کاربرد آمار کلاسیک و آمار بیزی در روش ارزیابی و بازبینی پروژه PERT

دکتر فرهاد کیان‌فر

استادیار دانشکدهٔ مهندسی صنایع و مرکز برنامه‌ریزی سیستم‌ها دانشگاه صنعتی اصفهان

۱. چکیده

روشی که برای برنامه‌ریزی و کنترل پروژه در حالت احتمالی معمولاً " به‌کار برده می‌شود روش ارزیابی و بازبینی پروژه[۱] (پرت) سه‌زمانه است. در این روش فرضهای ساده‌کننده زیادی در نظر گرفته می‌شوند که بسیاری از آنها از لحاظ تئوری آمار و احتمالات صحیح نیستند. در این مقاله سعی شده است که تعداد فرضهای لازم در روش مزبور به‌حداقل رسیده و فرضهای باقیمانده تا حد ممکن از لحاظ آماری صحیح باشند. بررسی آماری این روش با استفاده از دو مکتب آمار کلاسیک و آمار بیزی[۲] انجام شده است.

بدین ترتیب، مطالب مقاله به‌دو قسمت تقسیم می‌شوند. اولاً " در قسمت کاربرد آمار کلاسیک، توزیع احتمالی زمان هر فعالیت توزیع گاما در نظر گرفته شده و پارامترهای آن تخمین زده می‌شوند. سپس، مسیر بحرانی پروژه به‌صورت احتمالی محاسبه شده و توزیع احتمالی زمان کل پروژه بدست می‌آید. ثانیاً " در قسمت کاربرد آمار بیزی، توزیع گاما به‌عنوان توزیع پیشین[۳] زمان هر فعالیت در نظر گرفته شده و با داشتن مقدار مشاهده شده زمان آن فعالیت؛ توزیع پسین[۴] آن به‌دست می‌آید. سپس مانند قسمت قبل، مسیر بحرانی پروژه محاسبه شده و توزیع احتمالی زمان کل پروژه به‌دست می‌آید. به‌عنوان مثال عددی، شبکه مربوط به‌یک پروژه در نظر گرفته شده و کلیه محاسبات فوق روی آن انجام می‌گیرند، یعنی، توزیع احتمالی زمان کل پروژه به‌دو طریق مزبور به‌دست می‌آید.

Application of the Classical and Bayesian Statistics in PERT

F. Kyanfar .Ph.D.

ABSTRACT

A method which has usually been used for the project planning and control in probabilistic cases is the Three-estimate Approach of Program Evaluation and Review Technique (PERT). There are some simplifying assumptions in this method which many of them are not true from the probability and statistics theory view point. In this paper, it is tried to minimize the number of assumptions of this method so that the remaining assumptions are the true statistical ones. The statistical approach to this method is done by the classical and the Bayesian statistics separately. In each approach, the objective is to determine the probability distribution of the project total time.

۲. مقدمه

دو روشی که برای برنامه‌ریزی و کنترل پروژه معمولاً " به‌کار می‌روند عبارتند از: روش مسیر بحرانی[۵] و روش ارزیابی و بازبینی پروژه. در روش اول زمان هر فعالیت به‌صورت قطعی در نظر گرفته شده و مسیر بحرانی پروژه محاسبه می‌گردد. سپس زمان کل پروژه، که برابر مجموع زمان فعالیتهای روی مسیر بحرانی است، به‌صورت یک عدد قطعی به‌دست می‌آید. چون در عمل عوامل تصادفی زیادی می‌توانند روی زمان یک فعالیت اثر گذارند، در روش دوم این زمان یک متغیر تصادفی

در نظر گرفته می‌شود. سپس با در نظر گرفتن فرضهای ساده‌کننده، مانند روش قبل مسیر بحرانی پروژه به‌دست آمده و توزیع احتمالی زمان کل پروژه که این بار یک متغیر تصادفی است، تعیین می‌گردد. با داشتن این توزیع، می‌توان احتمال پایان‌یافتن پروژه تا هر زمانی را محاسبه نمود. چنانکه ملاحظه می‌شود، در روش دوم برای حل مساله در چند مورد از تئوری آمار و احتمالات استفاده می‌شود.

در تئوری آمار و احتمالات دو مکتب آمار کلاسیک و آمار بیزی وجود دارند. این دو مکتب را می‌توان به‌طور خلاصه به‌صورت زیر تعریف کرد. در آمار کلاسیک، احتمال یک حادثه به‌صورت نسبت تعداد وقوع آن حادثه به‌تعداد کل آزمایشها در تعداد زیادی آزمایش تعریف می‌شود. ولی در آمار بیزی، احتمال یک حادثه عبارت است از احتمال قضاوتی[6] فرد اظهارنظرکننده درباره آن حادثه که مسلما" به میزان اطلاعات آن فرد درباره آن حادثه بستگی دارد و با تغییر فرد، احتمال حادثه نیز تغییر می‌کند. بدین دلیل این احتمال را احتمال فاعلی[7] نیز می‌نامند. مکتب دوم به‌خاطر کاربردش در مسائل تحلیل تصمیم‌گیری در سالهای اخیر گسترش زیادی پیدا کرده است. در این مقاله بدون آنکه هدف مقایسه این دو مکتب باشد، از هر دو برای به‌دست‌آوردن توزیع احتمالی زمان کل پروژه، که هدف اصلی در روش ارزیابی و بازبینی پروژه است، استفاده شده است. البته با مقایسه متدولوژی این دو مکتب درمورد این مساله، به‌این نتیجه می‌رسیم که استفاده از آمار بیزی عملی‌تر است. اگرچه به‌شرط آنکه اطلاعات مساله اجازه استفاده از هر دو مکتب را بدهند، نتایج عددی حاصله نشان می‌دهند که کاربرد آندو تفاوت چندانی ندارند.

در کاربرد آمار کلاسیک در روش پرت، ابتدا توزیع احتمالی زمان هر فعالیت توزیع گاما در نظر گرفته می‌شود. سپس با داشتن سه‌زمان داده شده درمورد هر فعالیت، پارامترهای این توزیع تخمین زده می‌شوند. این تخمین باید به‌گونه‌ای باشد که توزیع احتمالی مجموع زمانهای چند فعالیت نیز شناخته شده باشد. در نهایت روش محاسبه مسیر بحرانی پروژه مشخص شده و با توجه به‌اینکه زمان کل پروژه برابر مجموع زمان فعالیتهای روی مسیر بحرانی آنست، توزیع احتمالی زمان کل پروژه به‌دست می‌آید.

کاربرد آمار بیزی در روش پرت به‌صورت زیر انجام می‌پذیرد. ابتدا توزیع پیشین زمان هر فعالیت توزیع گاما فرض شده و با داشتن مقدار مشاهده شده زمان آن فعالیت، توزیع پسین آن تعیین می‌گردد. سپس با داشتن سه‌زمان داده شده درمورد آن فعالیت، پارامترهای توزیع پسین تخمین‌زده می‌شوند. در این تخمین، چگونگی محاسبه توزیع احتمالی مجموع زمانهای چند فعالیت نیز مدنظر است. بالاخره، در این حالت نیز نحوه محاسبه مسیر بحرانی پروژه مشخص‌شده و توزیع احتمالی زمان کل پروژه بدست می‌آید.

مطالب مندرج در بخشهای این مقاله به‌ترتیب زیرند. در بخش سه، روش پرت با دقت بیشتری مورد بررسی قرار می‌گیرد. بخش چهار اختصاص به‌آشنایی با مکاتب آمار کلاسیک و آمار بیزی دارد. کاربرد آمار کلاسیک در روش پرت در بخش پنج توضیح داده می‌شود. در بخش شش، کاربرد آمار بیزی در روش پرت مورد بررسی قرار می‌گیرد. بالاخره، مثال عددی و محاسبات مربوطه مطالب بخش هفت را تشکیل می‌دهند.

۳- روش ارزیابی و بازبینی پروژه (پرت)

چنانکه قبلا" ذکر شد، روش پرت یکی از روشهای برنامه‌ریزی و کنترل پروژه است که در آن زمان هر فعالیت یک متغیر تصادفی در نظر گرفته می‌شود. این ویژگی اگر چه حل ریاضی مساله را مشکلتر می‌سازد ولی مدل مساله را به‌واقعیت نزدیکتر می‌کند. معمولترین نوع روش پرت، روش پرت سه‌زمانه است که در آن برای هر فعالیت سه‌زمان زیر تعریف می‌گردند:

– زمان خوشبینانه[8] فعالیت i (A_i): عبارتست از کوتاهترین زمان انجام فعالیت i به‌شرط آنکه همه چیز بر وفق مراد باشد.

– زمان بدبینانه[9] فعالیت i (B_i): یعنی طولانی‌ترین زمان انجام فعالیت i وقتی که در هرمورد کار با بدشانسی روبرو باشد.

– محتمل‌ترین زمان[10] انجام فعالیت i (M_i): عبارت است از زمانی که انجام فعالیت i با بیشترین احتمال به‌آن اندازه طول می‌کشد.

فرض کنید که سه زمان فوق درمورد هر فعالیت از فرد صاحبنظری سوال می‌گردند و بنا بر این داده شده‌اند. متوسط (T_i) و واریانس (V_i) زمان فعالیت i به‌طریق زیر با داشتن این سه زمان محاسبه می‌گردند. برای محاسبه متوسط‌زمان فعالیت i، متوسط با وزن $\frac{A_i+B_i}{2}$ با وزن یک و M_i با وزن دو را محاسبه می‌کنیم: یعنی

$$T_i = \frac{A_i + B_i + 4M_i}{6}$$

برای محاسبه واریانس زمان فعالیت i، فرض می‌کنیم که فاصله (A_i, B_i) شش برابر انحراف معیار این زمان است: یعنی

$$V_i = \left(\frac{B_i - A_i}{6}\right)^2$$

سپس، شبکه پروژه را با ذکر متوسط و واریانس زمان هر فعالیت به‌روی کمان مربوط به‌آن رسم می‌کنیم. با فرض اینکه زمان هر فعالیت برابر متوسط زمان آن است، مسیر بحرانی پروژه را به‌دست می‌آوریم. چون زمان انجام پروژه برابر مجموع زمان انجام فعالیتهای روی مسیر بحرانی است، با استفاده از قضیه حد مرکزی می‌توان زمان انجام پروژه را دارای توزیع نرمال فرض کرد. با فرض مستقل بودن زمان انجام فعالیتهای مختلف از یکدیگر، متوسط و واریانس این توزیع نرمال به طریق زیر محاسبه می‌گردند. متوسط زمان انجام پروژه برابر مجموع متوسط زمان فعالیتهای روی مسیر بحرانی است. واریانس زمان انجام پروژه برابر مجموع واریانس زمان فعالیتهای روی مسیر بحرانی در نظر گرفته می‌شود. با داشتن توزیع احتمالی زمان انجام پروژه می‌توان احتمال انجام پروژه تا هر تاریخ تحویلی را به‌دست‌آورد.

چنانکه ملاحظه می‌شود در روش پرت سه‌زمانه فرضهای ساده‌کننده زیادی در نظر گرفته می‌شوند که در اینجا درمورد علت عدم سازگاری آنها با تئوری آمار و احتمالات و چگونگی جایگزینی آنها بحث

می‌شود. اولاً"، نحوه محاسبه متوسط و واریانس زمان فعالیت i با داشتن سه زمان A_i، B_i و M_i سرانگشتی بوده و بر مبنای تئوری استوار نیست. قاعدتاً" باید برای انجام فعالیت توزیع احتمالی مشخصی در نظر گرفته و سپس با داشتن سه زمان A_i، B_i و M_i پارامترهای آن توزیع را تخمین زد. ثانیاً" در روش پرت سه‌زمانه، زمان هر فعالیت به‌طور قطعی برابر متوسط آن در نظر گرفته می‌شود و محاسبه مسیر بحرانی پروژه به‌صورت کاملاً" غیر احتمالی انجام می‌گیرد. در صورتی که زمان هر فعالیت یک متغیر تصادفی است و محاسبه مسیر بحرانی پروژه باید با توجه به‌این حقیقت و با استفاده از توزیع مجموع چند متغیر تصادفی به‌طریق احتمالی صورت پذیرد. ثالثاً"، برای به‌دست‌آوردن توزیع احتمالی زمان کل پروژه در روش پرت سه‌زمانه از قضیه حد مرکزی استفاده شده است. می‌دانیم که استفاده تقریبی از این قضیه در این مورد در صورتی صحیح است که تعداد فعالیتهای روی مسیر بحرانی حداقل برابر سی باشد. در حالی که در پروژه‌های کوچک این تعداد ممکن است به‌میزان قابل توجهی از سی کمتر باشد. پس در این پروژه‌ها استفاده از قضیه حد مرکزی صحیح نیست. به‌جای استفاده از این قضیه، باید توزیع احتمالی زمان کل پروژه را با دانستن توزیع زمان هر فعالیت روی مسیر بحرانی و با استفاده از تئوری احتمالات به‌دست آورد.

۴.۴ آشنائی با مکاتب آمار کلاسیک و آمار بیزی

چنانکه قبلاً" ذکر شد، در تئوری آمار و احتمالات دو مکتب آمار کلاسیک و آمار بیزی وجود دارند. هدف در این بخش آشنایی مختصر با این دو مکتب و ذکر نتایجی در آنهاست که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در آمار کلاسیک، احتمال هر حادثه به‌صورت احتمال فراوانی آن تعریف می‌شود، یعنی به‌عبارت دیگر، اگر آزمایش مربوط به‌آن حادثه تعداد دفعات زیادی تکرار گردد، نسبت تعداد وقوع آن حادثه به تعداد دفعات آزمایش را احتمال آن حادثه نامند. ثابت می‌شود که چنین تعریفی در سه‌اصل احتمال نیز صدق می‌کند و بهمین دلیل اخیراً" احتمال کلاسیک را احتمال مبتنی بر اصول نیز می‌نامند. البته صدق کردن در اصول احتمال وجه تمایز دو مکتب مورد بحث نیست، زیرا چنانکه خواهیم دید احتمال بیزی نیز در سه اصل احتمال صدق می‌کند. اکثر منابع موجود آمار و احتمال مربوط به‌مکتب کلاسیک می‌شوند و در دروس دانشگاهی آمار و احتمال نیز، به‌جز در موارد خاص، این مکتب تدریس می‌گردند. اشاره بیشتر به‌این مکتب در اینجا لزومی نداشته و در ادامه بحث نتایجی در این مکتب، که در بخشهای بعدی این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرند، مختصراً" ذکر خواهند شد.

چون توزیع احتمالی زمان هر فعالیت در کاربرد آمار کلاسیک و همچنین توزیع پیشین زمان هر فعالیت در کاربرد آمار بیزی توزیع گاما در نظر گرفته خواهند شد، لذا آشنایی با این توزیع لازم است. تابع چگالی احتمال توزیع گاما عبارت است از:

$$f_X(x;r,\lambda)=\frac{\lambda}{\Gamma(r)}(\lambda x)^{r-1}e^{-\lambda x}I_{(0,\infty)}(x)$$

وقتی که $r>0$ و $\lambda>0$ دو پارامتر توزیع هستند. متوسط، مد، واریانس و تابع مولد گشتاور این توزیع به‌ترتیب عبارتند از:

$$E(X)=\frac{r}{\lambda}\quad,\ M=\frac{r-1}{\lambda}\ ,\ Var(X)=\frac{r}{\lambda}$$

$$M_X(t)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^r\ ,\ t<\lambda \quad \text{بازاء}$$

نقاط α کسرک[11] و $(1-\alpha)$ـ کسرک این توزیع به‌طریق زیر تعریف می‌شوند:

نقطه‌ای که سطح زیر منحنی تابع چگالی از صفر تا آن نقطه برابر α است $=\gamma_\alpha$

نقطه‌ای که سطح زیر منحنی تابع چگالی از صفر تا آن نقطه برابر $(1-\alpha)$ است $=\gamma_{(1-\alpha)}$

نتایج زیر درمورد توزیع گاما در بخشهای بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند:

نتیجه ۱.۴ـ توزیع گاما با پارامترهای $r=\frac{K}{2}$ و $\lambda=\frac{1}{۲}$ همان توزیع مربع کی[12] با K درجه آزادی است (۲).

نتیجه ۲.۴ـ اگر متغیر تصادفی x دارای توزیع گاما با پارامترهای r و λ باشد، وقتیکه r عدد صحیح مثبت است، در این صورت تابع توزیع جمعی این متغیر تصادفی در نقطه x عبارت است از (۲):

$$F_X(x)=1-\sum_{j=0}^{r-1}\frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^j}{j!}$$

که می‌توان آن را با داشتن جدول تابع توزیع جمعی پواسان محاسبه کرد.

نتیجه ۳.۴ـ اگر متغیر تصادفی x دارای توزیع گاما با پارامترهای r و λ باشد، کسرکهای γ_α و $\gamma_{(1-\alpha)}$ این توزیع و توابع صعودی از پارامتر r هستند.

نتیجه ۴.۴ـ اگر X_1، X_2، .... ، X_n، n متغیر تصادفی مستقل باشند و X_i دارای توزیع گاما با پارامترهای r_i و λ باشد، در اینصورت مجموع این n متغیر تصادفی یعنی $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$ دارای توزیع گاما با پارامترهای $\sum^{n} r_i$ و λ است.

اثبات این نتیجه به‌سادگی با استفاده از تابع مولد گشتاور توزیع گاما امکان‌پذیر است.

نتیجه ۵.۴ـ توزیع گاما به‌ازای مقادیر مختلف پارامترهای r و λ می‌تواند به‌هریک از اشکال توزیع قرینه ($M=\frac{\gamma_\alpha+\gamma_{(1-\alpha)}}{2}$)، توزیع منحرف به‌چپ ($M<\frac{\gamma_\alpha+\gamma_{(1-\alpha)}}{2}$) و توزیع منحرف به‌راست ($M>\frac{\gamma_\alpha+\gamma_{(1-\alpha)}}{2}$) درآید.

در مقابل تعریف فوق برای احتمال یک حادثه، در آمار بیزی احتمال یک حادثه به‌صورت فاعلی تعریف شده و عبارتست از احتمال

قضاوتی فرد اظهارنظرکننده درباره آن حادثه که مسلما" به‌میزان اطلاعات آن فرد درمورد آن حادثه بستگی داشته و با تغییر فرد، احتمال حادثه نیز تغییر می‌کند. چنانکه قبلا" ذکر شد، تعریف احتمال در این مکتب نیز در سه اصل احتمال صدق کرده و بنا بر این اصول نمی‌توانند وجه‌تمایزی بین تعریف احتمال در این دو مکتب باشند. کاربرد آمار و احتمال بیزی اکثرا" در مسائل تحلیل تصمیم‌گیری است و به‌این دلیل بررسی این مکتب را بیشتر باید در منابع مربوط به‌تحلیل تصمیم‌گیری جستجو کرد.

در اینجا، تعاریف زیر از آمار بیزی برای استفاده در بخشهای بعدی آورده می‌شوند:

تعریف توزیع پیشین:

هر فرد می‌تواند درمورد یک حادثه، که به‌صورت مقادیر یک پارامتر مانند θ تعریف می‌شود، قبل از انجام هر مشاهده‌ای اطلاعاتی داشته باشد. یک راه برای بیان میزان آن اطلاعات، نشان‌دادن آن به‌صورت یک توزیع احتمالی است که توزیع پیشین آن پارامتر نامیده می‌شود و معمولا" با $\pi(\theta)$ نشان داده می‌شود. برحسب این‌که توزیع پیشین یک پارامتر حاوی اطلاعاتی درمورد آن پارامتر قبل از انجام مشاهده باشد یا نباشد، آن توزیع پیشین را با اطلاعات[13] یا بدون اطلاعات[14] نامند. حتی اگر درمورد پارامتری قبل از انجام مشاهده هیچ اطلاعی در دسترس نباشد، برای انجام متدولوژی آمار بیزی روی آن پارامتر احتیاج به‌یک توزیع پیشین بدون اطلاعات است. بنا بر این در آمار بیزی، وجود توزیع پیشین درمورد یک پارامترانکارناپذیر است (۱).

تعریف توزیع پسین:

میزان اطلاعات درمورد پارامتر θ، پس از مشاهده مقدار یک متغیر تصادفی مربوط به‌آن یعنی x، تغییر می‌کند. توزیع پسین θ به‌شرط داده‌شدن x توزیعی است که میزان جدید این اطلاعات را مشخص می‌کند و با $\pi(\theta/x)$ نشان داده می‌شود. توزیع پسین $\pi(\theta/x)$ اطلاعات موجود در توزیع پیشین $\pi(\theta)$ را با اطلاعات موجود در نمونه x در هم آمیخته و اطلاعات نهایی درباره θ را نتیجه می‌دهد. مطابق با تعریف احتمال شرطی، توزیع پسین $\pi(\theta/x)$ به‌طریق زیر محاسبه می‌گردد:

$$\pi(\theta/x) = \frac{h(x,\theta)}{m(x)} \quad , \; m(X) \neq 0$$

وقتی که $h(x,\theta)$ توزیع فاعلی مشترک θ و X باشد، یعنی

$$h(x,\theta) = \pi(\theta)\; f(x/\theta)$$

و$m(x)$ توزیع کناری X است که عبارت است از:

$$M(X) = \int_{\theta} h(x,\theta)\, d\theta$$

تعریف تخمین نقطه‌ای در آمار بیزی:

تخمین حداکثر راستنمایی تعمیم یافته[15] پارامترθ عبارتست از بزرگترین مد θ از توزیع پسین $\pi(\theta/x)$، یعنی، مقداری از θ مانند $\hat{\theta}$ که $\pi(\theta/x)$ را به‌عنوان تابعی از θ حداکثر می‌کند. البته در منابع آمار بیزی مانند (۱) ادعا شده است که در بسیاری موارد متوسط توزیع پسین $\pi(\theta/x)$ تخمین بهتری از مد آن برای θ است. در این مقاله، از متوسط توزیع پسین به‌عنوان تخمین نقطه‌ای پارامتر استفاده شده است.

۵. کاربرد آمار کلاسیک در روش ارزیابی و بازبینی پروژه

در این بخش، ابتدا درباره علت انتخاب توزیع گاما برای زمان هر فعالیت توضیح داده می‌شود، سپس با داشتن سه‌زمان خوشبینانه، بدبینانه و محتملترین زمان هر فعالیت، پارامترهای این توزیع تخمین زده می‌شوند. در این تخمین باید پارامتر λ توزیع زمان فعالیتهای مختلف یکسان باشد، زیرا برای بدست‌آوردن توزیع احتمالی زمان‌کل پروژه می‌خواهیم از نتیجه ۴.۴ استفاده کنیم و چنانکه ملاحظه می‌شود در این نتیجه پارامترλ برای تمام متغیرهای تصادفی یکسان است. پس از مشخص شدن توزیع احتمالی زمان هر فعالیت، مسیر بحرانی پروژه با استفاده از نتیجه ۳.۴ محاسبه می‌شود. در انتهای بخش، توزیع احتمالی زمان کل پروژه، که برابر مجموع زمان فعالیتهای روی مسیر بحرانی است، به‌دست می‌آید. با دانستن این توزیع، می‌توان احتمال اتمام پروژه تا هر تاریخی را محاسبه کرد.

۱.۵ــ تعیین توزیع احتمالی زمان هر فعالیت

قبلا" دیدیم که سه زمان A، B و M مربوط به‌هر فعالیت از فرد صاحبنظری سئوال می‌شوند. ممکن است این فرد صاحبنظر اصلا" از مطالب آمار و احتمالات اطلاعی نداشته و فقط براساس تجربه این مقادیر را به‌ما بدهد. حتی در این صورت نیز می‌تـوان مفاهیم احتمالی زیر را برای این سه‌زمان در نظر گرفت:

ــ منظور از زمان خوشبینانه A هرفعالیت همان αـ‌کسرک‌توزیع زمان آن فعالیت است؛

ــ منظور از زمان بدبینانه B هر فعالیت همان ($\alpha - 1$)ـ کسرک توزیع زمان آن فعالیت است؛

ــ منظور از محتملترین زمان M هر فعالیت همان مد توزیع زمان آن فعالیت است، وقتی که α عدد حقیقی کوچکتر یا مساوی یک دهم است. حال چون این سه‌زمان توسط فرد دیگری داده می‌شوند، ممکن است M مساوی، کوچکتر یا بزرگتر از $\frac{A+B}{2}$ باشد که به‌ترتیب به‌توزیع قرینه، منحرف به‌چپ یا منحرف به‌راست زمان آن فعالیت مربوط می‌شوند. بنا بر نتیجه ۵.۴، چون توزیع گاما به‌ازاء مقادیر مختلف دو پارامتر خود کلیه اشکال فوق را می‌تواند دارا باشد، پس توزیع احتمالی مناسبی برای زمان هر فعالیت است.

برای شناخت کامل توزیع احتمالی زمان هر فعالیت، باید علاوه بر مشخص‌شدن نوع توزیع، پارامترهای آن نیز تخمین زده شوند. با

داشتن سه زمان A_i ، B_i و M_i درمورد فعالیت i ، پارامترهای توزیع احتمالی زمان این فعالیت به‌طریق زیر تخمین زده می‌شوند. سه معادله در دستگاه زیر نوشته می‌شوند که در آن معادلات اول، دوم و سوم به‌ترتیب بیانگر تعاریف فوق از A_i ، B_i و M_i هستند:

$$\begin{cases} \int_0^{A_i} \frac{\lambda}{\Gamma(r_i)} (\lambda x)^{r_i-1} e^{-\lambda x} dx = \alpha_i \\ \int_0^{B_i} \frac{\lambda}{\Gamma(r_i)} (\lambda x)^{r_i-1} e^{-\lambda x} dx = 1-\alpha_i \\ M_i = \frac{r_i - 1}{\lambda} \end{cases}$$ (۱۰۱۰۵)

مجهولات دستگاه معادلات (۱۰۱۰۵) عبارتند از α_i ، r_i و λ ، البته α_iوقتی مفهوم اصلی خود را دارد که عددی کوچکتر یا مساوی یک دهم شود. دوباره تاکید می‌گردد که چون برای به‌دست‌آوردن توزیع احتمالی زمان کل پروژه می‌خواهیم از نتیجه ۴۰۴ استفاده کرده و توزیع مجموع متغیرهای تصادفی با توزیع گاما را به‌دست‌آوریم، پارامتر λ توزیع تمام فعالیتها باید یکسان باشد.

۲۰۵ـ محاسبه مسیر بحرانی پروژه به‌صورت احتمالی

ابتدا باید دید که مسیر بحرانی پروژه‌های غیراحتمالی چگونه محاسبه می‌گردد. در روش مسیر بحرانی، زمان هر فعالیت یک عدد قطعی در نظر گرفته شده و زودترین زمان شروع[16] (ES) و دیرترین زمان ختم[17] (LC) هر گره شبکه از روابط زیر محاسبه می‌گردند (۳):

$$ES_j = \max_{i \in I(j)} (ES_i + d_{ij}) \;,\; ES_0 = 0$$ (۱۰۲۰۵)

$$LC_i = \min_{j \in J(i)} (LC_j - d_{ij}) \;,\; LC_n = ES_n$$ (۲۰۲۰۵)

وقتیکه d_{ij} زمان قطعی فعالیت (i,j) ، صفر شماره گره مبداء شبکه، n شماره گره مقصد شبکه، $I(j)$ مجموعه شماره گرههایی که با یک شاخه به‌گره j وارد می‌شوند و $J(i)$ مجموعه شماره گرههائی که شاخه‌های خروجی از i به‌آنها منتهی می‌شوند، تعریف می‌گردند. پس‌از محاسبه ایندو زمان برای هر گره در شبکه، فعالیت (i,j) روی مسیر بحرانی پروژه قرار می‌گیرد اگر درمورد آن سه‌شرط زیر برقرار باشند:

(i) $ES_i = LC_i$

(ii) $ES_j = LC_j$

(iii) $ES_j - ES_i = LC_j - LC_i = d_{ij}$

البته فعالیتهای روی مسیر بحرانی پروژه را به‌طریق ساده‌تر نیز می‌توان تعریف کرد: فعالیتهای روی مسیر بحرانی پروژه عبارتند از فصل مشترک فعالیتهایی که در رابطه (۱۰۲۰۵) حداکثر به‌ازای آنها اتفاق می‌افتد، با فعالیتهایی که دررابطه (۲۰۲۰۵) حداقل به‌ازای آنها رخ می‌دهد. برای به‌دست‌آوردن مسیر بحرانی پروژه به‌صورت احتمالی از تعریف اخیر مسیر بحرانی استفاده می‌کنیم.

چنانکه دیدیم در روش ارزیابی و بازبینی پروژه، زمان هر فعالیت یک متغیر تصادفی با توزیع گاما در نظر گرفته شد. در این حالت نیز باید زودترین زمان شروع و دیرترین زمان ختم هر گره شبکه را به نحوی محاسبه کرد. برای محاسبه زودترین زمان شروع یک گره، فرض کنید که به‌عنوان مثال به‌آن گره دو شاخه وارد می‌شوند و زمان از ابتدای شبکه تا آن گره از شاخه اول متغیر تصادفی X_1 است که دارای توزیع گاما با پارامترهای r_1 و λ می‌باشد. همچنین، زمان از ابتدای شبکه تا آن گره از شاخه دوم متغیر تصادفی X_2 است که دارای توزیع گاما با پارامترهای r_2 و λ می‌باشد. حال یک راه برای محاسبه زودترین زمان شروع این گره آن است که توزیع متغیر تصادفی $\max(X_1, X_2)$ شناخته شده باشد، که متاسفانه درمورد توزیع گاما این‌طور نیست. برای به‌دست‌آوردن حداکثر دو متغیر تصادفی X_1 و X_2 به‌طریق زیر رفتار می‌کنیم: $(1-\alpha)$ ـ کسرک توزیع این دو متغیر تصادفی را با یکدیگر مقایسه کرده و هرکدام بزرگتر بود، نتیجه می‌گیریم متغیرتصادفی مربوط به‌آن بزرگتر است. ولی برطبق نتیجه ۳۰۴، در توزیع گاما $\gamma(1-\alpha)$ تابعی صعودی از پارامتر r است. بنا بر این، مقایسه بجای اینکه روی $(1-\alpha)$ ـ کسرک توزیعها انجام گیرد می‌تواند روی پارامتر r دو توزیع یعنی r_1 و r_2 انجام پذیرد. به‌عبارت دیگر، زودترین زمان شروع آن گره برابر متغیر تصادفی خواهد بود که پارامتر r بزرگتری داشته باشد.

به‌همین ترتیب، برای محاسبه دیرترین زمان ختم یک گره فرض کنید که از آن گره دو شاخه خارج می‌شوند. زمان از این گره تا انتهای شبکه از شاخه اول متغیر تصادفی X_1 است که دارای توزیع گاما با پارامترهای r_1 و λ می‌باشد. همچنین، زمان از این گره تا انتهای شبکه از شاخه دوم متغیر، تصادفی X_2 است که دارای توزیع گاما با پارامترهای r_2 و λ می‌باشد. چون در این حالت توزیع $\min(X_1, X_2)$ نیز شناخته‌شده نیست، برای به‌دست‌آوردن حداقل دو متغیر تصادفی X_1 و X_2 به‌طریق زیر رفتار می‌کنیم: α ـ کسرک توزیع این دو متغیر تصادفی را با یکدیگر مقایسه کرده و هرکدام کوچکتر بود، نتیجه می‌گیریم متغیر تصادفی مربوط به‌آن کوچکتر است. ولی برطبق نتیجه ۳۰۴، در توزیع گاما γ_α تابعی صعودی از پارامتر r است. بنا بر این مقایسه به‌جای α ـ کسرک، می‌تواند روی پارامتر r دو توزیع یعنی r_1 و r_2 انجام گیرد. به‌عبارت دیگر، دیرترین زمان ختم آن گره برابر متغیر تصادفی خواهد بود که پارامتر r کوچکتری داشته باشد.

از مطالب فوق نتیجه می‌شود که با فرض توزیع گاما زمان هر فعالیت، برای محاسبه مسیر بحرانی پروژه، می‌توان زودترین زمان شروع و دیرترین زمان ختم هر گره شبکه را عینا" مانند روش مسیر بحرانی، وقتی که به‌جای زمان قطعی هر فعالیت از پارامتر r توزیع زمان آن فعالیت استفاده شود، محاسبه کرد. سپس مانند حالت قطعی، فعالیتهای روی مسیر بحرانی پروژه عبارتند از: فصل مشترک فعالیتهایی که در رابطه (۱۰۲۰۵) حداکثر به‌ازای آنها اتفاق می‌افتد، با فعالیتهایی که در رابطه (۲۰۲۰۵) حداقل به‌ازای آنها رخ می‌دهد.

پس از مشخص شدن فعالیتهای روی مسیر بحرانی، با توجه به‌اینکه زمان کل پروژه برابر مجموع زمان فعالیتهای روی مسیر بحرانی است و با استفاده از نتیجه ۴۰۴، می‌توان توزیع احتمالی زمان کل پروژه را به‌دست‌آورد. با داشتن این توزیع، احتمال اتمام پروژه تا هر تاریخی محاسبه می‌شود.

۶ـ کاربرد آمار بیزی در روش ارزیابی و بازبینی پروژه

در این بخش، ابتدا توزیع احتمالی زمان فعالیت i، با همان استدلالهای بخش گذشته، توزیع گاما با پارامترهای r_i و λ در نظر گرفته می‌شود، وقتی که r_i عددی ثابت و λ یک متغیر تصادفی است. سپس، توزیع پیشین متغیر تصادفی λ توزیع گاما با پارامترهای t و γ فرض شده و با داشتن مقدار مشاهده شده x_i از زمان فعالیت i، توزیع پسین λ مشروط بر x_i به‌دست می‌آید. خواهیم دید که این توزیع پسین نیز توزیع گاما با پارامترهای $(r_i + t)$ و $(x_i + \gamma)$ می‌شود. حال با توجه به‌تعریف تخمین نقطه‌ای در آمار بیزی، تخمین پارامتر λ یعنی $\hat{\lambda}$ را برابر متوسط این توزیع پسین یا $\frac{r_i + t}{x_i + \gamma}$ در نظر می‌گیریم. بعد با توجه به‌این که می‌خواهیم مقدار λ برای هر فعالیت مقدار ثابتی باشد، پارامترهای توزیع گامای زمان هر فعالیت را تخمین می‌زنیم. پس از مشخص‌شدن توزیع زمان هر فعالیت، مسیر بحرانی پروژه با روشی مشابه بخش قبل محاسبه شده و توزیع احتمالی زمان کل پروژه به‌دست می‌آید.

۱۰۶ـ توزیع احتمالی زمان هر فعالیت

چنانکه در بخش قبل ملاحظه شد، توزیع احتمالی زمان فعالیت i توزیع گاما با پارامترهای ثابت r_i و λ در نظر گرفته شد. علت این که پارامتر λ به i بستگی نداشته و برای تمام فعالیتها مقدار ثابتی در نظر گرفته شد، این بود که در محاسبه مسیر بحرانی پروژه بتوان از نتیجه ۴۰۴، استفاده کرده و توزیع مجموع متغیرهای تصادفی با توزیع گاما را به‌دست آورد. ولی این فرض تا اندازه‌ای غیرعملی به‌نظر رسیده و بهتر است پارامتر یکسان λ تمام فعالیتها را به‌جای عددی ثابت یک متغیر تصادفی فرض کرد. درمورد توزیع پیشین و پسین این پارامتر در زیر بخش بعد توضیح داده خواهد شد. ولی به‌شرط داده‌شدن λ، توزیع احتمالی زمان فعالیت i یا X_i توزیع گاما با پارامترهای r_i و λ در نظر گرفته می‌شود: یعنی،

$$f(x_i/\lambda) = \frac{\lambda}{\Gamma(r_i)} (\lambda x_i)^{r_i - 1} e^{-\lambda x_i} I_{(0,\infty)}(X_i) \qquad (۱۰۱۰۶)$$

البته برای مشخص شدن این توزیع باید پارامترهای r_i و λ تخمین زده شوند.

۲۰۶ـ توزیع پیشین و پسین پارامتر λ

با توجه به‌نتایج ذکر شده برای توزیع گاما و برای اینکه با داشتن مقدار مشاهده‌شده x_i از زمان فعالیت i، توزیع پسین λ مشروط بر x_i توزیع شناخته شده‌ای باشد، توزیع پیشین پارامتر λ توزیع گاما با پارامترهای ثابت t و γ در نظر گرفته می‌شود: یعنی،

$$\pi(\lambda) = \frac{\gamma}{\Gamma(t)} (\gamma\lambda)^{t-1} e^{-\gamma\lambda} I_{(0,\infty)}(\lambda) \qquad (۱۰۲۰۶)$$

حال فرض کنید که مقدار مشاهده شده x_i از زمان فعالیت i داده شده باشد. البته در عمل، چون استفاده از روش ارزیابی و بازبینی پروژه در زمانی انجام می‌گیرد که پروژه هنوز اجرا نشده است، مقدار x_i را باید از زمان اندازه‌گیری شده برای همین فعالیت در پروژه مشابهی که قبلا" اجرا شده است، به‌دست‌آورد. در ادامه مطلب، هدف این است که توزیع پسین λ به‌شرط داده شدن x_i را محاسبه کرد. ابتدا باید توزیع توام x_i و λ را به‌دست‌آورد که عبارت است از:

$$g(x_i, \lambda) = f(x_i/\lambda)\, \pi(\lambda) = \frac{\gamma^t x_i^{r_i - 1}}{\Gamma(t)\Gamma(r_i)} \lambda^{r_i + t - 1} e^{-\lambda(X_i + \gamma)} I_{(0,\infty)}(x_i) I_{(0,\infty)}(\lambda)$$

سپس، توزیع کناری X_i با انتگرال گرفتن از توزیع توام X_i و λ روی تمام مقادیر λ به‌طریق زیر محاسبه می‌شود:

$$m(x_i) = \int_0^\infty g(x_i, \lambda)\, d\lambda$$

پس از انتگرال‌گیری، توزیع زیر حاصل می‌شود:

$$m(x_i) = \frac{\Gamma(r_i + t)}{\Gamma(r_i)\Gamma(t)} \cdot \frac{\gamma^t x_i^{(r_i - 1)}}{(x_i + \gamma)^{(r_i + t)}} I_{(0,\infty)}(x_i)$$

در نهایت، توزیع پسین λ مشروط بر X_i به‌طریق زیر محاسبه می‌شود:

$$\pi(\lambda/x_i) = \frac{g(x_i, \lambda)}{m(x_i)} = \frac{(x_i + \gamma)^{(r_i + t)}}{\Gamma(r_i + t)} \lambda^{(r_i + t - 1)} e^{-\lambda(x_i + \gamma)} I_{(0,\infty)}(\lambda) \qquad (۲۰۲۰۶)$$

چنانکه ملاحظه می‌شود توزیع پسین λ مشروط بر x_i عبارت است از توزیع گاما با پارامترهای $(r_i + t)$ و $(x_i + \gamma)$

۳۰۶ـ تخمین پارامترهای توزیع زمان هر فعالیت

ابتدا، با داشتن سه زمان A_i، B_i و M_i برای فعالیت i و با فرض تعاریف احتمالی مشابه بخش قبل برای این سه زمان، دستگاه معادلات زیر را برای تخمین پارامترهای توزیع زمان فعالیت i تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} \int_0^{A_i} \frac{\lambda_i}{\Gamma(r_i)} (\lambda_i x)^{r_i - 1} e^{-\lambda_i x}\, dx = \alpha_i \\ \int_0^{B_i} \frac{\lambda_i}{\Gamma(r_i)} (\lambda_i x)^{r_i - 1} e^{-\lambda_i x}\, dx = 1 - \beta_i \\ M_i = \frac{r_i - 1}{\lambda_i} \end{cases} \qquad (۱۰۳۰۶)$$

وقتی که α_i و β_i اعداد حقیقی کوچکتر یا مساوی یک دهم هستند. علت این که در معادلهٔ دوم دستگاه مقدار β_i متفاوت با α_i در نظر گرفته می‌شود، سهولت حل دستگاه معادلات است. از طرفی چون مقادیر α_i و β_i کوچکتر یا مساوی یک دهم در نظر گرفته می‌شوند، تفاوت زیادی بین آنها نبوده و می‌توان فرض کرد که زمان خوشبینانه فعالیت i برای اساس α_i ــ کسرک توزیع و زمان بدبینانه آن براساس ($1-\beta_i$)ــ کسرک توزیع زمان آن فعالیت توسط فرد صاحبنظر به‌ما داده می‌شوند. از حل دستگاه معادلات (۱.۳.۶) مجهولات r_i و λ_i، که همان پارامترهای توزیع زمان فعالیت هستند، را محاسبه می‌کنیم. البته چون پارامتر λ یک متغیر تصادفی در نظر گرفته شده، λ_i محاسبه شده یک مشاهده از این متغیر تصادفی است.

از طرفی چون می‌خواهیم مقدار تخمین زده شده پارامتر λ یعنی $\hat{\lambda}$ برای تمام فعالیتها یکسان باشد، به‌طریق زیر رفتار می‌کنیم. ابتدا، متوسط توزیع پیشین λ یعنی $\frac{t}{\gamma}$ را بوسیله متوسط مقادیر مشاهده شده λ_i یعنی $\bar{\lambda}$ تخمین می‌زنیم.

$$\bar{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{n} = \frac{t}{\gamma} \qquad (۲.۳.۶)$$

سپس با توجه به‌تعریف تخمین نقطه‌ای در آمار بیزی، $\hat{\lambda}$ را برابر متوسط توزیع پسین λ مشروط بر x_i در نظر می‌گیریم: یعنی،

$$\hat{\lambda} = \frac{r_i + t}{x_i + \gamma}$$

حال برای اینکه کسر $\frac{r_i+t}{x_i+\gamma}$ به‌ازای هر i مقدار ثابتی باشد، باید داشته باشیم:

$$r_i = \bar{\lambda} x_i$$

که در این‌صورت، به‌ازای هر i داریم:

$$\hat{\lambda} = \bar{\lambda} = \frac{r_i + t}{x_i + \gamma}$$

یعنی متوسط توزیع پسین λ با متوسط توزیع پیشین آن برابر می‌شود و مقدار مشترک آنها به‌عنوان تخمین پارامتر λ برای توزیع زمان هر فعالیت به‌کار می‌رود.

بنا بر این، زمان فعالیت i دارای توزیع گاما با پارامترهای $\bar{\lambda} x_i$ و $\bar{\lambda}$ است، وقتی که $\bar{\lambda}$ از رابطه (۲.۳.۶) محاسبه شده و x_i مقدار مشاهده‌شده زمان فعالیت i می‌باشد.

۴.۶ــ محاسبه مسیر بحرانی و تعیین توزیع زمان کل پروژه

با توجه به‌اینکه در این حالت نیز توزیع احتمالی زمان فعالیت i توزیع گاما در نظر گرفته شده و پارامترهای آن به‌صورت $r_i = \bar{\lambda} x_i$ و $\bar{\lambda}$ تخمین زده‌شدند، مسیر بحرانی پروژه عینا" مانند زیر بخش ۲.۵ محاسبه شده و در اینجا دیگر تکرار نمی‌گردد. چون پارامتر $\bar{\lambda}$ توزیع زمان تمام فعالیتها یکسان است، توزیع احتمالی زمان کل پروژه را می‌توان با استفاده از نتیجه ۴.۴ بدست‌آورد. با داشتن این توزیع می‌توان احتمال اتمام پروژه تا هر تاریخی را محاسبه کرد.

۷ــ مثال عددی و نتیجه‌گیری

قبل از ذکر مثال عددی، یادآوری نکات زیر ضروری به‌نظر می‌رسند:

اولا"، به‌علت عدم دسترسی به‌جداول تابع توزیع جمعی توزیع گاما با پارامترهای مختلف، در مثال عددی مربوط به‌کاربرد آمار کلاسیک از جدول تابع توزیع جمعی توزیع مربع‌کی استفاده شده است. بنا بر نتیجه ۱.۴، توزیع مربع‌کی با k درجه آزادی همان توزیع گاما با پارامترهای $r=\frac{k}{2}$ و $\lambda=\frac{1}{2}$ است.

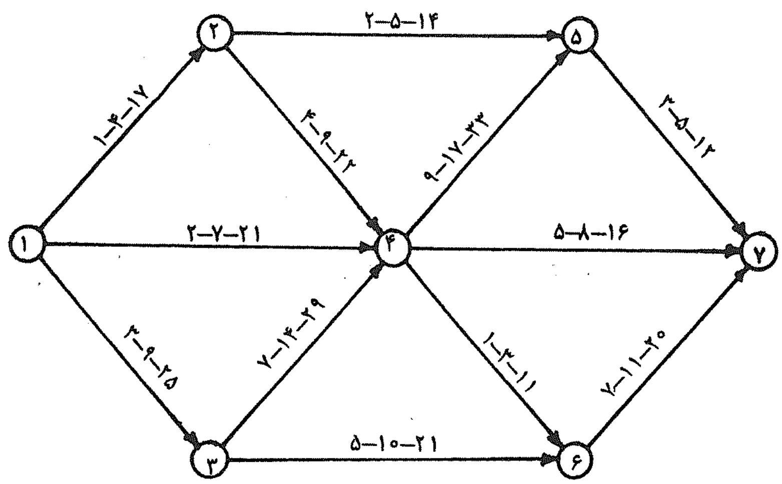
ثابت بودن پارامتر λ در این توزیع اشکالی ایجاد نمی‌کند، زیرا می‌خواهیم در این مثال پارامتر λ تمام فعالیتها یکسان باشد. ثانیا"، در مثال مربوط به‌کاربرد آمار بیزی از نتیجه ۲.۴ استفاده کرده و پارامترهای توزیع زمان هر فعالیت را با استفاده از جدول تابع توزیع جمعی پواسان تخمین می‌زنیم. استفاده از این توزیع امکان این را می‌دهد که پارامتر λ فعالیتهای مختلف متفاوت تخمین زده شوند.

۱.۷ــ مثال عددی مربوط به‌کاربرد آمار کلاسیک

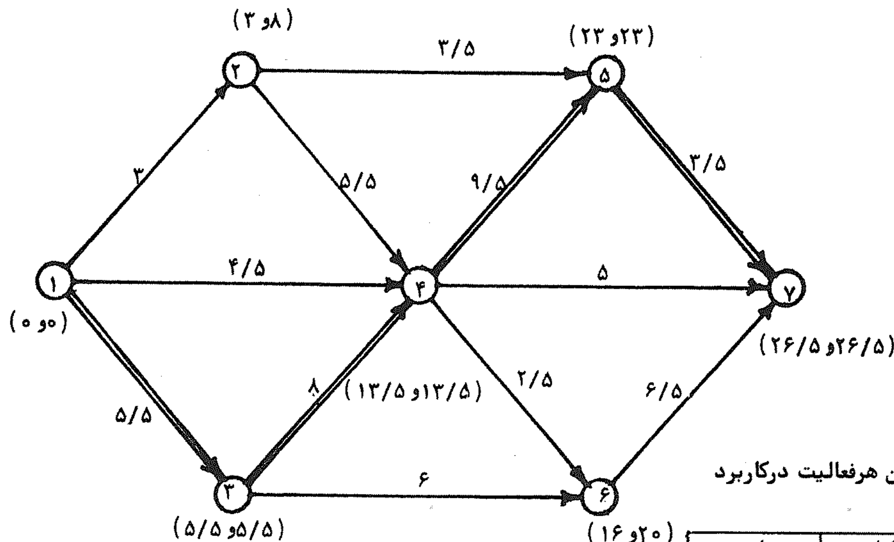
شبکه شکل ۱.۷ را با دوازده فعالیت و هفت گره در نظر بگیرید. سه زمان نوشته شده به‌روی هر فعالیت به‌ترتیب از چپ به‌راست زمان خوشبینانه، محتملترین زمان و زمان بدبینانه انجام آن فعالیت یعنی A–M–B هستند. با داشتن این سه‌زمان برای فعالیت i، از حل دستگاه معادلات (۱.۱.۵) مقادیر r_i و α_i به‌ازای $\lambda=\frac{1}{2}$ برای این فعالیت بدست‌آمده و در جدول ۱.۷ درج می‌گردند. سپس، این شبکه دوباره در شکل ۲.۷ رسم شده و این بار عدد نوشته‌شده بر روی هر فعالیت، پارامتر r توزیع زمان آنرا نشان می‌دهد. چنانکه در بخش ۲.۵ اشاره شد، محاسبات زودترین زمان شروع (ES) و دیرترین زمان ختم (LC) هر گره با استفاده از این پارامتر، برای محاسبه مسیر بحرانی پروژه انجام می‌گیرند. در شکل ۲.۷ در کنار هر گره، زودترین زمان شروع و دیرترین زمان ختم آن گره در داخل پرانتز به‌صورت (ES و LC) ذکر شده‌اند. چنانکه در این شکل ملاحظه می‌شود، مسیر بحرانی پروژه با توجه به‌تعریف آن در بخش ۲.۵ بدست‌آمده که عبارتست از: ۷ــ۵ــ۴ــ۳ــ۱ . حال با فرض استقلال زمان فعالیتهای مختلف از یکدیگر، مجموع زمان فعالیتهای روی این مسیر، که زمان کل پروژه را تشکیل می‌دهد، دارای توزیع گاما با پارامترهای $r=26/5$ و $\lambda=0/5$ است.

۲.۷ــ مثال عددی مربوط به‌کاربرد آمار بیزی

در این بخش، می‌خواهیم شبکه نشان داده شده در شکل ۱.۷ را یکبار دیگر در نظر گرفته و این بار محاسبات روی آن را با استفاده از آمار بیزی انجام دهیم. با داشتن سه زمان A_i ، B_i و M_i برای فعالیت i، از حل دستگاه معادلات (۱.۳.۶) مقادیر r_i ، λ_i ، α_i و β_i برای این فعالیت بدست‌آمده و در جدول ۲.۷ درج می‌گردند. چنانکه در بخش ۳.۶ ذکر شد، متوسط این مقادیر λ_i یعنی $\bar{\lambda}$، به‌عنوان تخمین پارامتر مشترک λ توزیع زمان تمام فعالیتها



شکل ۱۰۷ــ شبکه مربوط به‌یک پروژه در روش پرت سه‌زمانه



شکل ۲۰۷ مسیر بحرانی پروژه درکاربرد آمار کلاسیک

به‌کار می‌رود. پس این متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{n} = \frac{۶/۳۸}{۱۲} \quad ۰/۵۳$$

سپس اگر مقدار مشاهده‌شده زمان فعالیت i یا x_i داده شود، تخمین پارامتر r_i عبارت است از:

$$r_i = \bar{\lambda} x_i$$

مقادیر x_i و r_i برای فعالیت i در جدول ۳۰۷ درج شده‌اند.

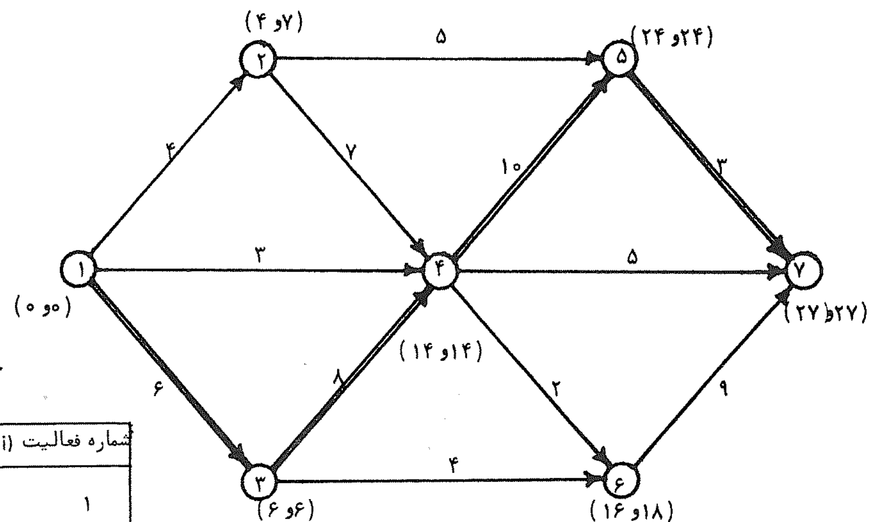
حال شبکه مربوط به‌این پروژه را دوباره در شکل ۳۰۷ رسم‌کرده و پارامترهای r_i محاسبه شده در جدول ۳۰۷ را بر روی فعالیتهای مربوطه در این شکل وارد می‌کنیم. محاسبات مربوط به‌زودترین زمان شروع و دیرترین زمان ختم هر گره و بدست‌آوردن مسیر بحرانی پروژه در این شکل عینا" مانند شکل ۲۰۷ انجام می‌گیرند. چنانکه در شکل

جدول ۱۰۷ــ تخمین پارامتر r توزیع زمان هرفعالیت درکاربرد آمار کلاسیک

شماره فعالیت (i)	فعالیت	تخمین پارامتر r_i	مقدار α_i
۱	(۱و ۲)	۳	۰/۰۱
۲	(۱و ۳)	۵/۵	۰/۰۱
۳	(۱و ۴)	۴/۵	۰/۰۱
۴	(۲و ۴)	۵/۵	۰/۰۲۵
۵	(۲و ۵)	۳/۵	۰/۰۵
۶	(۳و ۴)	۸	۰/۰۲۵
۷	(۳و ۶)	۶	۰/۰۵
۸	(۴و ۵)	۹/۵	۰/۰۲۵
۹	(۴و ۶)	۲/۵	۰/۰۵
۱۰	(۴و ۷)	۵	۰/۱
۱۱	(۵و ۷)	۳/۵	۰/۱
۱۲	(۶و ۷)	۶/۵	۰/۱

جدول ۲-۷- تخمین پارامترهای توزیع زمان هرفعالیت درکاربرد آمار بیزی

شماره فعالیت	فعالیت	پارامتر r_i	پارامتر λ_i	مقدار α_i	مقدار β_i
۱	(۱و۲)	۲	۰/۲۵	۰/۰۲۶	۰/۰۷۵
۲	(۱و۳)	۶	۰/۵۵	۰/۰۰۷	۰/۰۰۷
۳	(۱و۴)	۴	۰/۴۳	۰/۰۱۱	۰/۰۲۱
۴	(۲و۴)	۶	۰/۵۵	۰/۰۲۵	۰/۰۱۹
۵	(۲و۵)	۴	۰/۶	۰/۰۴۴	۰/۰۳۲
۶	(۳و۴)	۸	۰/۵	۰/۰۲۷	۰/۰۲۴
۷	(۳و۶)	۵	۰/۴	۰/۰۵۳	۰/۰۷۹
۸	(۴و۵)	۹	۰/۴۷	۰/۰۲۸	۰/۰۳
۹	(۴و۶)	۳	۰/۶۶	۰/۰۳۱	۰/۰۲۴
۱۰	(۴و۷)	۶	۰/۶۲	۰/۰۹۴	۰/۰۷۱
۱۱	(۵و۷)	۵	۰/۸	۰/۰۹۶	۰/۰۳۸
۱۲	(۶و۷)	۷	۰/۵۵	۰/۰۹۶	۰/۰۷۹



شکل ۳-۷- مسیر بحرانی پروژه در کاربرد آمار بیزی

جدول ۳-۷- مقدار مشاهده‌شده و پارامتر r توزیع زمان هر فعالیت

شماره فعالیت (i)	فعالیت	مشاهده x_i	$r_i = \bar{\lambda} x_i$
۱	(۱و۲)	۷/۵۵	۴
۲	(۱و۳)	۱۱/۳	۶
۳	(۱و۴)	۵/۶۶	۳
۴	(۲و۴)	۱۳/۲	۷
۵	(۲و۵)	۹/۴۳	۵
۶	(۳و۴)	۱۵/۰۹	۸
۷	(۳و۶)	۷/۵۵	۴
۸	(۴و۵)	۱۸/۸۷	۱۰
۹	(۴و۶)	۳/۷۷	۲
۱۰	(۴و۷)	۹/۴۳	۵
۱۱	(۵و۷)	۵/۶۶	۳
۱۲	(۶و۷)	۱۶/۹۸	۹

۳۰۷ ملاحظه می‌شود، مسیر بحرانی پروژه عبارتیت از: ۷-۵-۴-۳-۱ و با فرض استقلال زمان فعالیتهای مختلف از یکدیگر، زمان کل پروژه دارای توزیع گاما با پارامترهای ۲۷ = r و ۰/۵۳ = λ است.

۳۰۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله روش ارزیابی و بازبینی پروژه مورد بررسی قرارگرفته، ابتدا نقاط ضعف نوع سه‌زمانه آن مشخص شدند. سپس با فرض توزیع

گاما برای زمان هر فعالیت، سعی شد با استفاده از دو مکتب آمار کلاسیک و آمار بیزی این نقاط ضعف تاحد ممکن برطرف گردند. در انتها، توزیع احتمالی زمان کل پروژه و نحوه محاسبه پارامترهای آن از هر یک از این دو مکتب تعیین شدند.

درمورد مقایسه کاربرد آمار کلاسیک و آمار بیزی در روش پرت، می‌توان ادعا کرد که استفاده از آمار بیزی عملی‌تر است. زیرا به‌دلیل یکسان بودن پارامتر λ برای تمام فعالیتها در معادلات (۱۰۱۰۵)، ممکن است در جواب این دستگاه مقدار α_i کوچکتر یا مساوی یک‌دهم نشود که در این صورت زمانهای خوشبینانه و بدبینانه فعالیت i مفاهیم احتمالی خود را ندارند. ولی در کاربرد آماربیزی، در دستگاه معادلات (۱۰۳۰۶) مقادیر λ_i برای فعالیتهای مختلف می‌توانند متفاوت باشند و برای تخمین پارامتر مشترک λ از متوسط این مقادیر یعنی $\bar{\lambda}$ استفاده می‌شود که به‌این ترتیب اشکال فوق برطرف می‌شود. البته نتیجه کاربرد این دو مکتب درمورد مثال عددی این بخش تفاوت زیادی را نشان نمی‌دهند، زیرا پارامترهای توزیع زمان کل پروژه در هر دو مورد خیلی نزدیک بهم به‌دست‌آمده‌اند.

پاورقی :

1. Program Evaluation and Review Technique (PERT)
2. Bayesian Statistics
3. Prior Distribution
4. Posterior Distribution
5. Critical Path Method (CPM)
6. Judgmental Probability
7. Subjective Probability
8. The Optimistic Time
9. The Pessimistic Time
10. The Most Likely Time
11. α – Fractile
12. Chi – Square Distribution
13. Informative
14. Noninformative
15. The Generalized Maximum Likelihood Estimate
16. Earliest Start Time
17. Latest Completion Time

15. The generalized maximum likelihood estimate
16. Earliest start time
17. Latest completion time

منابع :

1- BERGER, J.O. : "Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis", Second Edition, Springer - Verlag, 1985.

2- MOOD, A.M. , GRAYBILL., F.A. and BOES, D.C.: "Introduction to the Theory of Statistics", Third Edition, McGraw-Hill, 1974.

3- TAHA, H.A.: "Operations Research: An Introduction", Third Edition, Macmillan Publishing Co., 1982.