic. Technol.*, vol. VT - 21, pp. 1-9, 1972.
- 5 - H. Suzuki, "A statistical model for urban radio propagation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM - 25, pp. 673-680, 1977.
- 6 - C. Loo, "A statistical model for a land mobile satellite link," *IEEE Trans. Vehic. Technol.*, vol. VT-34, pp. 122-127, 1985.
- 7 - A.A.M. Saleh and R.A. Valenzuela, "A statistical model for indoor multipath propagation," *IEEE J. Select. Areas. Commun.*, vol. SAC-5, pp. 128-137, 1987.
- 8 - P. Yegani and C.D. McGillem, "A statistical model for line-of-sight (LOS) factory radio channels," *39th IEEE Vehic. Technol. Conf. Proc.*, San Francisco, CA, pp. 496-503, 1989.
- 9 - W.R. Braun and U. Dersch, "A physical mobile

- radio channel model," *IEEE Trans. Vehic. Technol.*, vol. VT-40, pp. 472-482, 1991.
- 10 - T.S. Rappaport, et al., "Statistical channel impulse response models for factory and open plan building radio communication system design," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-39, pp. 794-807, 1991.
- 11 - R. Ganesh and K. Pahlavan, "Statistical modeling and computer simulation of indoor radio channel," *IEE Proc., Part I*, vol. 138, pp. 153-161, 1991.
- 12 - H. Taub and D.L. Schilling, *Principles of Communication Systems*. 2nd ed., New York: McGraw-Hill, 1986.
- 13 - M. Schwartz, *Information Transmission, Modulation and Noise*. 2nd ed., New York: McGraw-Hill, 1970.
- 14 - IEEE Vehic. Technol. Soc. Committee on Radio Propagation, "Received signal fading distribution," *IEEE Trans. Vehic. Technol.*, vol. VT-37, pp. 57-60, 1988.
- 15 - A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. 3rd ed., New York: McGraw-Hill, 1991.
- 16 - P. Beckman and A. Spizzichino, *The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces*. Artech House, 1987.
- 17 - M. Nakagami, "The m -distribution: A general formula of intensity distribution of rapid fading," in *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*, W.C. Hoffman, Ed., Pergamon, 1960.
- ۱۸ - همایون هاشمی و علی عبدی، "بررسی نظری تابع چگالی احتمال پوش سیگنال میانگذر باند باریک در محیطهای انتشار با اثر محوکنندگی چند مسیره"، مجموعه گزارشهای فنی ۱-۱۲، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۷۱.
- 19 - P. Bratley, et al., *A Guide to Simulation*. New York: Springer-Verlag, 1983.
- 20 - W.C. Hoffman, "Some statistical methods of potential value in radio wave propagation investigations," in *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*, W.C. Hoffman, Ed., Pergamon, 1960.
- 21 - K. Pearson, "The problem of the random walk," *Nature*, vol. 72, pp. 294-302, 1905.
- 22 - K. Pearson, "A mathematical theory of random migration," *Drapers' Company Research Memories, Biometric Series*, no. 3, 1906.
- 23 - J.W. Strutt, Lord Rayleigh, "The problem of random walk," *Nature*, vol. 72, p. 318, 1905.
- 24 - J.C. Kluyver, "A local probability problem," *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, vol. 8, pp. 341-350, 1906.
- 25 - J.A. Greenwood and D. Durand, "The distribution of length and components of the sum of n random unit vectors," *Ann. Math. Statist.*, vol. 26, pp. 233-246, 1955.
- 26 - K.A. Norton, et al., "The probability distribution of the amplitude of a constant vector plus a Rayleigh-distributed vector," *Proc. IRE*, vol. 43, pp. 1354-1361, 1955.
- 27 - K.S. Shanmugam and A.M. Breiphol, *Random Signals, Detection, Estimation and Data Analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1988.
- 28 - H.J. Newton, *TIMESLAB: A Time Series Analysis Laboratory*. Wadsworth & Brooks/Cole, 1988.
- 29 - E. Parzen, "On estimation of a probability density function and mode," *Ann. Math. Statist.*, vol. 32, pp. 1065-1076, 1962.
- 30 - S. Wolfram, *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*. 2nd ed., Addison-Wesley, 1991.
- 31 - J.K. Jao and M. Elbaum, "First-order statistics of a non-Rayleigh fading signal and its detection," *Proc. IEEE*, vol. 66, pp. 781-789, 1978.
- 32 - S.H. Lin, "Statistical behaviour of a fading signal," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 50, pp. 3211-3270, 1971.
- 33 - R.L. Greenspan, "Correction to" Testing a sample population for the Rayleigh distribution," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-20, p. 73, 1972.
- 34 - M.M. Peritsky, "Statistical estimation of mean

- signal strength in a Rayleigh- fading environment," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-21, pp. 1207-1213, 1973.
- 35 - B.I. Marks, "Comments on "Testing a sample population for the Rayleigh distribution" and a succeeding correction," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-20, pp. 1031-1032, 1972.
- 36 - J.D. Gibbons, *Nonparametric Statistical Inference*. New York: McGraw-Hill, 1971.
- 37 - W.J. Conover, *Practical Nonparametric Statistics*. 2nd ed., New York: John Wiley & Sons, 1980.
- 38 - H.W. Lilliefors, "On the Kolmogoro - Smirnov test for the exponential distribution with mean unknown," *J. Am. Statist. Assoc.*, vol. 64, pp. 387-389, 1969.
- 39 - J. Durbin, "Kolmogorov-Smirnov tests when parameters are estimated with applications to tests of exponentiality and tests on spacing," *Biometrika*, vol. 62, pp. 5-22, 1975.
- 40 - A.M. Mood, et al., *Introduction to the Theory of Statistics*. 3rd ed., New York: McGraw-Hill, 1974.
- 41 - S.R. Khastgir, et al., "The double-peak distribution of the amplitude of the radio wave returned from the sporadic E Layer," *Radio Science*, vol. 3, pp. 535-537, 1968.
- 42 - R. Esposito and L.R. Wilson, "Statistical properties of two sine waves in Gaussian noise," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-19, pp. 176-183, 1973.
- 43 - R. Price, "An orthonormal Laguerre expansion yielding Rice's envelope density function for two sine waves in noise," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-34, pp. 1375-1382, 1988.
- 44 - C.W. Helstrom, "Distribution of the sum of two sine waves and Gaussian noise," *IEEE Trans Inform. Theory*, vol. IT-38, pp. 186-191, 1992.
- 45 - E. Jakeman and P.N. Pusey, "Significance of K distributions in scattering experiments," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 40, pp. 546-550, 1978.
- 46 - P.N. Pusey, et al., "Single-interval statistics of light scattered by identical independent scatterers," *J. Phys. A*, vol. 7, pp. 530-540, 1974.