

کنترل بهینه رباتها

قسمت دوم - الگوریتم بهینه سازی

دکتر محسن بهرامی

دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مهندس غلامرضا نخعی

آزمایشگاه تحقیقاتی ارتعاشات دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده

آلگوریتمی برای کنترل زمان بهینه هر سیستم دینامیکی که حالت آغاز و پایانی و مسیر حرکت آن داده شده است، ارائه می شود. به این منظور، ابتدا کنترل بهینه به زبان ریاضی بیان شده و سپس روش نوینی در پاره سازی معادلات دیفرانسیل آورده شده است. الگوریتم بهینه سازی برای مسأله اساسی نیوتن شرح داده شده و از آن برای کنترل زمان بهینه حرکت پنجه یک ربات 2R بر مسیری دلخواه و مشخص با سکون در آغاز و پایان مسیر استفاده می گردد. این کاربرد در قسمت سوم ارائه خواهد شد.

Optimal Control of Robotic Manipulator Part Two- Optimization Algorithm

Mohsen Bahrami Ph.D

Associate professor of Mech. Eng. Dept.

Amirkabir University of Technology

Gholamreza Nakhaee, M.Sc.

Vibrations Research Laboratory

Amirkabir University of Technology

Abstract:

An Algorithm is given for optimal control of dynamical systems with known initial and final conditions. First a short presentation of optimal control is given, then the new method using central difference is presented, and finally an application is given for a 2R Manipulator.

در کنترل بهینه، حالت یک سیستم دینامیکی (مکانیکی، الکتریکی، شیمیایی و...) با n متغیر حالت $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ بیان می‌شود که در n معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر صدق می‌کند.

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

متغیرهای حالت در سیستمهای مکانیکی، بیشتر، مختصات و سرعتهای فراگیر، در مدارهای الکتریکی، ولتاژ و جریان و در سیستمهای شیمیایی رخنه و غلظت هستند. متغیر مستقل t معمولاً زمان است. هدف مسأله کنترل بهینه، یافتن n متغیر کنترل

$$u_k = u_k(t) \quad (k=1, 2, \dots, r)$$

تابعی از زمان t در بازه $t_i \leq t \leq t_f$ به ترتیب زمان آغاز و پایان است، به گونه‌ای که تابع فراگیر

$$J = \int_{t_i}^{t_f} f_0(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r) dt \quad (2)$$

(مانند هزینه، خطای میانگین، زمان، انرژی و...) را نسبت به قیدهای نامساوی

$$Q_j(u_1, u_2, \dots, u_r) \leq 0 \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad (3)$$

(بیانگر دامنه پذیرفتنی U) کمینه سازد. در کنترل بهینه (چنانکه هدف ماست) ممکن است متغیرهای حالت x_1, x_2, \dots, x_n نیز دارای قید باشند [۱ و ۲].

مقدار بهینه متغیرهای کنترل $u_k(t)$ ، خط سیر $x_i = x_i(t)$ را در فضای n بعدی حالت پدید می‌آورد. پاسخ چنین مسأله به شرایط مرزی مناسب جهت یافتن اندازه‌های اولیه و پایانی $x_i(t_i)$ و $x_i(t_f)$ نیاز دارد. زمان آغازین t_i و پایانی t_f نیز می‌توانند ناشناخته باشند.

چنانکه دیده می‌شود، مسأله کنترل بهینه در سرشت خود مشابه مسأله حساب وردشاست و روشهای آن به طور فراگیر در یافتن پاسخ کنترل بهینه یاری می‌کنند. این رده از مسأله‌ها که در آنها متغیر کنترل کراندار بوده و قصد دارد تا تابعی فراگیر را کمینه سازد با

اصل بیشینه پونتریاگین به کنترل بنگ بنگ منتهی می‌شود [۳].
در حساست کلی داشتن یا یافتن حالت اولیه $[z_1(t_i), \dots, x_n(t_i)]$ بیان کننده سطح $(n-n_i)$ بعدی چون $B_j[x_1(t_i), \dots, x_n(t_i)] = 0$ و $(j=1, 2, \dots, n_i \leq n)$

(۴)

در فضای n بعدی حالت است که اگر $n_i = n$ آنگاه حالت اولیه، نقطه‌ای را در فضای حالت نشان خواهد داد.

حالت پایانی $[x_1(t_f), x_2(t_f), \dots, x_n(t_f)]$ همچون حالت آغازین، نمایانگر سطح $(n-n_f)$ بعدی

$$G_j[x_1(t_f), \dots, x_n(t_f)] = 0 \quad (j = 1, \dots, n_f \leq n) \quad (5)$$

در فضای حالت می‌باشد [۴ و ۵].

همه متغیرهای x_i و u_k را t را چنین می‌انگاریم که الف) توابع معلوم f_0, f_1, \dots, f_n نسبت به متغیرهای u_k پیوسته و نسبت به متغیرهای x_i پیوسته مشتق پذیر هستند.

ب) توابع Q_j پیوسته مشتق پذیر بوده و گرادیان صفر ندارند.
ج) تعداد n_i تابع B_j و تعداد n_f تابع Q_j (بیانگر سطوح آغازین و پایانی در فضای حالت) پیوسته مشتق پذیرند.

۲) کنترل بنگ بنگ برای یک سیستم یک درجه آزادی و صفحه فاز [۵].

در قسمت اول، کنترل بنگ بنگ برای مسأله یک درجه آزادی توضیح داده شد. معادله حرکت یک جرم یکه را در نظر می‌گیریم.
 $\ddot{x} = f$

یا

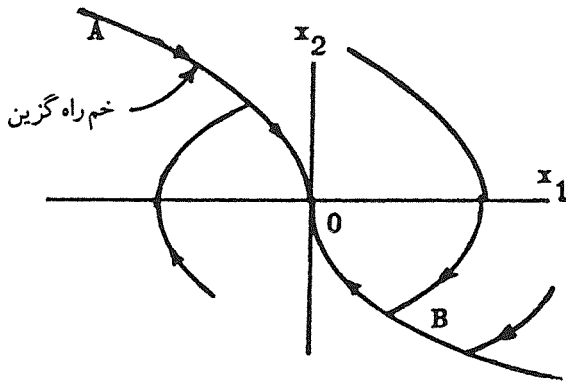
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f$$

که در آن f نیروی وارد به سیستم با بعد شتاب و $x_1 = x$ و $x_2 = \dot{x}$ قید

$$-F_0 \leq f(t) \leq F_0$$

در گذراز

$$x(t_0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$



شکل ۲- خم راه گزین بهینه

برای حالت‌های بالای این خم راه گزین، کنترل بهینه $f = -F_0$ و برای حالت‌های پایین آن $f = F_0$ است. روشن است که در این مسأله مبدا یک نقطه تکین است [۶-۱]. به بیان ریاضی، سیستم پایدار مجانبی بوده و در مبدا می‌ماند، به شرط آنکه پس از رسیدن به آن، نیرو صفر گردد.

از هر نقطه‌ای از صفحه فاز، یک سهمی بهینه می‌گذرد که حرکت بر آن تا رسیدن به خم راه گزین انجام گرفته و پس از آن بر خم راه گزین تا انتهای حرکت و رسیدن به مبدا حرکت انجام می‌گیرد.

از آنجا که معادله خم راه گزین غیرخطی است، برای سادگی آن را با یک خط جایگزین می‌کنند، اما انتخاب شایسته خط راه گزین، خود یک مسأله بهینه‌سازی است [۶].

برای فهم بهتر الگوریتم بهینه‌سازی و همچنین آزمون آن، مسأله رساندن جرم m را از مبدا دستگاه فاز یعنی سکون به حالت $x = x_f$ و $x = 0$ با کراندار بودن نیروی وارد بر m به صورت $|f| \leq F_0$ به عنوان مسأله اساسی، دنبال کرده و الگوریتم خود را با یافتن پاسخ آن توجیه می‌کنیم.

پاسخ آشکار این مسأله چنانکه در قسمت اول توضیح داده شد، حرکت تا نیمه راه بر $f = F_0$ و سپس سوییچ بر $f = -F_0$ تا پایان راه است. الگوریتمی بنا خواهیم کرد که صرفنظر از نقطه سوییچ کردن، بتواند آن را یافته و پاسخ مسأله را به دست آورد.

$$x(t_f) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

که در آن، t_0 صفر فرض شده، پاسخ زمان بهینه $f = \pm F_0$ را دارد. به این ترتیب

$$x = f = \pm F_0 \quad (6)$$

$$\dot{x} \, dx/d\dot{x} = \pm F_0 \quad (7)$$

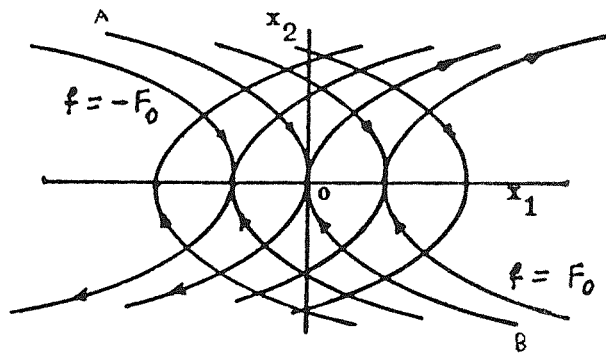
$$\dot{x}^2 = \pm 2F_0 x + c \quad (8)$$

که c یک ثابت انتگرال است. معادله (۸) بیانگر دو خانواده سهمی زیر

$$x_2^2 = \pm 2F_0 x_1 + c \quad (9)$$

در صفحه فاز x_1 و x_2 یا x و \dot{x} است. ثابت انتگرال برابر است با

$$c = \dot{x}_0^2 \pm 2F_0 x_0 \equiv \dot{x}_f^2 \pm 2F_0 x_f \quad (10)$$



شکل ۱. خانواده سهمی‌های بهینه در صفحه فاز

و هنگامی که f برابر $+F_0$ یا $-F_0$ باشد، سهمی صفحه فاز به c (که به شرایط اولیه $x(0)$ و $\dot{x}(0)$ بستگی دارد. تنها سهمی‌های A و B از مبدا می‌گذرند که از آن دو تنها بخش‌های AO و BO با قیدهای نهایی سازگارند. پس همواره بخشی از آنها مسیر بهینه را مشخص می‌کند. این دو خم بر روی هم خم راه گزین (۱۱) یا AOB در شکل ۲ را می‌سازند:

$$x_1(t) = -\frac{1}{2} x_2(t) |x_2(t)| \quad (11)$$

به این شیوه می‌توان معادله پیوسته $x=x(t)$ را پاره‌سازی کرده و از کامپیوتر در حل آن بهره گرفت. جای گذاری x و \dot{x} از (۱۵) و (۱۶) در معادله حرکت، ارتباط f_i را با زمان t_i و t_{i-1} و موقعیتهای x_{i-1} و x_{i+1} و x_i برقرار می‌سازد.

اگر مسیر حرکت مشخص بوده و آن را به n تکه برابر یا نابرابر تقسیم کنیم، $n+1$ نقطه و n بازه به دست می‌آید که موقعیتهای $x_i (i=1, \dots, n)$ مشخص و معلومند. هدف یافتن n مجهول t_i است به گونه‌ای که هیچ یک از $n+1$ عدد f_i ها بزرگتر از F_0 نباشند.

اگر معادله نیوتن را

$$f = mx \quad (17)$$

برای تک تک نقطه‌ها بنویسیم، $n+1$ معادله به صورت

$$\frac{4m}{t_i^2 + t_{i-1}^2} \left(\frac{t_{i-1}}{t_i + t_{i-1}} x_{i+1} - \frac{t_i}{t_i + t_{i-1}} x_{i-1} - x_i \right) = f_i \quad (18) \quad (i=1, \dots, n+1)$$

به دست می‌آید. نقطه ۱ و $n+1$ ، آغاز و پایان حرکت را بیان می‌کنند که حالت مکانیکی در آنها مشخص است. چون موقعیتهای x_i در تمام نقاط میانی و انتهایی دانسته است پس تنها باید سرعت x در ابتدا و انتهای حرکت معلوم باشند تا حالت مکانیکی در دو انتها بیان شده باشد. بنا به خواست ما سرعت m در ابتدا و انتهای حرکت صفر است. این فرض لزوماً محدود کننده نیست.

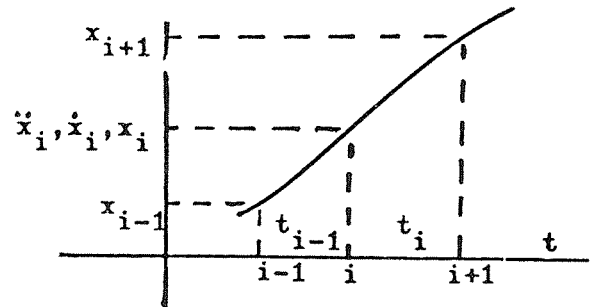
$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad n-1 \quad n \quad n+1 \quad n+2 \quad x$$

شکل ۴ - مسیر حرکت یک بعدی ذره

چنانکه در روش C.D دیده می‌شود، سرعت و شتاب در هر نقطه با موقعیتهای قبل و بعد آن نقطه وابسته است. بنابراین در آغاز حرکت یعنی نقطه 1 به نقطه مجازی x_0 و زمان مجازی t_0 نیاز دارد (شکل ۵). به همین ترتیب، در پایان حرکت نیز نقطه و بازه

اگر x تابعی از زمان t بوده و نمای آن در بخشی از محور t چنان باشد که در شکل ۳ نشان داده شده است.

با سود گرفتن از روش I.F.D یا C.D 2، محور t را به بازه‌هایی تقسیم می‌کنیم. اگر بسط تیلور x را در نقطه $i+1$ و $i-1$ بر حسب نقطه i و زمانهای t_i و t_{i-1} به گونه‌ای بنویسیم بیانگر زمان لازم برای رسیدن از نقطه i به $i+1$ باشد [۷ و ۸].



شکل ۳ - پاره‌سازی تابع پیوسته

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i t_i + \ddot{x}_i t_i^2 / 2 + \dots \quad (12)$$

$$x_{i-1} = x_i - \dot{x}_i t_i + \ddot{x}_i t_{i-1}^2 / 2 - \dots \quad (13)$$

در این صورت با در نظر گرفتن دو جمله از این سریها و کاستن آنها

$$x_{i+1} - x_{i-1} = x_i + \dot{x}_i t_i - x_i + \dot{x}_i t_{i-1} \quad (14)$$

سرعت \dot{x} را در نقطه i می‌یابیم

$$\dot{x}_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{t_i + t_{i-1}} \quad (15)$$

و با در نظر گیری سه جمله از سریهای (۱) و (۲) و افزودن آنها شتاب x در نقطه i به دست می‌آید

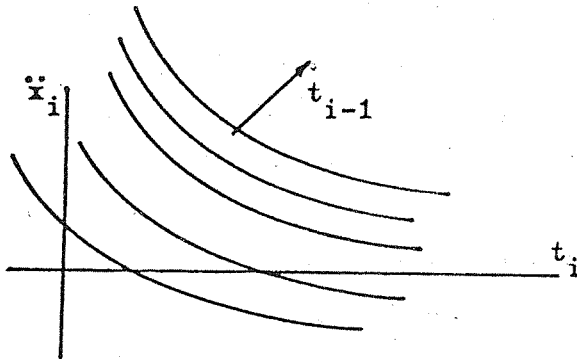
$$\ddot{x}_i = \frac{4}{t_i^2 + t_{i-1}^2} \left(\frac{t_{i-1}}{t_i + t_{i-1}} x_{i+1} + \frac{t_i}{t_i + t_{i-1}} x_{i-1} - x_i \right) \quad (16)$$

می‌توانیم این روش را برای یافتن مشتقهای مراتب بالاتر نیز ادامه دهیم اما چون معادله حرکت نیوتن معادله‌ای از مرتبه دو است، تنها یافتن x و \dot{x} کافی است.

چنانکه از معادله شتاب دیده می شود، مقدار نیرو در هر نقطه به زمان قبل و بعد آن نقطه وابسته است و بنابراین هر بازه زمانی نیز بر دو نیروی آغاز و پایان آن بازه زمانی اثر می گذارد. برای توجه به این اثر، رابطه شتاب نقطه i را چنین نوشته

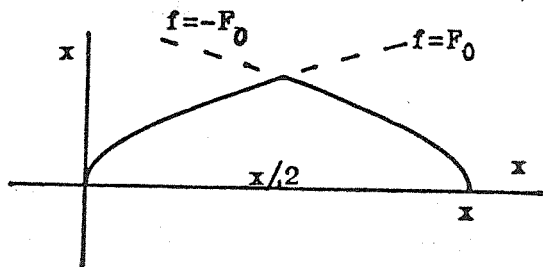
$$\ddot{x}_i = 4 \frac{t_{i-1}(x_{i+1}-x_i) - t_i(x_i-x_{i-1})}{(t_i+t_{i-1})^3} \quad (16)$$

و آن را رسم می کنیم (شکل ۶).



شکل ۶ - نمودار شتاب در نقطه i بر حسب t_i و t_{i+1}

افزایش t_i موجب کاهش \ddot{x}_i و افزایش t_{i-1} باعث افزایش \ddot{x}_i می گردد، بنابراین افزایش t_i موجب کاهش نیروی f_i و افزایش نیروی f_{i+1} خواهد شد. همین ویژگی است که راهگشای ایده بهینه سازی گردیده و کلید اصلی استفاده از این الگوریتم است. اگر جسم m بخواد در کمترین زمان از $x(0)=x(T)=0$ به $x(T)=x_f$ و $x(T)=0$ برود، باید در صفحه فاز از مبدأ تا میانه راه بر سهمی $f=F_0$ و سپس بر سهمی $f=-F_0$ حرکت نماید؛ (شکل ۷).



شکل ۷ - مسأله اساسی کنترل بنگ بنگ در صفحه فاز

$$\begin{array}{ccccccc} x_0 & & t_0 & & x_1 & & t_1 & & x_2 \\ 0 & & & & 1 & & & & 2 \end{array}$$

شکل ۵ - آغاز حرکت و نقطه مجازی

مجازی x_{n+2} و t_{n+1} مورد نیاز است. صفر انگاشتن \dot{x}_1 در نقطه ۱، آغاز حرکت

$$\dot{x}_1 = (x_2 - x_1) / (t_1 + t_2) = 0 \quad (19)$$

به این نتیجه می انجامد که،

$$x_2 = x_1(0) \quad (20)$$

چون باید حرکت از x_1 به x_2 (و در نتیجه از x_0 به x_1) در کمترین زمان صورت گیرد، سپس

$$t_0 = t_1 \quad (21)$$

همین بحث برای نقطه پایانی حرکت نیز وجود دارد و چنین نتیجه می شود که

$$x_{n+2} = x_n \quad (22)$$

$$t_{n+1} = t_n \quad (23)$$

اینک n مجهول $t_i (i=1, 1, \dots, n)$ و نیروی ناشناخته $f_i (i=1, 1, \dots, n+1)$ برای $n+1$ نقطه شناخته شده $x_i (i=1, \dots, n+1)$ با $n+1$ معادله حرکت به یکدیگر مربوط می شوند.

$$f_1 = 2n(x_2 - x_1) / t_1^2 \quad (24)$$

برای نقطه آغازین ۱

برای نقطه های میانی

$$f_i = \frac{4m}{t_i^2 + t_{i-1}^2} \left(\frac{t_{i-1}}{t_i + t_{i-1}} x_{i+1} + \frac{t_i}{t_i + t_{i-1}} x_{i-1} - x_i \right) \quad (25)$$

$$x_{i-1} - x_i$$

(۲۶) برای نقطه پایانی $n+1$

$$f_{n+1} = 2m(x_n - x_{n+1}) / t_n^2$$

چنانکه دیده می شود، برای موقعیتهای $x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}$ نیروی $f_1 > 0$ و $f_{n+1} < 0$ خواهند بود که این امر، مثبت بودن شتاب در آغاز و منفی بودن آن را در پایان حرکت نشان می دهد.

(۲۹)

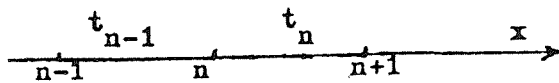
$$f_{n-1} = \frac{4m}{t_{n-1}^2 + t_{n-2}^2} \left(\frac{t_{n-2}}{t_{n-1} + t_{n-2}} x_n + \frac{t_{n-1}}{t_{n-1} + t_{n-2}} x_{n-2} - x_{n-1} \right)$$

است که کمینه t_{n-1} از آن به دست می‌آید. اینک به نقطه n ام یا یکی مانده به آخرین نقطه حرکت می‌رسیم. معادله حرکت در نقطه n

(۳۰)

$$f_n = \frac{4m}{t_{n-1}^2 + t_n^2} \left(\frac{t_{n-1}}{t_n + t_{n-1}} x_n + \frac{t_n}{t_n + t_{n-1}} x_{n-1} - x_n \right)$$

است که اگر به همان شیوه پیش می‌رفتیم، می‌باید کمینه t_n را از آن، بیابیم اما t_n پیش از این برای فراگیری شرط ایستادن در نقطه آخر به دست آمده است. پس در معادله (۳۰)، t_{n-1} و t_n به دست آمده‌اند و هیچ زمان ناشناخته دیگری وجود ندارد. بناچار نیروی f_n در نقطه n ام (یکی مانده به آخرین نقطه) مقید بوده و مقدار ویژه‌ای خواهد داشت که از معادله حرکت نقطه n به دست می‌آید.



شکل ۸- موقعیت در سه نقطه پایانی

اینک اگر $f_n > F_0$ ، چگونه باید آن را کاهش داد؟ با نگاهی به محور x در پایان راه، دیده می‌شود که t_n در بند f_{n+1} بوده و کمترین مقدار خود را داراست. اگر t_n را بیفزاییم f_n و f_{n+1} هر دو کاهش می‌یابند و این موجب می‌گردد که در آخرین نقطه، $f_{n+1} < -F_0$ گردد. پس باید t_{n-1} را به عنوان تنها راه چاره، بیفزاییم تا f_n کوچکتر شده و از قید F_0 پایینتر آید. از اینجا مرحله بازگشت آغاز می‌شود. معادله حرکت را برای نقطه n نوشته

(۳۱)

$$f_n = \frac{4m}{t_n^2 + t_{n-1}^2} \left(\frac{t_{n-1}}{t_n + t_{n-1}} x_{n+1} + \frac{t_n}{t_n + t_{n-1}} x_{n-1} - x_n \right)$$

اگر جز در میانه راه بر سهمی $f = -F_0$ تغییر مسیر ندهیم به نقطه نهایی مطلوب نخواهیم رسید و چنانچه قبل یا بعد از نقطه میانی سویچ کنیم برای رسیدن به حالت نهایی مطلوب باید بر سهمی $f < -F_0$ یا $f > -F_0$ حرکت کنیم. چنانکه دیده می‌شود نقطه تغییر مسیر یا نقطه سویچ کردن بسیار مهم است. یافتن نقطه یا نقاط راه‌گزین در سیستمهای چند درجه آزادی به طریق تحلیلی امکان ندارد و وجود هر نوع قیدی باعث جابجایی آن می‌گردد.

۴) الگوریتم بهینه‌سازی

از معادله حرکت نقطه ۱ می‌توان t_1 را به گونه‌ای یافت که $f_1 = F_0$ می‌گردد. با توجه به نحوه ارتباط t_1 و f_1 در معادله حرکت نقطه ۱ روشن می‌شود که کاهش t_1 ، افزایش f_1 را به همراه دارد، پس کمترین مقدار t_1 همان است که f_1 را تا F_0 افزایش می‌دهد.

در نقطه پایانی $n+1$ نیز می‌توان t_n را همانند t_1 به گونه‌ای یافت که $f_{n+1} = -F_0$ گردد. بنابراین آشکارا نیروی f در ابتدا و انتهای حرکت F_0 و $-F_0$ بوده و t_1 و t_{n+1} نیز مقدار ویژه مربوطه را خواهند داشت. معادله حرکت برای نقطه ۲

(۲۷)

$$f_2 = \frac{4m}{t_2^2 + t_1^2} \left(\frac{t_1}{t_1 + t_2} x_3 + \frac{t_2}{t_1 + t_2} x_1 - x_2 \right)$$

است که در آن تنها t_1 و f_2 نامعلومند زیرا t_1 از معادله نقطه ۱ به دست آمده است.

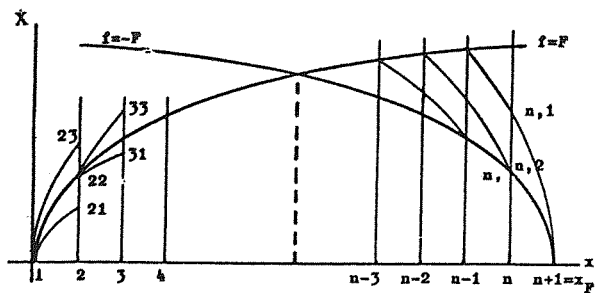
یک t_2 حدس زده و f_2 را می‌یابیم، اگر $f_2 > F_0$ پس زمان حدسی t_2 کوتاه بوده و باید آن را افزوده و دوباره f_2 را یافت. به این شیوه به یک t_2 که برای آن $f_2 = F_0$ می‌رسیم، که این مقدار کمترین مقدار برای t_2 خواهد بود.

معادله حرکت برای نقطه ۳

(۲۸)

$$f_3 = \frac{4m}{t_3^2 + t_2^2} \left(\frac{t_2}{t_2 + t_3} x_4 + \frac{t_3}{t_2 + t_3} x_2 - x_3 \right)$$

است که به همان روش t_3 را آنقدر می‌کاهیم تا هر کاهش دیگر آن، f_3 را از F_0 بگذرانند. پیگیری این روند به یافتن t_4 و t_5 و ... تا t_{n-2} می‌انجامد. معادله حرکت در نقطه $n-1$



شکل ۹- آگوریتم بهینه سازی در صفحه فاز

قبلاً دیدیم که در آغاز حرکت، علم به اینکه باید $f=F_0$ باشد زمان t_1 را مشخص نمود و همچنین دیدیم که مقدار نیرو در نقطه ۲ (یا موقعیت در صفحه فاز برای x_2) به دو زمان t_1 و t_2 بستگی دارد. اینک حدس زمان t_2 ما را به نقطه (x_2, x_2) در صفحه فاز می برد این حرکت بر روی یک سهمی خاص انجام می گیرد که مربوط به مقدار نیرو در نقطه ۲ می باشد، چنانچه زمان t_2 آنقدر زیاد باشد که $f_2 < F_0$ در این صورت در نقطه ۲۱ خواهیم بود، کاهش زمان t_2 باعث بالا رفتن نقطه ۲۱ به سمت نقطه ۲۲ روی خط قائم می گردد زیرا چنانکه می دانیم شیب منحنی صفحه فاز با عکس زمان متناسب است زیرا

$$\frac{dx/dt}{dx} = \frac{1}{dt} \quad (34)$$

این امر از معادله (۳۲) نیز نمایان است. اگر زمان t_2 آنقدر کوتاه باشد که $f_2 > F_0$ در این صورت در نقطه ۲۳ خواهیم بود که افزایش t_2 باعث می شود تا نقطه ۲۳ روی خط قائم به سمت نقطه ۲۲ حرکت کنند. نقطه ۲۲ جایی است که در آن $f_1 = f_2 = F_0$ و حرکت از نقطه ۱ به ۲۲ بر سهمی $f=F_0$ انجام گرفته است. اینک بار دیگر این عمل، برای رفتن از نقطه ۲۲ به نقطه ۳۲ انجام می گیرد.

این روند تا رسیدن به نقطه $(n-1)$ انجام می گیرد. تا اینجا حرکت بر سهمی $x^2 = 2F_0x$ یا سهمی مربوط $f=+F_0$ انجام گرفته است. برای آنکه حرکت بر سهمی $f=+F_0$ ادامه یابد و به نقطه n بر آن برویم باید زمان t_n را بهینه سازیم، اما این زمان از صفر بودن سرعت در x_F قبلاً به دست آمده است. پس حرکت از نقطه

t_{n-1} یا زمان پیش از نقطه n را آنقدر می افزایشیم تا $f_n = -F_0$ گردد. در حال برگشت دیگر زمان ناشناخته ای وجود ندارد، بلکه تنها مقدار آنها کمتر از توانایی ما در وارد کردن نیرو است. اینک به نقطه $n-1$ نگاه می کنیم. معادله حرکت نقطه $n-1$ نیز دو زمان t_{n-1} و t_{n-2} را دربر دارد که t_{n-2} در روند اول به دست آمده و t_{n-1} نیز هم اینک در روند بازگشت، برای پایین کشیدن f_n از F_0 در (۳۱)، به دست آمد. پس f_{n-1} نیز مقید بوده و مقدار ویژه ای خواهد داشت. اگر $f_{n-1} > F_0$ بار دیگر باید t_{n-2} را تا آنجا افزود که $f_{n-1} = +F_0$ گردد. همین روند برای، نقطه های $n-2$ و $n-3$... پی گرفته می شود تا آنجا که در نقطه ای چون z که زمان t_z و t_{z-1} آن یکی در روند اول و دیگری در روند برگشت پیدا شده اند، نیروی f_z کوچکتر از F_0 باشد، اینجاست که حل بهینه پایان می یابد، زیرا اینک برای $n+1$ نقطه حرکت، $n+1$ نیرو و n زمان در اختیار داریم که کاهش هر یک از زمانهای $t_i (i=1, \dots, n)$ یکی از نیروهای $f_i (i=1, 2, \dots, n+1)$ را از F_0 می گذراند.

(۵) آگوریتم گفته شده در صفحه فاز

می دانیم که پاسخ تحلیلی این مسأله حرکت بر سهمی $x^2 = 2F_0x$ از مبدا تا میانه راه و سپس حرکت بر سهمی $x^2 = -2F_0x + 2F_0x_f$ تا پایان راه می باشد.

شکل ۹ سهمیهای بهینه صفحه فاز را نشان داده است. مبدا، نقطه آغاز حرکت و x_F نقطه پایان آن است. محور افقی x بین مبدا و x_F به n بازه به اندازه دلخواه تقسیم شده و موقعیتهای $x_i (i=1, \dots, n+1)$ در تمام نقاط مشخص است. زمان لازم برای رفتن از یک نقطه مانند x_i به نقطه بعدی x_{i+1} ، زمان t_i را لازم دارد، اگرچه در صفحه فاز، زمان را نمی توان به صورت صریح دید اما با توجه به اینکه

$$\dot{x}_{av} = \Delta x / \Delta t \quad \Delta t = \Delta x / \dot{x}_{av} \quad (32)$$

می توان در کی از زمان به دست آورد. این امر بویژه در روش معادلات پاره شده بخوبی پیداست زیرا با توجه به (۳۰)، زمان t_i برابر است با

$$t_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{\frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i)} \quad (33)$$

$(n-1, F_0)$ به نقطه آخر x_F یا $(n+1, -F_0)$ بر سهمی یکتای گذرنده از آن دو نقطه انجام خواهد گرفت.

در صفحه فاز هر سهمی تنها با دو نقطه مشخص می شود زیرا تمام سهمیهای بهینه در صفحه فاز، محور x (یعنی $x=0$) را با زاویه قائمه قطع می کنند، زیرا

$$\bar{x} = \dot{x} \quad d\bar{x}/dx = f \quad d\dot{x}/dx = f/\dot{x} \quad (35)$$

و این شرط همواره یکی از پارامترهای سهمی را مشخص می کند. هر سهمی در صفحه فاز با معادله

$$a \dot{x}^2 + b \dot{x} + c = x \quad (36)$$

مشخص می شود که شرط عمود بودن بر محور x یا

$$(37)$$

$$\frac{dx}{dt} \Big|_{\dot{x}=0} = 0$$

نتیجه می دهد که

$$2a\dot{x} + b \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow b=0 \quad (38)$$

و بنابراین تنها دو شرط (یا دو نقطه) برای مشخص شدن سهمی کافی است.

چون رأس سهمی اخیر در جهت مثبت x هاست پس نیروی مربوط به آن منفی (و بیشتر از F_0) است و موقعیت مربوط به نقطه n (نقطه $1, n$) بر آن قرار دارد درحالی که می دانیم باید در نقطه $n, 2$ قرار داشته باشد، پایین کشیدن نقطه $n, 1$ به سمت $n, 2$ چاره ای ندارد جز آنکه زمان مربوط به نیروی نقطه n را بیفزاییم. نیروی نقطه n به دو زمان t_n و t_{n-1} بستگی دارد. افزایش t_n اگرچه نیروی f_n را می کاهشد اما نیروی x_F را نیز پایین می آورد، درحالی که این نیرو قبلاً به طور دقیق $f_{n+1} = -F_0$ محاسبه شده بود. پس تنها راه باقی مانده، افزایش t_{n-1} است. افزایش t_{n-1} تا جایی صورت می گیرد که $f_n = -F_0$ گردد در این صورت بطور تقریبی به نقطه $n, 2$ رسیده ایم و در این صورت حرکت از $n, 2$ به نقطه پایانی بر سهمی $f = -F_0$ انجام خواهد گرفت. اینک زمانهای مربوط به نیروی f_{n-1} تغییر کرده اند و

دیگر در نقطه $n-1$ بر سهمی $f = +F_0$ قرار نداریم زیرا زمان t_{n-1} که بر f_{n-1} اثر می گذارد بالا رفته است پس نیروی f_{n-1} نیز کمتر از F_0 گردیده است، اما نیروی f_{n-2} هنوز تغییر نکرده و در $n-2$ بر سهمی $f = +F_0$ قرار داریم. در نقطه n نیز بر سهمی $f = -F_0$ قرار گرفته ایم بنابراین رسیدن از $n-2$ بر $+F_0$ به n بر $-F_0$ بر سهمی گذرانده از آن دو انجام می گیرد که این سهمی، نیرو و موقعیت صفحه فاز را در $n-1$ مشخص می کند. این نیرو نیز بیش از $|F_0|$ است و برای پایین آوردن آن باید تنها زمان ممکن، یعنی t_{n-2} را بیفزاییم. با این کار در نقطه $n-1$ به سهمی $f = -F_0$ می رسمیم و بار دیگر نیروی f_{n-2} را می یابیم و آن را می کاهشیم. این روند بازگشت همچنان ادامه دارد تا آنکه در نقطه ای (که در این مسأله اساسی نقطه میانی یا همسایگی نزدیک آن است) با نیروی مشخص در نقاط جلو و عقب به نیرویی با $f \leq |F_0|$ برسیم در این صورت کنترل بهینه پایان یافته است زیرا از ابتدا تا پایان حرکت همواره نیرو بر F_0 یا $-F_0$ بوده (کنترل بنگ بنگ) و کاهش هر یک از زمانها باعث می شود که نیروی پس یا پیش آن از $|F_0|$ تجاوز نماید.

گفته های بالا را برای یک مسأله نمونه با $m=1$ و نقطه آغاز $x_1=0$ و نقطه آخر $x_F=4$ با $F_{Max}=5$ می آزماییم. x_1 تا x_F را به $n=50$ بازه تقسیم کرده ایم.

در جدول ۲ پایان روند اول را می بینید. چنانکه دیده می شود نیرو از نقطه اول تا نقطه ۴۹ روی بیشینه خود ($F_M=5$) قرار دارد نیرو در نقطه پایانی $-F_M$ و در نقطه یکی مانده به آخر -8 است که مقدار آن بیشتر از $|F_M|$ است. برای پایین آوردن f_{49} که پس از یافتن t_{49} از $|F_M|$ می گذرد باید زمان t_{49} را بیفزاییم. در پایان روند بازگشت، جدول ۳ پدید می آید که پاسخ مسأله است. چنانکه دیده می شود، نیرو تا نقطه میانی ۲۶ روی بیشینه و از آن به بعد تا پایان راه روی کمینه خود قرار گرفته است.

در قسمت سوم نشان خواهیم داد که چگونه الگوریتم گفته شده در کنترل بهینه یک ریات بکار رفته و نتایج مطلوب به بار می آورد.

پاورقی ها:

1. Finite Defference
2. Central Defference

جدول ۲- پاسخ مسأله اساسی کنترل بنگ بنگ قبل از روند بازگشت $F_M = 5$

Node 1	f 1 = 5.049866	Time For X 1 To X 2 = .178
Node 2	f 2 = 4.973891	Time For X 2 To X 3 = 5.360001E-02
Node 3	f 3 = 4.957147	Time For X 3 To X 4 = 4.592001E-02
Node 4	f 4 = 5.007057	Time For X 4 To X 5 = 4.080001E-02
Node 5	f 5 = 4.967199	Time For X 5 To X 6 = 3.712001E-02
Node 6	f 6 = 4.969928	Time For X 6 To X 7 = 3.428801E-02
Node 7	f 7 = 4.982573	Time For X 7 To X 8 = 3.201601E-02
Node 8	f 8 = 4.983807	Time For X 8 To X 9 = 3.014401E-02
Node 9	f 9 = 4.952863	Time For X 9 To X 10 = 2.857601E-02
Node 10	f 10 = 5.008891	Time For X 10 To X 11 = 2.721601E-02
Node 11	f 11 = 5.016388	Time For X 11 To X 12 = 2.603201E-02
Node 12	f 12 = 5.008699	Time For X 12 To X 13 = 2.499201E-02
Node 13	f 13 = 5.029132	Time For X 13 To X 14 = 2.406401E-02
Node 14	f 14 = 5.031329	Time For X 14 To X 15 = 2.323201E-02
Node 15	f 15 = 5.037221	Time For X 15 To X 16 = .02248
Node 16	f 16 = 4.974023	Time For X 16 To X 17 = .0218048
Node 17	f 17 = 5.027021	Time For X 17 To X 18 = .0211808
Node 18	f 18 = 4.96444	Time For X 18 To X 19 = .0206144
Node 19	f 19 = 5.010602	Time For X 19 To X 20 = .0200864
Node 20	f 20 = 4.979519	Time For X 20 To X 21 = .0196
Node 21	f 21 = 4.962472	Time For X 21 To X 22 = .0191488
Node 22	f 22 = 4.97407	Time For X 22 To X 23 = .0187264
Node 23	f 23 = 5.032059	Time For X 23 To X 24 = .0183264
Node 24	f 24 = 4.973768	Time For X 24 To X 25 = .0179552
Node 25	f 25 = 5.009244	Time For X 25 To X 26 = .0176032
Node 26	f 26 = 4.971026	Time For X 26 To X 27 = 1.727359E-02
Node 27	f 27 = 5.000938	Time For X 27 To X 28 = 1.695999E-02
Node 28	f 28 = 4.955746	Time For X 28 To X 29 = 1.666559E-02
Node 29	f 29 = 4.992073	Time For X 29 To X 30 = 1.638399E-02
Node 30	f 30 = 4.952185	Time For X 30 To X 31 = 1.611839E-02
Node 31	f 31 = 5.006899	Time For X 31 To X 32 = 1.586238E-02
Node 32	f 32 = 4.988001	Time For X 32 To X 33 = 1.561918E-02
Node 33	f 33 = 5.015632	Time For X 33 To X 34 = 1.539558E-02
Node 34	f 34 = 5.028057	Time For X 34 To X 35 = 1.516158E-02
Node 35	f 35 = 4.951506	Time For X 35 To X 36 = 1.495038E-02
Node 36	f 36 = 5.009027	Time For X 36 To X 37 = 1.474558E-02
Node 37	f 37 = 4.964536	Time For X 37 To X 38 = 1.455038E-02
Node 38	f 38 = 4.999184	Time For X 38 To X 39 = 1.436158E-02
Node 39	f 39 = 5.020032	Time For X 39 To X 40 = 1.417917E-02
Node 40	f 40 = 5.030868	Time For X 40 To X 41 = 1.400317E-02
Node 41	f 41 = 5.031043	Time For X 41 To X 42 = 1.383357E-02
Node 42	f 42 = 5.019912	Time For X 42 To X 43 = 1.367037E-02
Node 43	f 43 = 4.996848	Time For X 43 To X 44 = 1.351357E-02
Node 44	f 44 = 4.955958	Time For X 44 To X 45 = 1.336317E-02
Node 45	f 45 = 5.016268	Time For X 45 To X 46 = 1.321597E-02
Node 46	f 46 = 4.955704	Time For X 46 To X 47 = 1.307517E-02
Node 47	f 47 = 5.000341	Time For X 47 To X 48 = 1.293757E-02
Node 48	f 48 = 5.043251	Time For X 48 To X 49 = 1.280317E-02
Node 49	f 49 = 4.953758	Time For X 49 To X 50 = 1.267516E-02
Node 50	f 50 = -8.712831	Time For X 50 To X 51 = .178
Node 51	f 51 = -5.049862	Total Time = 1.352835

جدول ۳- پاسخ مسأله اساسی کنترل بنگ بنگ بعد از روند بازگشت $F_M = 5$

Node 1	f 1 = 5.049866	Time For X 1 To X 2 = .178
Node 2	f 2 = 4.973891	Time For X 2 To X 3 = 5.360001E-02
Node 3	f 3 = 4.957147	Time For X 3 To X 4 = 4.592001E-02
Node 4	f 4 = 5.007057	Time For X 4 To X 5 = 4.080001E-02
Node 5	f 5 = 4.967199	Time For X 5 To X 6 = 3.712001E-02
Node 6	f 6 = 4.969928	Time For X 6 To X 7 = 3.428801E-02
Node 7	f 7 = 4.982573	Time For X 7 To X 8 = 3.201601E-02
Node 8	f 8 = 4.983807	Time For X 8 To X 9 = 3.014401E-02
Node 9	f 9 = 4.952863	Time For X 9 To X 10 = 2.857601E-02
Node 10	f 10 = 5.008891	Time For X 10 To X 11 = 2.721601E-02
Node 11	f 11 = 5.016388	Time For X 11 To X 12 = 2.603201E-02
Node 12	f 12 = 5.008699	Time For X 12 To X 13 = 2.499201E-02
Node 13	f 13 = 5.029132	Time For X 13 To X 14 = 2.406401E-02
Node 14	f 14 = 5.031329	Time For X 14 To X 15 = 2.323201E-02
Node 15	f 15 = 5.037221	Time For X 15 To X 16 = .02248
Node 16	f 16 = 4.974023	Time For X 16 To X 17 = .0218048
Node 17	f 17 = 5.027021	Time For X 17 To X 18 = .0211808
Node 18	f 18 = 4.96444	Time For X 18 To X 19 = .0206144
Node 19	f 19 = 5.010602	Time For X 19 To X 20 = .0200864
Node 20	f 20 = 4.979519	Time For X 20 To X 21 = .0196
Node 21	f 21 = 4.962472	Time For X 21 To X 22 = .0191488
Node 22	f 22 = 4.97407	Time For X 22 To X 23 = .0187264
Node 23	f 23 = 5.032059	Time For X 23 To X 24 = .0183264
Node 24	f 24 = 4.973768	Time For X 24 To X 25 = .0179552
Node 25	f 25 = 5.009244	Time For X 25 To X 26 = .0176032
Node 26	f 26 = .7306861	Time For X 26 To X 27 = 1.755359E-02
Node 27	f 27 = -4.976711	Time For X 27 To X 28 = 1.789999E-02
Node 28	f 28 = -4.998797	Time For X 28 To X 29 = 1.826959E-02
Node 29	f 29 = -5.009391	Time For X 29 To X 30 = 1.866398E-02
Node 30	f 30 = -4.976638	Time For X 30 To X 31 = 1.908238E-02
Node 31	f 31 = -5.023319	Time For X 31 To X 32 = 1.953437E-02
Node 32	f 32 = -5.013635	Time For X 32 To X 33 = 2.001918E-02
Node 33	f 33 = -5.046007	Time For X 33 To X 34 = 2.054557E-02
Node 34	f 34 = -4.958733	Time For X 34 To X 35 = 2.110557E-02
Node 35	f 35 = -5.023574	Time For X 35 To X 36 = 2.172236E-02
Node 36	f 36 = -4.972436	Time For X 36 To X 37 = 2.238956E-02
Node 37	f 37 = -5.025558	Time For X 37 To X 38 = 2.313036E-02
Node 38	f 38 = -4.975716	Time For X 38 To X 39 = 2.394156E-02
Node 39	f 39 = -5.050287	Time For X 39 To X 40 = 2.485915E-02
Node 40	f 40 = -5.013786	Time For X 40 To X 41 = 2.588315E-02
Node 41	f 41 = -4.967344	Time For X 41 To X 42 = 2.703355E-02
Node 42	f 42 = -5.027675	Time For X 42 To X 43 = 2.837035E-02
Node 43	f 43 = -5.043969	Time For X 43 To X 44 = 2.993354E-02
Node 44	f 44 = -5.032069	Time For X 44 To X 45 = 3.178315E-02
Node 45	f 45 = -5.01027	Time For X 45 To X 46 = 3.401598E-02
Node 46	f 46 = -4.970346	Time For X 46 To X 47 = 3.677523E-02
Node 47	f 47 = -4.961142	Time For X 47 To X 48 = 4.033769E-02
Node 48	f 48 = -5.042427	Time For X 48 To X 49 = 4.530337E-02
Node 49	f 49 = -4.987767	Time For X 49 To X 50 = .0526755
Node 50	f 50 = -5.045336	Time For X 50 To X 51 = .178
Node 51	f 51 = -5.049862	Total Time = 1.642355

- 1- Kirk, O.E., "Optimal Control Theory: An Introduction", Printice-Hall, 1970
- 2- Lewis, F.L., "Optimal Control", John Willey, 1986.
- 3- Leitmann, G., "The Calculus of Variations and Optimal Control", Plenum Press, 1981.
- 4- Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V. and, Mishchenko, E.F., "The Mathematical Theory of Optimal Processes", Wiley-Interscience, 1962.
- 5- Ogata, K., "Modern Control Engineering", Printice Hall, PP. 774, 1970.
- 6- Utkin, V., "Variable Structure Systems with Sliding Modes", IEEE Trans. of Automat. Contr. Vol. Ac-22, No.2, April 1977.
- 7- Rao, S.S., "Mechanical Vibration", Addison Wesley Co. 1986.
- 8- Sandor, G.N., Erdman, A.G., "Advanced Mechanism Design: Analysis and Synthesis", Vol.2, Printice Hall, 1984

بسمه تعالی
 دانشگاه صنعتی امیرکبیر
 (واحد تفرش)

آگهی تاسیس پارک صنعتی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر واحد تفرش در نظر دارد تجربه موفق دانشگاههای پیشرو در سطح جهان مبنی بر تاسیس پارکهای صنعتی در جوار دانشگاه را به منظور آشنایی و همکاری هرچه بیشتر صنعت و دانشگاه با توان بالفعل و بالقوه یکدیگر به انجام رساند و در این راستا فضا و امکانات پژوهشی خود را در اختیار صاحبان صنایع که علاقه مند به تحقیقات در محیط دانشگاه هستند، قرار می دهد. لذا از علاقه مندان دعوت می شود فرم ذیل را تکمیل و به آدرس دفتر مرکزی دانشگاه ارسال نمایند. جهت کسب هرگونه اطلاع می توان همه روزه در ساعات ۱۰-۱۲ با شماره تلفن ۵۸۸۱۱۴ تماس حاصل نمود. آدرس دفتر مرکزی: تهران - خ حافظ - دانشگاه صنعتی امیرکبیر - دفتر مرکزی تفرش

وابسته به
 نام و سمت مسئول پیگیری
 زمینه های تحقیقاتی مورد نظر

نام مجتمع صنعتی
 نام مدیر عامل
 زمینه های تولید مجتمع
 فضای مورد نظر
 تجهیزات مورد نیاز