

# انتقال گرما در پره‌های سوزنی و تعیین شرایط بهینه

دکتر مجید ملکی

دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی اصفهان

مهندس محمد شاهسون

دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی اصفهان

## چکیده

برای تعیین شرایط بهینه، انتقال گرما در پره‌های سوزنی مورد بررسی تحلیلی قرار گرفت. ابتدا شرایط لازم برای موثر بودن پره به دست آمد. در این رابطه معلوم شد که هرگاه مقدار  $\frac{h}{mk}$  کوچکتر از یک باشد، نصب پره روی سطح داغ انتقال گرما را افزایش می‌دهد. در حالی که مقادیر بزرگتر از یک باعث کاهش انتقال گرما می‌شود. سپس شرایط پره بهینه تحت دو شرط مرزی بررسی شد. این شرایط مرزی عبارتند از: (۱) پره با نوک عایق شده و (۲) پره‌ای که انتقال گرما از نوک آن به صورت همرفت انجام می‌شود. در حالت (۱) شرایط بهینه با مقدار ثابتی مشخص می‌شود و طول بهینه پره بیشترین مقدار را دارد. در حالی که در حالت (۲) شرایط بهینه به پارامتر بی بعد  $Bi_{2\delta}$  وابسته است.

## Heat Transfer Through Pin Fins and Determination of Optimum Conditions

M. Molki, Ph.D.

&

M. Shahsavan, M. Sc.

Mech. Eng. Dept., Esfahan Univ. of Tech.

## ABSTRACT

An analytical study was carried out to determine the optimum conditions for heat transfer through pin fins. First, the conditions required for an effective fin were obtained. In this connection, it was revealed that when the values of  $h/mk$  are less than unity, the fins would increase heat transfer from the hot surface, while the values greater than unity would decrease it. Then, the conditions for the optimum fin were examined under two boundary conditions. These conditions are:

1— insulated fin tip, and 2— convective heat transfer from the fin tip. With condition 1, the optimum situation is characterized by a constant value, and the optimum length of the fin has its largest value. With condition 2, however, the optimum condition depends on the dimensionless parameter,  $Bi_{2\delta}$ .

علائم یونانی	فهرست علائم
$\beta$ یک مقدار ثابت (معادله ۱۸)	a مساحت مقطع پره
$\delta$ شعاع پره	$Bi_2\delta$ عدد بیو (معادله ۴)
$\epsilon$ یک عدد حقیقی	h ضریب انتقال گرمای همرفت
$\varphi$ چگالی پره	k رسانندگی گرمایی
	l طول پره
شاخصهای پائین	m پارامتر پره (معادله ۲)
opt مقدار بهینه	M جرم پره
w دیوار	P محیط مقطع پره
a محیط	$q_{wA}$ آهنگ انتقال گرما
شاخصهای بالا	$q_{wA}^*$ آهنگ بی بعد انتقال گرما (معادله ۱۴)
+ بی بعد	t دما
	$T^+$ دمای بی بعد (معادله ۲)
	x مختصه طول در امتداد پره

**مقدمه**

یکی از روشهای افزایش انتقال گرما از سطحهای داغ استفاده از پره است. نصب پره روی یک سطح داغ، سطح کلی انتقال گرما را افزایش داده و باعث ازدیاد آهنگ انتقال گرما می شود. پره ها دارای شکل های هندسی متنوعی هستند که معمولاً "برحسب شکل هندسی مقطع، ثابت یا متغیر بودن سطح مقطع و مستقیم یا منحنی بودن آنها نامگذاری می شوند. برای مثال می توان از پره های مستطیلی، مثلثی، مستقیم، حلقوی و سوزنی نام برد. در این مقاله، انتقال گرما در پره های سوزنی را مورد بررسی قرار می دهیم. در این رابطه دو سؤال مهم مطرح می شود: (۱) تحت چه شرایطی نصب پره بر روی سطحها انتقال گرما را افزایش می دهد. به عبارت دیگر شرایط لازم جهت موثر بودن پره چیست؟

(۲) به ازای یک وزن ثابت، کدام پره سوزنی گرما را بیشتر انتقال می دهد. یعنی ابعاد بهینه وزنی برای پره سوزنی کدام است؟ هدف اصلی این مقاله تاکید بر دو سؤال فوق است و در این جا سعی می کنیم به آنها پاسخ دهیم. بعضی از جنبه های مسئله تعیین شرایط بهینه پره ها توسط پژوهشگران مورد توجه قرار گرفته است. در این رابطه می توان از مطالعاتی در زمینه پره های مستطیلی (۱)، پره های حلقوی (۲)، پره هایی که با مکانیزم تابشی گرما را انتقال می دهند (۳)، پره هایی که در درون آنها انرژی گرمایی تولید می شود (۴) و پره های حلقوی با پارامترهای گرمایی متغیر (۵) نام برد.

**فرمول بندی مساله**

تصویر شماتیک پره سوزنی در شکل (۱) نشان داده شده است. در این شکل، طول، مساحت مقطع، محیط مقطع، دمای پایه پره و دمای محیط به ترتیب با علائم  $a, p, a, l$  و مشخص شده اند. معادله دیفرانسیل حاکم بر انتقال گرمای رانشی به صورت زیر

است:

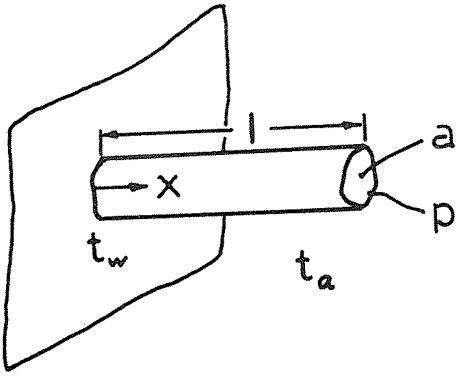
$$\frac{d^2 T^+}{dx^{+2}} - I^{+2} T^+ = 0 \quad (1)$$

در این رابطه:

$$T^+ = \frac{t - t_a}{t_w - t_a}, \quad x^+ = \frac{x}{l}, \quad I^+ = ml, \quad m^2 = \frac{hp}{ka} \quad (2)$$

در تحلیل حاضر از دو نوع شرط مرزی در نوک پره استفاده می کنیم. این دو شرط عبارتند از: (۱) انتقال گرما در نوک پره به صورت همرفت انجام می شود که در این صورت در  $x^+ = 1$

$$\frac{dT^+}{dx^+} = - \left( \frac{1}{2\delta^+} \right) Bi_2\delta T^+ \quad (3)$$



شکل (۱) - پره سوزنی با مقطع دلخواه یکنواخت

که در آن

$$\delta^+ = \frac{l}{\delta} \quad Bi_2 \delta = \frac{2h\delta}{k} \quad (4)$$

۲- نوک پره عایق است. در  $x^+ = 1$  داریم:

$$\frac{dT^+}{dx^+} = 0 \quad (5)$$

برای حل معادله (۱) به یک شرط مرزی دیگر نیز احتیاج است. این شرط از دمای پایه پره ( $T^+ = 1$  در  $x^+ = 0$ ) حاصل می شود. همان طوری که در بخشهای بعدی این مقاله ملاحظه خواهد شد، شرط مرزی (۲) به عنوان یک حالت خاص از حل مربوط به شرط مرزی (۱) مطرح می شود. اکنون به بررسی تحلیلی این مساله می پردازیم.

### حل تحلیلی

برای پاسخگویی به دو سئوالی که در مقدمه مطرح شد، بخش حاضر را به دو قسمت تقسیم می کنیم. ابتدا شرایط لازم جهت مؤثر بودن پرها را مطرح می کنیم و سپس به تعیین ابعاد بهینه وزنی برای پرها می پردازیم.

### الف - شرایط لازم جهت مؤثر بودن پره

از آنجا که استفاده از پرها به منظور افزایش انتقال گرما از سطحها انجام می شود، نصب پره هنگامی مؤثر تلقی می گردد که انتقال گرما از سطح پره دار نسبت به انتقال گرما از سطح لخت (بدون پره) بیشتر باشد. لذا می توان گفت پره مؤثر پره ای است که افزایش طول آن سبب افزایش انتقال گرما شود (۶). و بالعکس، اگر افزایش طول پره باعث کاهش انتقال گرما گردد، پره غیر مؤثر است و نصب آن ضرورت ندارد. در ارتباط با این موضوع به ارائه حل معادله دیفرانسیل پره می پردازیم.

از حل معادله (۱) با شرط مرزی معادله (۳) (انتقال گرمای همرفتی در نوک پره) برای پره ای با مقطع یکنواخت، می توان توزیع دما و از آنجا عبارت زیر را برای انتقال گرما به دست آورد (۷):

$$q_w^+ = \frac{\frac{h}{mk} + \tanh l^+}{1 + \frac{h}{mk} \tanh l^+} \quad (6)$$

در این رابطه، آهنگ بی بعد انتقال گرما  $q_w^+$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$q_w^+ = \frac{q_w}{mka(t_w - t_a)} \quad (7)$$

اکنون ببینیم به ازای چه طولی آهنگ انتقال گرما بیشینه است. یعنی طول بهینه پره چقدر است. برای این کار باید از  $q_w^+$  نسبت به  $l^+$  مشتق گرفته و آن را مساوی صفر قرار دهیم  $dq_w^+/dl^+ = 0$ . نتیجه می شود:

$$\frac{(\frac{h}{mk})^2 + (\frac{h}{mk}) \tanh l^+}{1 + (\frac{h}{mk}) \tanh l^+} = 1 \quad (8)$$

این تساوی به ازای هریک از دو حالت  $\frac{h}{mk} = 1$  یا  $\rightarrow \infty$  برقرار است. در حالت اول ( $\frac{h}{mk} = 1$ ) نتیجه می شود  $q_w^+ = 1$  یا  $q_w^+ = ha(t_w - t_a)$ . رابطه اخیر، انتقال گرما از سطحی برابر با سطح مقطع پره در حالت بدون پره را نشان می دهد. چنین پره ای را بی تفاوت می گوئیم. زیرا در این حالت آهنگ انتقال گرما مستقل از طول پره است. یعنی از دیاد یا کاهش طول پره هیچ تاثیری بر آهنگ انتقال گرما ندارد.

در حالت دوم ( $l^+ \rightarrow \infty$ ) دوباره نتیجه می شود  $q_w^+ = 1$ . بنابراین منحنی (خط افقی)  $q_w^+ = 1$ ، مجانب منحنیهای  $q_w^+$  به ازای مقادیر مختلف پارامتر  $\frac{h}{mk}$  است.

نشان دادیم که به ازای  $\frac{h}{mk} = 1$  پره بی تفاوت است. حال نشان می دهیم که به ازای  $\frac{h}{mk} < 1$  پره مؤثر بوده و به ازای  $\frac{h}{mk} > 1$  پره غیر مؤثر است.

ابتدا فرض کنید  $\frac{h}{mk} < 1$  باشد. در این صورت می توان عدد حقیقی  $0 < \epsilon < 1$  را به نحوی انتخاب کرد که  $1 - \epsilon = \frac{h}{mk}$  باشد. در این صورت:

$$q_w^+ = \frac{1 - \epsilon + \tanh l^+}{1 - \epsilon + \tanh l^+ \tanh l^+} \quad (9)$$

با توجه به این که  $0 < \tanh l^+ < 1$ ، مخرج کسر معادله (۹) از صورت بزرگتر بوده و آهنگ انتقال گرما  $q_w^+$  از یک کمتر است. ضمناً با افزایش طول پره،  $q_w^+$  به سمت یک میل می کند. بنابراین در این حالت پره مؤثر است.

به همین ترتیب در حالت  $\frac{h}{mk} > 1$  با انتخاب عدد حقیقی  $\epsilon > 0$  و  $1 + \epsilon = \frac{h}{mk}$  می توان نوشت:

$$q_w^+ = \frac{1 + \epsilon + \tanh l^+}{1 + \epsilon \tanh l^+ + \tanh l^+} \quad (10)$$

در این رابطه مخرج کسر از صورت کمتر بوده و آهنگ انتقال گرما از یک بیشتر است. با افزایش طول پره، آهنگ انتقال گرما کاهش یافته و به سمت یک میل می کند. لذا پره در این حالت مؤثر نیست. اکنون که معیار مناسبی برای تشخیص مؤثر بودن یا نبودن پره سوزنی در اختیار داریم، به تعیین ابعاد بهینه وزنی آن می پردازیم.

### ب- تعیین ابعاد بهینه وزنی برای پره سوزنی

منظور از ابعاد بهینه وزنی این است که به ازای جرم پره  $M$  داده شده، رابطه طول و قطر آن را به نحوی تعیین کنیم که آهنگ انتقال گرما از آن بیشینه شود.

ابعاد بهینه وزنی را برای پره سوزنی در دو حالت پیدا می کنیم. این دو حالت عبارتند از: (۱) انتقال گرما در نوک پره به صورت همرفت انجام می شود و (۲) نوک پره عایق است.

ابتدا فرض کنید نوک پره عایق شده است. در این حالت یک پره سوزنی به طول  $l$  و مقطع دایره به قطر  $2\delta$  را در نظر بگیرید. آهنگ انتقال گرما برابر است با (۷، ص ۹۵):

$$q_w = mka(t_w - t_a) \tanh ml \quad (11)$$

که در آن  $m^2 = \frac{2h}{k\delta}$  است. از طرفی اگر چگالی پره را  $\rho$  بنامیم، جرم پره برابر است با:

$$M = \rho \pi \delta^2 l \quad (12)$$

از رابطه (12) طول پره را به دست آورده و در رابطه (11) قرار می دهیم. پس از ساده کردن نتیجه می شود:

$$q_w^* = (I^+)^{-0.6} \tanh I^+ \quad (13)$$

که در آن

$$q_w^* = \frac{q_w}{\pi \sqrt{2kh} (t_w - t_a) \left( \frac{M}{\rho \pi} \sqrt{\frac{2h}{k}} \right)^{0.6}} \quad (14)$$

شرط بهینه بودن پره این است که  $dq_w^*/dI^+ = 0$  در این رابطه به جای  $q_w^*$  از رابطه (13) مقدار قرار داده و پس از انجام عملیات جبری خواهیم داشت:

$$I_{opt}^+ = 0.9193 \quad (15)$$

که در حقیقت طول بهینه پره یا رابطه میان طول و قطر پره را برای شرایط بهینه تعیین می کند. با قرار دادن این مقدار بهینه  $I_{opt}^+$  در رابطه (13)، انتقال گرمای بهینه برابر است با:

$$q_{w/opt}^* = 0.7631 \quad (16)$$

حال یک پره سوزنی به طول 1 و به قطر 2δ را در نظر می گیریم که انتقال گرما به طریق همرفت از انتهای آن صورت می گیرد. آهنگ انتقال گرما قبلاً توسط رابطه (6) بیان شد. اکنون با استفاده از روابط (6) و (12) می توان نشان داد:

$$q_w^* = \frac{\beta I^{+0.8} + I^{+0.6} \tanh I^+}{1 + \beta I^{+0.2} \tanh I^+} \quad (17)$$

در این رابطه:

$$\beta = 0.6028 \left( \frac{h}{k} \right)^{0.6} \left( \frac{M}{\rho} \right)^{0.2} \quad (18)$$

یک مقدار ثابت تلقی می شود.

برای بهینه بودن پره باید  $dq_w^*/dI^+ = 0$  باشد. در این رابطه به جای  $q_w^*$  از رابطه (17) مقدار قرار می دهیم. پس از ساده کردن، رابطه زیر نتیجه می شود.

$$\begin{aligned} & (I^+ + 0.2 Bi_{2\delta}^{0.5} + 0.25 Bi_{2\delta} I^+) \tanh^2 I^+ \\ & + 0.6 (1 + 0.25 Bi_{2\delta}) \tanh I^+ + (0.25 Bi_{2\delta} I^+ \\ & + 0.4 Bi_{2\delta}^{0.5} - \alpha) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

در این رابطه  $Bi_{2\delta}$  عدد بیواست که تعریف آن در معادله (4) مشاهده می شود. رابطه میان  $I_{opt}^+$  و  $Bi_{2\delta}$  به صورت زیر است:

$$\beta (I^+)^{-0.2} = 0.5 Bi_{2\delta}^{0.5} \quad (20)$$

رابطه (19) نشان می دهد که مقدار بهینه  $I_{opt}^+$  (یعنی  $I_{opt}^+$ ) به عدد بیواست بستگی دارد. اگر در این رابطه به جای عدد بیواست صفر قرار دهیم، نتیجه می شود:

$$I^+ \tanh^2 I^+ + 0.6 \tanh I^+ - I^+ = 0 \quad (21)$$

به سهولت می توان نشان داد که مقدار  $I_{opt}^+ = 0.9193$  (معادله (15))، مربوط به پره ای که نوک آن عایق شده، در این رابطه صدق می کند.

برای یافتن  $I_{opt}^+$  برای پره ای که انتقال گرما از انتهای آن به صورت همرفت انجام می شود، باید به ازای مقادیر معین عدد بیواست معادله (19) را با روش سعی و خطا حل کرد. برای مثال جدول زیر مقادیر نمونه ای را نشان می دهد:

$Bi_{2\delta}$	0	0.001	0.01	0.05
$I_{opt}^+$	0.9193	0.8818	0.7900	0.5435

ملاحظه می شود که با افزایش عدد بیواست، طول بهینه پره  $I_{opt}^+$  کاهش می یابد. با توجه به این که:

$$\frac{1}{\delta} = \frac{I^+}{\sqrt{Bi_{2\delta}}} \quad (22)$$

چنانچه عدد بیواست صفر تا 0.05/ افزایش یابد، نسبت  $\frac{1}{\delta}$  از بی نهایت تا 2/43 کاهش می یابد. یعنی برای شرایط بهینه، پره کوتاه تر و ضخیم تر می شود.

#### بحث روی نتایج

تغییرات آهنگ انتقال گرما بر حسب طول پره برای مقادیر مختلف پارامتر  $\frac{h}{mk}$  در شکل (2) نشان داده شده است. همانطوری که می بینید، به ازای  $\frac{h}{mk} < 1$  با افزایش طول پره، آهنگ انتقال گرما افزایش یافته و تنها در این حالت است که پره مؤثر است. به ازای  $\frac{h}{mk} > 1$ ، افزایش طول پره انتقال گرما را عملاً کاهش می دهد و نباید از پره استفاده شود. لازم به ذکر است که حالت بی تفاوت  $\frac{h}{mk} = 1$  بجانب همه منحنی ها است. معادله (6) به ازای مقدار خاص  $\frac{h}{mk} = 0$  به صورت:

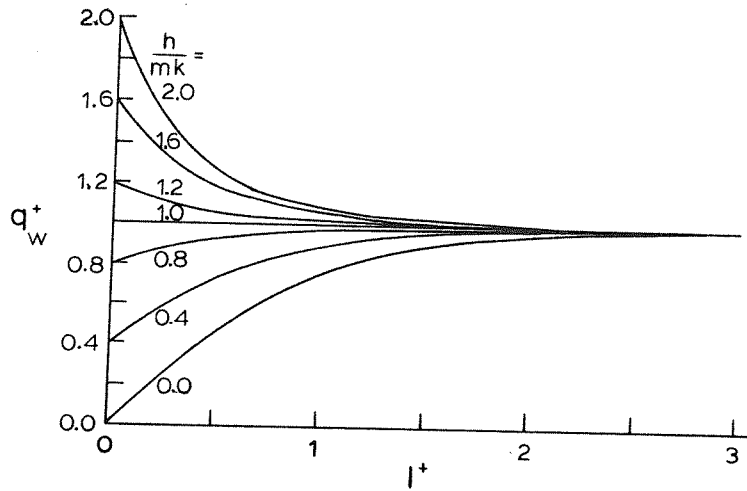
$$q_w^+ = \tanh I^+ \quad (23)$$

درمی آید. این رابطه مربوط به پره ای است که انتهای آن عایق شده است (7، ص 95). بنابراین در شکل (2) منحنی مربوط به  $\frac{h}{mk} = 0$  معرف معادله (23) است.

باید متذکر شد که پارامتر  $\frac{h}{mk}$  با عدد بیواست برای پره سوزنی توسط رابطه (4) تعریف می شود به صورت زیر در ارتباط است.

$$\frac{h}{mk} = 0.5 Bi_{2\delta}^{0.5} \quad (24)$$

بنابراین مطالبی که در بالا به آن اشاره شد به کمک مقادیر مختلف عدد بیواست نیز قابل تکرار است.



شکل ۲- توزیع آهنگ انتقال گرما برای تعیین پره موثر، بی تفاوت و غیرموثر.

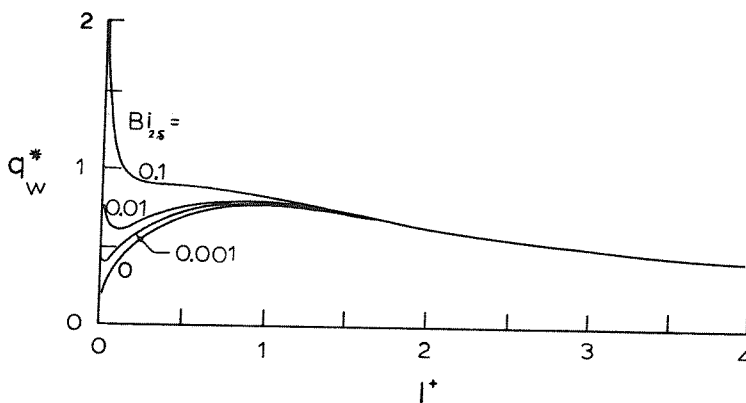
(ماکزیمم) این منحنی در  $(l_{opt}^+, q_{w,opt}^*) = (0.9193, 0.7631)$  قرار دارد و شرایط بهینه را نشان می‌دهد. نکته قابل توجه در مورد منحنی  $Bi_{2\delta} = 0$  این است که تغییرات این منحنی در نقطه بهینه تدریجی است و چنانچه در انتخاب پره بهینه اندکی از نقطه اوج منحرف شویم، تاثیر چندانی بر  $q_w^*$  نخواهد گذاشت.

منحنی تغییرات  $q_w^*$  برحسب  $l^+$  برای پره‌ای که انتقال گرما در نوک آن به صورت همرفت انجام می‌شود برای مقادیر مختلف  $Bi_{2\delta}$  در شکل (۳) رسم شده است (روابط (۱۷) و (۲۵)). همانطوری که در شکل دیده می‌شود، رفتار عمومی منحنیها به نحوی است که با افزایش  $l^+$  ابتدا آهنگ انتقال گرما افزایش یافته و سپس بعد از عبور از نقطه بهینه، که توسط رابطه (۱۹) بیان می‌شود، کاهش می‌یابد. مفهوم این تغییرات این است که هرگاه پره سوزنی را بسیار کوتاه و ضخیم، یا بیش از اندازه باریک و بلند انتخاب کنیم، عملکرد پره از شرایط

از بحث فوق نتیجه می‌گیریم که استفاده از پره به منظور افزایش انتقال گرما از یک سطح داغ هنگامی موثر است که مقدار  $\frac{h}{mk}$  کمتر از یک باشد. هرگاه این کمیت مساوی یا بیشتر از یک باشد، نصب پره بر روی سطح، انتقال گرما را کاهش می‌دهد و نباید از پره استفاده کرد.

در اینجا لازم است به مفهوم فیزیکی کمیت  $\frac{h}{mk}$  نیز اشاره شود. این کمیت که یک گروه بی بعد است معرف نسبت مقاومت رسانشی پره به مقاومت همرفتی است. لذا مقادیر بزرگ این کمیت نشان می‌دهد که جنس پره برای انتقال رسانشی گرما مناسب نیست و با نصب پره انتقال گرما کاهش می‌یابد. به همین ترتیب مقادیر کوچک این کمیت با افزایش انتقال گرما همراه است.

در رابطه با پره بهینه وزنی که نوک آن عایق شده است، شکل (۳) معادله (۱۳) را توسط  $Bi_{2\delta} = 0$  نشان می‌دهد. نقطه اوج



شکل ۳- توزیع آهنگ انتقال گرما برای تعیین پره بهینه وزنی