تحلیل سینماتیکی مکانیزمهای شناور بدون استفاده از نقطه کمکی

حسن ظهور

دانشیار دانشکده مهندسی مکانیك دانشگاه صنعتی شریف

مجید آل یاسین

مربی بخش مهندسی مکانیك دانشگاه فردوسی (مشهد) و
دانشجوی دوره دکترای مهندسی مکانیك، دانشگاه صنعتی شریف

چکیده:

مکانیزمهای شناور از مدتها قبل با استفاده از نقطه کمکی مورد تجزیه و تحلیل سینماتیکی قرار می‌گرفته است. دراین مقاله تجزیه و تحلیل سینماتیکی این مکانیزمها با روش نوین بدون استفاده از نقطه کمکی مورد بحث قرار می‌گیرد. سرعت و شتاب کلیه نقاط مورد نیاز در مکانیزم نمونه با استفاده از این روش تعیین خواهد شد.

Kinematic Analysis of Floating Linkages Without Using Auxiliary Points

H. Zohoor

Associate Professor of Mechanical Engineering,
Sharif University of Technology

M. Aleyaasin

PH.D. Student of Mechanical Engineering,
Sharif University of Technology

Abstract

Since many years ago, floating linkages have been kinematically analyzed by using auxiliary points. In this original manuscript, an innovative method has been used to kinematically analyze these types of mechanisms without using an auxiliary point. At the end of the manuscript, velocities and accelerations of all joints of two sample linkages have been obtained, through this method.

۱) مقدمه:

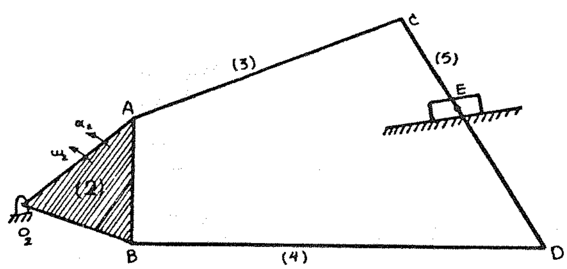
مکانیزمهای شناور از آن دسته مکانیزمهای با یك درجه آزادی هستند که بدست آوردن سرعت و شتاب اعضاء خروجی آنها با نوشتن یك رابطه بر حسب سرعت و شتاب اعضاء ورودی به راحتی میسر نیست و هر نوع رابطه بُرداری که بین لولا و یا لولاهای ورودی و لولا یا لولاهای خروجی نوشته شود دارای بیش از دو مجهول است و در نتیجه آن رابطه

قابل حل نیست. اگر به کتب موجود [۳] و [۲] و [۱] مراجعه شود، ملاحظه می‌گردد که تحلیل سینماتیکی این نوع مکانیزمها با استفاده از نقطه کمکی صورت گرفته است. نقطه کمکی یك نقطه متعلق به عضو شناور است که اگر روابط سرعت و شتاب در مورد آن نقطه نسبت به مقادیر داده شده ورودی نوشته شود، معادلات دو مجهولی حاصل می‌شود و لذا قابل حل می‌باشد. پیدا کردن این نقطه کمکی با توجه به شکل مکانیزم برای فردی که آشنایی چندانی با این مکانیزمها ندارد کار خیلی ساده‌ای نیست، لذا این متد نوین ارائه می‌گردد تا در صورتی که تحلیلگر ترجیح بدهد ازاین روش که نیازی به نقطه کمکی ندارد، برای تحلیل مکانیزم شناور استفاده نماید. استفاده از این روش نیاز به مقداری زمینه قبلی در هندسه مسطحه دارد که موارد لزوم در این مقاله شرح داده شده است.

۲) شرح کلی روش تحلیل سینماتیکی مکانیزمهای شناور

۲-۱ - دسته اول :

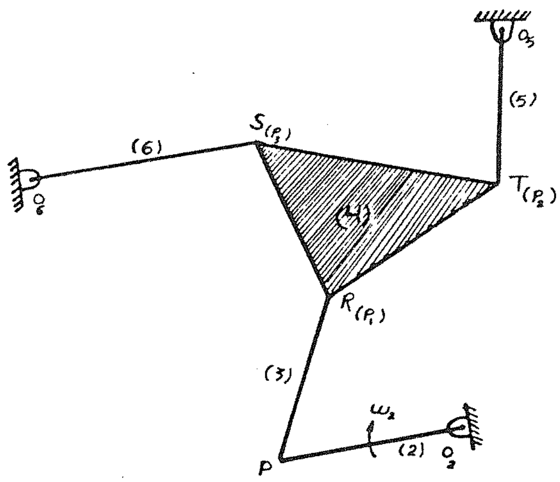
این دسته شامل مکانیزمهایی است که مکان‌هندسی انتهای دو بُردار سرعت مفصلهای ورودی به عضو شناور و همچنین راستای سرعت خروجی از عضو شناور مشخص است. یکی از این مکانیزمها درشکل ۱ نشان داده شده است. در این مکانیزم انتهای دو سرعت ورودی به عضو شناور مربوط به نقاط C و D بر روی خطوطی که به ترتیب بر AC و BD عمودند و از رئوس سرعتهای $\vec{V}_A$ و $\vec{V}_B$ ترسیم می‌شوند قرار دارند. و همچنین راستای سرعت خروجی از عضو شناور مربوط به نقطه E درامتداد حرکت لغزنده عضو ۶ قرار دارد. شایان ذکراست که راستای سرعتهای $\vec{V}_{CE}$ و $\vec{V}_{DE}$ نیز معلوم و عمود بر CD است.



شکل ۱

۲-۲ - دسته دوم:

این دسته شامل مکانیزمهایی است که راستاهای دو سرعت خروجی از عضو شناور و مکان هندسی انتهای بُردار سرعت نقطه ورودی به عضو شناور مشخص است. یکی از این نوع مکانیزمها در شکل ۲ نشان داده شده است. در این مکانیزم راستای سرعتهای نقاط خروجی S و T به ترتیب عمود بر خطوط O_6S و O_5T بوده و انتهای سرعت نقطه ورودی R بر روی خط عمود بر PR که از رأس سرعت $\vec{V}_P$ ترسیم می‌شود قرار دارد.



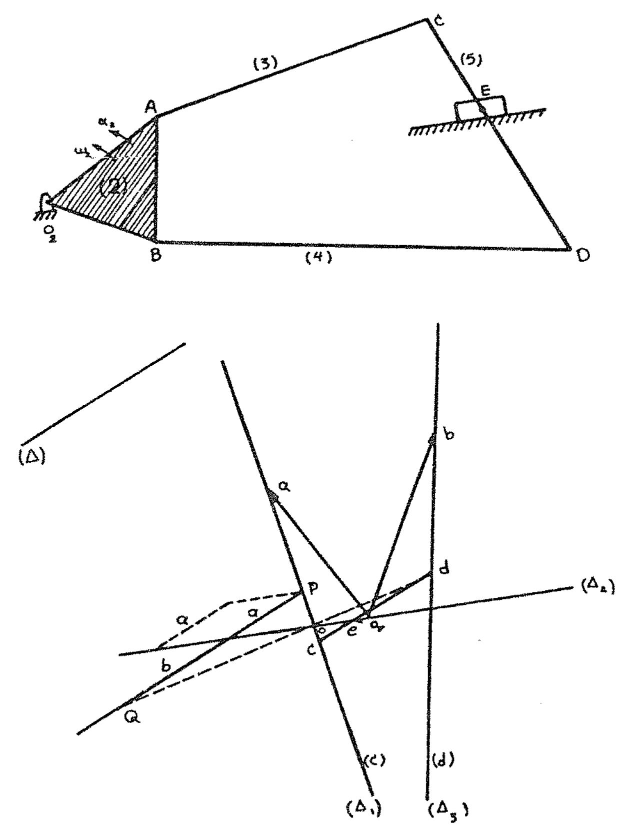
شکل ۲

۳) ترسیم نمودارهای سرعت و شتاب

۳-۱ - ترسیم نمودار سرعت مکانیزمهای دسته اول:

چهار راستای Δ_1، Δ_3، Δ و Δ_2 را که به ترتیب عمود بر خطوط AC، BD و CD و در راستای حرکت لغزنده هستند در اختیار داریم. با توجه به اینکه انتهای سرعتهای $\vec{V}_C$ و $\vec{V}_D$ باید بر روی Δ_1 و Δ_3 قرار داشته باشند، و ازطرفی Δ_2 نیز در امتداد حرکت لغزنده است، لازم است Δ درمحل تقاطع خود با سه امتداد Δ_1، Δ_3 و Δ_2 به نسبت EC قطع گردد، لذا باید خطی به موازات Δ چنان رسم کنیم که خطوط Δ_1، Δ_2 و Δ_3 را به نسبت CE/ED قطع نماید. حل هندسی این مسأله در ضمیمه شماره ۱ ارائه شده‌است. در مکانیزم شکل ۱ عضو CED شناور است و نقاط C، E و D محل لولاها هستند. برای نقطه C چون سرعت مطلق نقطه A مشخص است و سرعت نسبی $\vec{V}_{CA}$ دارای امتداد عمود بر CA می‌باشد، بنابراین Δ_1 مکان هندسی

انتهای بُردار سرعت نقطه C است. برای نقطه D، چون سرعت مطلق نقطه B معلوم است و امتداد سرعت نسبی $\vec{V}_{DB}$ نیز عمود بر DB می‌باشد، بنابراین D_3 مکان هندسی انتهای بُردار سرعت مطلق نقطه D است. در مورد نقطه E ، مکان هندسی بُردار سرعت مطلق نقطه E در امتداد حرکت پیستون خط Δ_2 است. پس می‌توان گفت: در هر مکانیزم شناورامتدادهای Δ_1 ، Δ_2 و Δ_3 مکان هندسی انتهای بُردار سرعت مطلق مفصلهای متصل به عضوهای دیگر می‌باشند و امتداد Δ نیز عمود بر عضو شناور است. در واقع Δ موازی امتداد سرعتهای نسبی مفصلهای روی عضو شناور (E،C و D) است. مطابق شکل ۳، در ترسیم و نمودار ابتدا Δ_1 ، Δ_3 و Δ_2 مشخص است. با عملیات هندسی روی نمودار، مطابق آنچه درضمیمه شماره ۱ آمده‌است، نقاط c و e و d بدست آمده‌اند ونسبت CE/ED=a/b درنظر گرفته شده است. با یافتن نقاط e،c و d مسأله، دیاگرام سرعت تکمیل شده است. همانطوری که ملاحظه می‌گردد، از نقطه کمکی در اینجا استفاده نشده و مسأله به روش مستقیم هندسی حل شده است . در شکل ۳ داریم :



شکل ۳

$$\vec{O_v b} + \vec{bd} = \vec{O_v d} \quad \text{یا} \quad \vec{V}_B + \vec{V}_{DB} = \vec{V}_D$$

$$\vec{O_v a} + \vec{ac} = \vec{O_v c} \quad \text{یا} \quad \vec{V}_A + \vec{V}_{CA} = \vec{V}_C$$

$$\vec{O_v e} + \vec{ec} = \vec{O_v c} \quad \text{یا} \quad \vec{V}_E + \vec{V}_{CE} = \vec{V}_C$$

$$\vec{O_v e} + \vec{ed} = \vec{O_v d} \quad \text{یا} \quad \vec{V}_E + \vec{V}_{DE} = \vec{V}_D$$

که بعد ازبسته شدن روابط بُرداری ω_3 ، ω_4 ، ω_5 و $\vec{V}_6$ بدست می‌آید.

۳-۲ - ترسیم نمودار شتاب مکانیزمهای دسته‌اول:

راستای بُردار شتابهای مماسی a^t_{AC} و a^t_{BD} به ترتیب برروی خطوط موازی با Δ_3 و Δ_1 قرار دارد و راستای شتاب a_E در راستای لغزنده می‌باشد. همچنین نسبت شتاب مماسی a^t_{CE} به a^t_{DE} به نسبت CE/DE می‌باشد. برای رسم نمودار شتاب، روش پیدا کردن امتدادها با حالت قبل تفاوت دارد. البته در ترسیم نمودار شتاب، مانند حالت سرعت، مکان هندسی انتهای بُردار شتاب مطلق مفصلها را در عضو شناور بلافاصله می‌توان بدست آورد، ولی به‌علت اینکه شتاب زاویه‌ای عضو شناور مشخص نشده است، امتداد شتاب نسبی مفصلها در عضو شناور مشخص نیست، بنابراین مسأله مهم این است که راستای Δ را مانند حالت سرعت به سادگی نمی‌توان معین نمود. برای اینکه بتوانیم امتدادهای واقعی را مشخص کنیم باید به جای اینکه Δ را در امتداد نامعلوم شتاب نسبی نقاط لولا انتخاب کنیم، در امتداد معلوم شتاب مماسی نسبی که معلوم می‌باشد بوده و در امتداد عمود بر عضو شناور است انتخاب نمائیم، لذا با این انتخاب امتدادهای Δ_1 و Δ_3 نیز تغییر می‌نماید، و این خطوط مکان هندسی انتهای بردار شتاب مطلق مفصل نخواهد بود، بلکه راستایی موازی با امتدادهای Δ_1 و Δ_3 و مکان هندسی مبدأ بُردار شتاب مماسی نسبی مفصلها در عضو شناور می‌باشد. برای تعیین نمودن این راستای جدید، روش بر این است که چند نقطه دلخواه روی مکان هندسی انتهای بُردار شتاب مطلق مفصل انتخاب نموده و از این نقاط دلخواه شتابهای مرکزی نسبی مفصل را نسبت به هم رسم می‌کنیم. ازانتهای بُردار شتاب مرکزی نسبی، خطوطی به موازات مکان انتهای بُردار شتاب مطلق مذکور رسم می‌کنیم، در نتیجه خطوط جدید Δ_1 و Δ_3 بدست می‌آیند. خطوط Δ_1 و Δ_3 در نمودار شتاب این راستاهای جدید هستند، و مبدأ بُردار شتابهای مماس نسبی روی عضو شناور می‌باشند. دلیل آن این است که شتاب زاویه‌ای نامعلوم اعضاء متصل به عضو شناور هرچقدر هم که باشد (نقاط دلخواه) باز مبدأ بُردار شتاب مماسی نسبی، همان Δ_1 و Δ_3 جدید باقی می‌ماند.

در مکانیزم شکل ۱، برای نقطه C داریم:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}^n_{CA} + \vec{a}^t_{CA}$$

لذا از انتهای $\vec{a}_A$ بُردار معلوم $\vec{a}^n_{CA}$ و سپس امتداد $\vec{a}^t_{CA}$ را رسم می‌نمائیم. مکان هندسی شتاب مطلق نقطه C روی این امتداد (موازی با Δ_1) می‌باشد. برای نقطه D داریم:

$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}^n_{DB} + \vec{a}^t_{DB}$$

از انتهای $\vec{a}_B$ بردار معلوم $\vec{a}^n_{DB}$ و سپس امتداد $\vec{a}^t_{DB}$ را رسم می‌کنیم. مکان هندسی شتاب مطلق نقطه D روی این امتداد (موازی با Δ_3) می‌باشد. حال می‌توانیم امتدادهای Δ_1 و Δ_3 را مشخص نمائیم. بدین طریق که برامتداد $\vec{a}^t_{CA}$ نقطه‌ای دلخواه انتخاب کرده و از آن بُرداری همسنگ با $\vec{a}^n_{EC}$ رسم کنیم. از انتهای $\vec{a}^n_{EC}$ و بُرداری موازی با $\vec{a}^t_{CA}$ رسم می‌کنیم. امتداد Δ_1 در نمودار شتاب بدست می‌آید که مبدأ بُردار $\vec{a}^t_{EC}$ خواهد بود. به همین روش برامتداد $\vec{a}^t_{DB}$ نیز نقطه‌ای دلخواه انتخاب کرده وازآن بُرداری همسنگ با $\vec{a}^n_{ED}$ رسم می‌کنیم. ازانتهای $\vec{a}^n_{ED}$ خطی موازی با $\vec{a}^t_{DB}$ رسم می‌کنیم و در نتیجه Δ_3 بدست می‌آید، که مبدأ بُردار $\vec{a}^t_{ED}$ خواهدبود و Δ_2 همان مکان هندسی رأس بُردار باقی می‌ماند. حال با توجه به ضمیمه شماره ۱، شتابهای مماسی نسبی را که در راستای Δ و عمود بر عضو شناور می‌باشند، بدست می‌آوریم که به ترتیب نقاط c′، d′ و e در شکل می‌باشند. پس از ترسیم دو عمود بر این شتابهای مماسی نسبی (منظور $\vec{a}^n_{ED}$ و $\vec{a}^n_{EC}$) و به دست آوردن نقاط تقاطع با امتدادهای $\vec{a}^t_{DB}$ و $\vec{a}^t_{CA}$ می‌توان این دو شتاب مماسی نسبی راکه در ابتدا به دلخواه انتخاب کرده بودیم محاسبه نمود و نمودار شتاب را تکمیل کرد.

در ترسیم نمودار شکل ۴، ابتدا Δ_1، Δ_3 و Δ_2 مشخص شده است. با انجام عملیات هندسی بر روی نمودار، بر طبق ضمیمه شماره ۱، نقاط c′ و e و d′ با توجه به اینکه نسبت CE/ED=a/b در نظر گرفته شده است، بدست آمده‌اند. پس از یافتن نقاط c′ و d′ و e رسم نمودار شتاب تکمیل شده است.

در شکل ۴ داریم:

$$\vec{a}^n_A + \vec{a}^t_A + \vec{a}^n_{CA} + \vec{a}^t_{CA} + \vec{cc'} + \vec{c'e} = \vec{O_a e}$$

که اگر بجای بردارهای $\vec{cc'}$، $\vec{c'e}$ و $\vec{O_a e}$ بردارهای مساوی آنها یعنی $\vec{a}^n_{EC}$، $\vec{a}^t_{EC}$ و $\vec{a}_E$ را جایگزین کنیم داریم:

$$\vec{a}^n_A + \vec{a}^t_A + \vec{a}^n_{CA} + \vec{a}^t_{EC} + \vec{a}^t_{EC} = \vec{a}_E$$

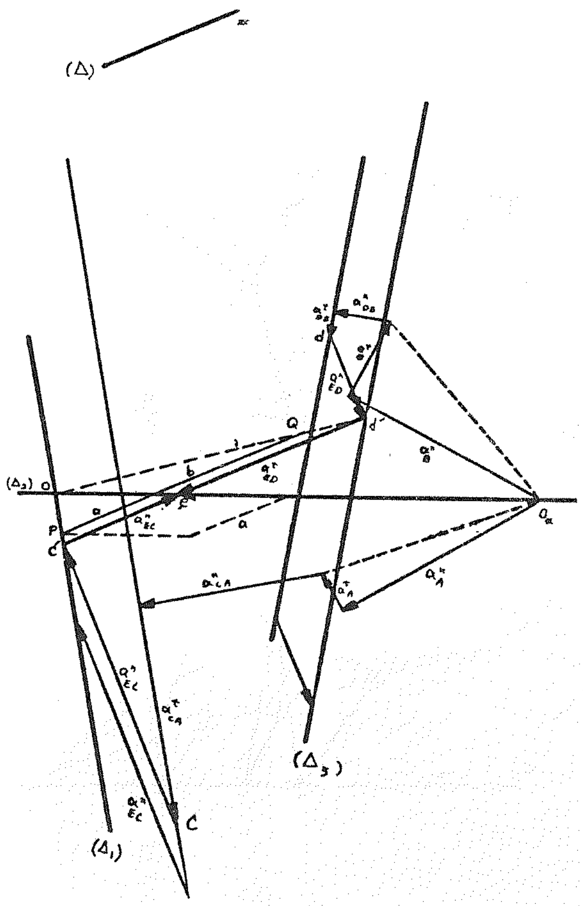
و از طرف دیگر

$$\vec{a}^n_B + \vec{a}^t_B + \vec{a}^n_{DB} + \vec{a}^t_{DB} + \vec{dd'} + \vec{d'e} = \vec{O_a e}$$

که اگر بجای بردارهای $\vec{dd'}$ و $\vec{d'e}$، $\vec{O_a e}$ بردارهای مساوی آنها یعنی $\vec{a}_E$، $\vec{a}^t_{ED}$ و $\vec{a}^n_{ED}$ را قرار دهیم داریم:

$$\vec{a}^n_B + \vec{a}^t_B + \vec{a}^n_{DB} + \vec{a}^n_{DB} + \vec{a}^n_{ED} + \vec{a}^t_{ED} = \vec{a}_E$$

نهایتاً مقادیر α_3، α_4، α_5، $\vec{\alpha}_6$ از روابط برداری بدست می‌آیند.



شکل ۴

۳-۳ ترسیم نمودارهای سرعت مکانیزمهای دسته دوم:

حل هندسی این مسأله در ضمیمه شماره ۲ آمده است. مطابق شکل ۵ مکان هندسی انتهای بردار سرعت نقاط S،R و T را در مثلث سرعت مشخص نموده‌ایم، که در آنها:

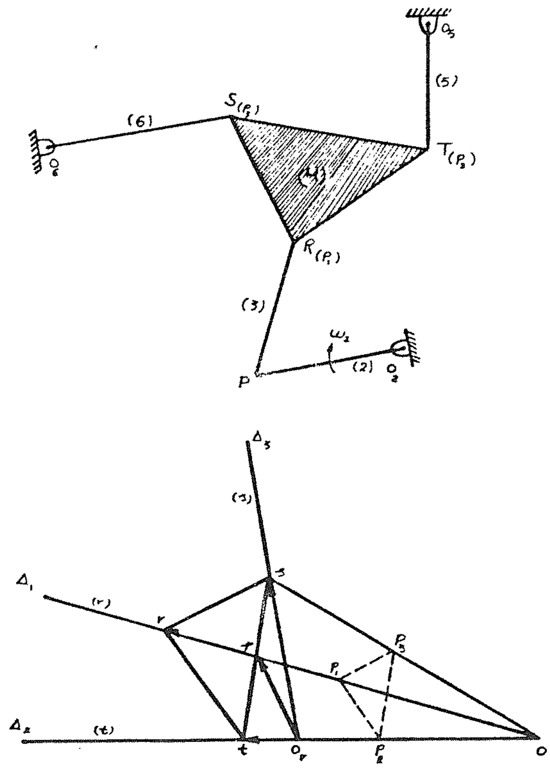
مکان هندسی انتهای بردار سرعت مطلق نقطه R که عمود بر Δ_1 = PR است

مکان هندسی انتهای بردار سرعت مطلق نقطه T که عمود بر Δ_2 = O_5T است

مکان هندسی انتهای بردار سرعت مطلق نقطه S که عمود بر Δ_3 = O_6S است

بنابراین دقیقاً مطابق آنچه در ضمیمه ۲ آمده است ابتدا اضلاع مثلث $P_1P_2P_3$ را عمود بر اضلاع مثلث RST رسم می‌نمایم

و با توجه به مثلث $P_1\ P_2\ P_3$ مطابق ضمیمه ۲، مثلث rst را می‌توان بر روی سه امتداد ذکر شده در بالا ساخت. با بدست آوردن t,s,r مسأله سرعت حل شده است.



شکل ۵

نقاط r,s و t انتهای سرعت مطابق نقاط S و R و T می‌باشند.

$\vec{O}_2P + \vec{P}_r = \vec{O}_2r$ یا $\vec{V}_P + \vec{V}_{RP} = \vec{V}_R$

$\vec{O}_2t + \vec{t}_s = \vec{O}_2S$ یا $\vec{V}_T + \vec{V}_{RP} = \vec{V}_R$

$\vec{O}_2S + \vec{S}_r = \vec{O}_2r$ یا $\vec{V}_S + \vec{V}_{RS} = \vec{V}_R$

که با معلوم بودن ω_2 می‌توان ω_3، ω_4، ω_5 و ω_6 را محاسبه نمود.

۳-۴ ترسیم نمودار شتاب مکانیزمهای دسته دوم:

برای ترسیم دیاگرام شتاب، امتدادهای لازم را به شرح زیر بدست می‌آوریم:

مکان هندسی ابتدای بردار شتاب مماسی $\vec{a}^t_{SR}$ که موازی با $\vec{a}^t_{RP}$ بوده و عمود بر PR است $= \Delta_{PR}$

مکان هندسی ابتدای بردار شتاب مماسی $\vec{a}^t_{ST}$ که موازی با بوده و عمود بر O_5T است $= \Delta_{O_5T}$

مکان هندسی انتهای بردار شتاب مطلق نقطه S می‌باشد که عمود بر O_6S است $= \Delta_3$

بعد از مشخص شدن سه مکان هندسی، دقیقاً مطابق ضمیمه ۲ اضلاع مثلث $P_1\ P_2\ P_3$ را عمود براضلاع عضو RTS رسم نموده و سپس مثلث $r'\ t'\ s$ را می‌سازیم. رئوس r' و t' و s به ترتیب بر روی خطوط Δ_1 و Δ_2 و Δ_3 قرار دارند.

بعد از بدست آوردن t'، S و r' از نقاط t' و r' دو عمود بر امتدادهای st' و $r's$ فرود می‌آوریم که به ترتیب همان a^n_{ST} و a^n_{SR} می‌باشند و لذا نمودار شتاب به این صورت نوشته می‌شود:

$$\vec{a}^n_s + \vec{a}^t_s = \vec{a}^n_P + \vec{a}^n_{RP} + \vec{a}^t_{RP} + \vec{a}^n_{SR} + \vec{a}^t_{SR}$$

$$\vec{a}^n_s + \vec{a}^t_s = \vec{a}^n_Y + \vec{a}^t_T + \vec{a}^n_{ST} + \vec{a}^t_{ST}$$

توجه شود که ما ابتدا از مکان t از نقطه‌ای دلخواه به اندازه $\vec{a}^n_{ST}$ برداری رسم کرده‌ایم و سپس از انتهای $\vec{a}^n_{ST}$ موازی با مکان هندسی نقطه Δ_2,t را رسم نموده‌ایم و نیز از نقطه‌ای دلخواه بر روی مکان هندسی نقطه r برداری به اندازهٔ $\vec{a}^n_{SR}$ رسم نموده‌ایم و سپس به موازات مکان هندسی r از انتهای $\vec{a}^n_{SR}$ خطی به موازی مکان هندسی مذکور رسم نموده و آن را Δ_1 می‌نامیم. بعد از بسته شدن نمودار شتاب، مقادیر α_3، α_4، α_5 و α_6 بدست می‌آید.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روشی نوین برای تحلیل سینماتیکی مکانیزمهای شناور بدون استفاده از نقطه کمکی ارائه گردید.
چهار نمودار سرعت و شتاب مربوط به دو مکانیزم با استفاده از این روش ترسیم شد. حل هندسی مسایل نیز در ضمیمه مقاله ارائه گردیده است.

۵) ضمایم:

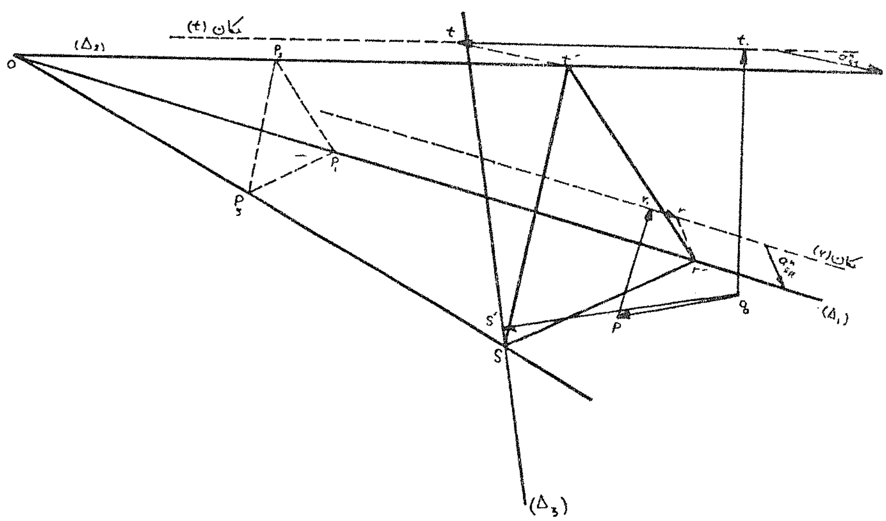
ضمیمه ۱: سه امتداد Δ_1، Δ_2 و Δ_3 مفروضند، خطی به موازات امتدادی مانند Δ چنان رسم کنید که سه امتداد Δ_1، Δ_2 و Δ_3 را قطع نموده و در نقاط تقاطع ۱، ۲ و ۳ به نسبت a/b تقسیم شود.

حل - مطابق شکل می‌توانیم Δ_1 و Δ_2 را امتداد دهیم تا در نقطه O یکدیگر را قطع کنند. از روی Δ_2 به موازات Δ پاره خطی به اندازه α رسم می‌کنیم و از انتهای آن به موازات Δ_2 خطی رسم می‌کنیم تا Δ_3 را قطع کند. از نقطه P خطی به موازات Δ رسم می‌کنیم تا Δ_2 را قطع کند، روی همین امتداد به اندازه b جدا نموده و آن را Q نام می‌گذاریم. از O به Q وصل

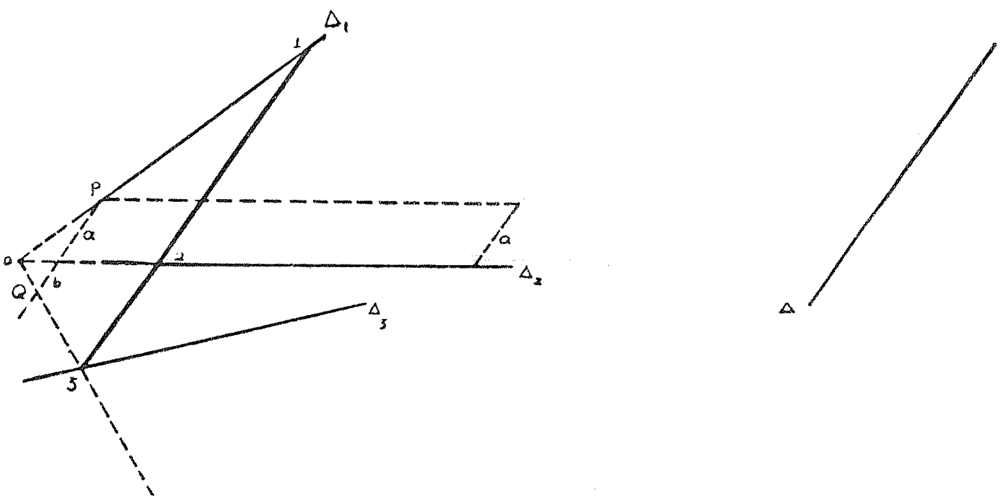
می‌کنیم تا Δ_3 رادر ۳ قطع کند. از ۳ به موازات Δ رسم می‌کنیم تا Δ_2 را در ۲ و Δ_1 را در ۱ قطع کند، پاره خط ۱۳ جواب مسأله است.

ضمیمه ۲: سه امتداد Δ_1 و Δ_2 و Δ_3 مفروضند. به ترتیب نقاط ۱، ۲ و ۳ را روی این سه امتداد چنان انتخاب کنید که مثلث تشکیل شده ۱۲۳ بر مثلث مفروض $P_1P_2P_3$ عمود باشد.

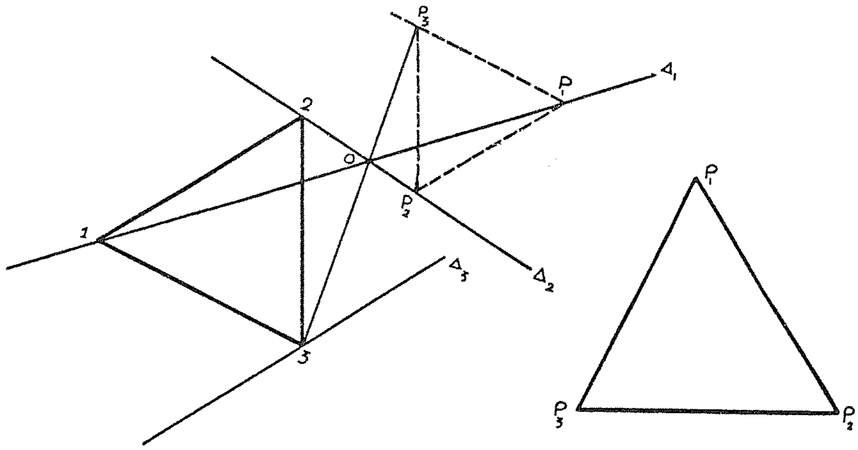
حل: ابتدا Δ_1 و Δ_2 را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطه O قطع کنند. بر روی Δ_1 نقطه p_1 را انتخاب می‌کنیم از آن عمود p_1p_2 رابر ضلع P_1P_2 فرود می‌آوریم تا Δ_2 را در p_2 قطع کند، از نقطه p_1 مجدداً عمودی بر ضلع P_1P_3 فرود آورده واز نقطه p_2 عمودی بر ضلع P_2P_3 فرود می‌آوریم. این دو عمود یکدیگر را در p_3 قطع می‌کنند. مثلث $p_1p_2p_3$ بر مثلث $P_1P_2P_3$ عمود است. حال از O به p_3 وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا Δ_3 را در نقطه A_3 قطع کند. از ۳ به موازات p_3p_1 خطی رسم می‌کنیم تا Δ_1 را در ۱ قطع کند. از ۳ به موازات p_2p_3 خطی رسم می‌کنیم تا Δ_2 را در نقطه ۲ قطع کند مثلث ۱۲۳ جواب منحصر بفرد مسأله است.



شکل ۶



شکل ض‌ـ۱



شکل ض–۲

منابع:

1. Maxwell, R. L., Kinematics and Dynamics of Machinery, Prantice Hall . Inc., 1966, PP 92-97 and 120-122.
2. Holowenko, A.R., Dynamics of machinery,John Wiley and Sons, PP 118-125.
3. Billings, J. H., Applied Kinematics for Students, and Mechanical Designers, Third Edition 1958, P 77.