روش کامپیوتری محاسبه ماتریس جردن

مهندس علیرضا کریمی

دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکده مهندسی برق دانشگاه صنعتی امیر کبیر

دکتر سیدکمال‌الدین نیکروش

استاد دانشکدهٔ مهندسی برق دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده :

در مطالعه سیستمهای کنترل خطی با استفاده از فضای وضعیت ، مقادیر ویژه سیستم نقش بسیار مهمی را ایفا می‌کنند . ساده‌ترین روش حل معادلات وضعیت ، قطری کردن ماتریس سیستم آن است که عناصر قطر اصلی ماتریس به‌دست آمده ، مقادیر ویژه سیستم می‌باشند . در حالتی که بعضی از مقادیر ویژه سیستم ، تکراری باشند ، ماتریس تبدیل شده در بسیاری از موارد ، علاوه بر داشتن مقادیر ویژه در روی قطر اصلی ، دارای عدد "۱" در بالای بعضی از عناصر قطر اصلی خود خواهد بود . وجود یا عدم وجود عدد یک و محل آنها درصورت وجود ، با روشهای تحلیلی خاصی مشخص می‌شود . در این مقاله یک برنامه کامپیوتری به‌زبان مخصوص* MATLAB برای بدست آوردن این ماتریس با استفاده از مشخصه Segre ارائه شده است . با توجه به این‌که بسته نرم‌افزاری MATLAB در شکل موجود قابلیت محاسبه ماتریس جوردن را ندارد ، فایل جدیدی برای به‌وجود آوردن این قابلیت با نام JORDAN در بسته نرم‌افزاری موجود در دانشکده مهندسی برق دانشگاه صنعتی امیرکبیر ایجاد شده است . در مجلات علمی که اخیراً منتشر شده است ، بسته نرم‌افزاری جدیدی ** معرفی شده است که به‌نظر می‌رسد باید قابلیت محاسبه تبدیل جوردن ماتریسها را داشته باشد .

Computer Evaluation of Jordan Form

A. R. Karimi, M Sc

&

K. Y. Nikravesh, Ph. D.

Elect. Eng. Dept. Amirkabir Uni. of Tech

ABSTRACT

In study of linear systems, the eigenvalues play an important role. Diagonalization of the system's matrix is the simplest form in solving the state equations. In the case of repeated eigenvalues, the diagonalization procedure will end up to the Jordan form. This paper presents a computer program for evaluating the Jordan form using MATLAB package. In the case of nonrepeated eigenvalues, the Jordan file will obviously evaluate the diagonal form.

The new ability is added to the MATLAB package of Electrical Engineering Department of Amirkabir University of Technology

مقدمه :

به‌دست آوردن پاسخ سیستمهای کنترل خطی وابستگی نزدیکی به مقادیر ویژه سیستم دارد. در مطالعه این‌گونه سیستمها با استفاده از روش متغیرهای وضعیت ، مقادیر ویژه از ماتریس سیستم حاصل می‌کردند در صورتی که این مقادیر ویژه تکراری نباشند ، با استفاده از روش ماتریس‌های مشابه می‌توان سیستم مورد مطالعه را به‌سیستمی با ماتریس

قطری تبدیل نمود (۱). حسن این تبدیل در به‌دست آوردن سریع پاسخ سیستم اصلی می‌باشد.

در صورتی که بعضی ازمقادیر ویژه ماتریس سیستم تکراری باشند، ماتریس به‌دست آمده علاوه بر داشتن مقادیر ویژه در قطر اصلی‌دارای اعداد"یک" در بعضی از عناصر بالای قطر اصلی خواهدبود. ماتریس به‌دست آمده ماتریس جوردن نامیده می‌شود. وجود یا عدم وجود اعداد"یک" در عناصر بالای قطر اصلی بستگی به‌این دارد که چگونه یک‌مقدار ویژه تکراری درگروه‌های مختلف قرار می‌گیرد. به‌عنوان‌مثال اگر یک مقدار ویژه ماتریس سیستم مثلا" سه‌بار تکرار شده باشد، این سه عدد ممکن است با هم یک گروه تشکیل داده و یا دوتای آنها یک گروه و دیگری یک گروه خاص خود بسازد و یا در حالتی هریک از آنها یک گروه برای خود تشکیل دهند. به‌دست آوردن طرز تشکیل‌گروه‌ها با استفاده از روشهای تحلیلی انجام می‌شود (۲و۱)

یک روش به‌دست آوردن ماتریس جوردن توسط Gupta داده شده است. گویا این روش در تز دکترای O'Donnell به‌صورت کامپیوتری ارائه (۲) شده است که متاسفانه در دسترس نمی‌باشد.

روش Segre :

در این روش می‌توان وابستگی ریشه‌های تکراری بهم را با انجام یک سری عملیات ماتریسی به‌دست آورد. شیوه عمل به‌این ترتیب است‌که مرتبه (Rank) توانهای مختلف ماتریس $[A-\lambda I]$ (A ماتریس سیستم و λI ماتریس قطری مقادیر ویژه تکراری است) را به‌دست آورده و هنگامی که تفاضل دو مرتبه در توان متوالی صفر شد، رشته‌ای از تفاضل مرتبه‌های متوالی تشکیل داده و برابر مقدار عددی هریک از عناصر این رشته ستاره‌هایی به‌صورت سطری رسم می‌کنیم. تعداد ستاره‌های قرار گرفته در هر ستون طرز گروه شدن مقادیر ویژه را نشان می‌دهد. روش کار را با یک مثال مشخص می‌کنیم:

فرض کنید که ریشه‌های معادله مشخصه سیستمی λ_1 و λ_1 و λ_1 و λ_1 و λ_1 و λ_2 بوده و مرتبه توانهای مختلف $A-\lambda I$ به‌صورت زیر باشند.

مرتبه توان k ام $\quad r_k = \text{rank}\,[A-\lambda I]^k$

$r_0=6,\ r_1=4,\ r_2=2,\ r_3=1,\ r_4=1$

با توجه به‌مساوی شدن r_3 و r_4 به‌توان رساندن $A-\lambda I$ را متوقف می‌کنیم و سپس رشته زیر را تشکیل می‌دهیم.

$$(r_0-r_1,\ r_1-r_2,\ r_2-r_3,\ r_3-r_4) = (2,2,1,0)$$

حالا به‌ازاء هر عضو بردار بالا در سطرهای متوالی علامت ستاره قرار می‌دهیم.

★ ★
★ ★
★

دیاگرام ستاره‌ای فوق که به‌نام دیاگرام Ferrer نامیده می‌شود برای این مثال به‌صورت مقابل می‌باشد.

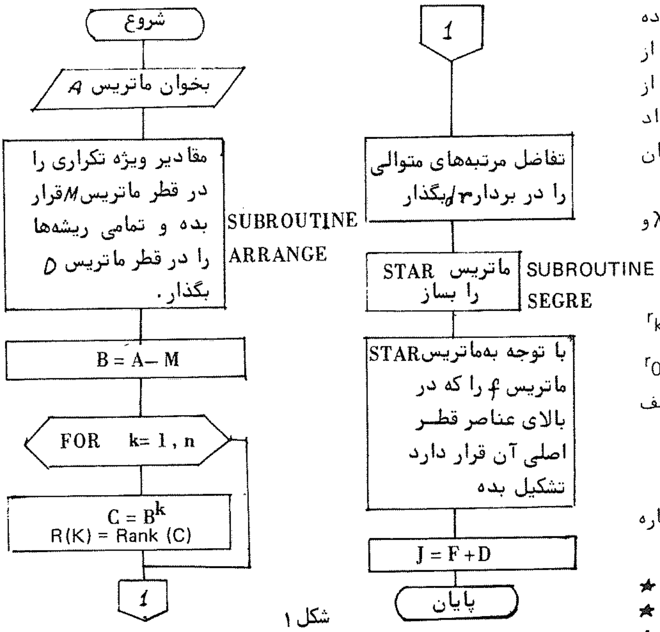
ترکیب ستاره‌های نشان داده شده مشخص می‌کند که از پنج مقدار ویژه مشترک، دو دسته یکی سه‌تایی و دیگری دوتایی خواهند بود. بدین‌ترتیب بلوکهای ماتریس جوردن با مقادیر ویژه مربوطه و عناصر یک در هر بلوک برای این مثال به‌صورت زیر مشخص می‌شوند.

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_1 & 1 & \\ & & & & \lambda_1 & \\ & & & & & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

همان‌طوری که بیان شد، روش O'Donnell به‌صورت کامپیوتری توسط نامبرده انجام شده است، لیکن با توجه به‌عدم دسترسی به‌کار کامپیوتری فوق‌الذکر، سعی گردید این روش با استفاده از قابلیتهای بسته نرم‌افزاری MATLAB که جدید و پیشرفته بوده کامپیوتری شده و در دسترس همگان قرار گیرد. با توجه به‌جدیدبودن MATLAB این روش مطمئنا" با روش Segre متفاوت خواهد بود.

روش کامپیوتری محاسبه ماتریس جوردن :

در اینجا یک روش کامپیوتری برای به‌دست آوردن ماتریس جوردن با استفاده از روش Segre و بسته نرم‌افزاری MATLAB ارائه می‌شود. برای مفهوم شدن بیشتر، ابتدا فلوچارت کلی آن رسم می‌شود.



شکل ۱

برای اجرای برنامه‌ ابتدا باید ماتریس سیستم را با نام A تعریف کرد و سپس با وارد کردن کلمه JORDAN ماتریس J حساب شده و روی صفحه ظاهر می‌گردد.

جزئیات اجرای برنامه به‌صورت زیر می‌باشد :

در ابتدای برنامه دستورالعمل $(x, d) = \text{eig}\,(a)$ را مشاهده

می‌کنیم . با این دستور، مقادیر ویژه ماتریس a در روی قطر اصلی ماتریس مربعی d قرار می‌گیرند . بردارهای ویژه نیز در ستونهای ماتریس x جای خواهند گرفت (در حالتی که ریشه‌های تکراری داشته‌باشیم ، ماتریس x دارای چند ستون نظیر هم خواهد بود) .

برای به‌دست آوردن ابعاد ماتریس از دستورالعمل Size (a) استفاده می‌کنیم . در این دستور، سطر و ستون ماتریس a در یک زوج مرتب قرار می‌گیرند . با توجه به‌مربعی بودن ماتریس a یکی از این اعداد کافی خواهد بود . بنابراین از دستور n = max (size (a) استفاده شده است .

با توجه به‌این که $rank (A-\lambda I) = n$ است در سطر بعدی $r(I) = n$ قرارداده شده‌است . (زیرا : $rank(I) = n$ و $(A-\lambda I) = I$

در سطر بعدی کلیه عناصر ماتریس d (مقادیر ویژه) تا چهار رقم گرد شده‌اند . دلیل این امر این است که مقادیر ویژه از حل دستگاههای معادلات به‌دست می‌آیند و ممکن است دو ریشه تکراری که در اصل با هم برابرند ، دررقمهای ششم یا هفتم به‌بعد (به‌خاطراستفاده از روشهای عددی) با هم اختلاف داشته باشند . با این دستورالعمل،از اختلال در کار برنامه جلوگیری می‌شود .

در سطر بعدی عناصر قطری ماتریس d(مقادیر ویژه) به ترتیب صعودی مرتب می‌شوند. این عمل توسط دستور d= SORT (diag (d)) انجام می‌شود . سپس وارد زیربرنامه ARRANGE می‌شویم که در قسمت زیر به‌توضیح آن می‌پردازیم .

SUBROUTINE ARRANGE : کار اصلی‌این‌زیربرنامه‌این است‌که عناصر تکراری ماتریس را تشخیص داده و آنها را در کنار هم و در اول بردار قرار می‌دهد . همچنین در صورت وجود مقادیر ویژه تکراری ماتریس λ (که در این برنامه با نام M مشخص شده است) را تشکیل می‌دهد این ماتریس n x n بوده و تمام عناصر قطر اصلی آن برابر با مقدار ویژه تکراری است . در حلقه اول برنامه، وجود ریشه تکراری تشخیص داده می‌شود و ماتریس M تشکیل می‌گردد . آن‌گاه درقسمتهای بعدی مقادیر ویژه تکراری در ابتدای بردار d قرار می‌گیرند .

بعد ازخارج شدن از زیربرنامه ARRANGE مقادیرزیرحساب می‌شوند :
$b = a-M$, $r(2) = rank(b)$

برای مقادیر دیگر (r (k که k⟩ 2 باشد ، از یک حلقه استفاده شده است (علت جدا کردن (۱) r و (۲) r از داخل حلقه این است که محاسبه توان در MATLAB به‌طریقی است که قادر به‌محاسبه‌توان‌های صفر و یک نمی‌باشد) بعد از محاسبه (3) r تا (r (n تفاضل مرتبه‌های متوالی توسط حلقه بعدی در بردار dr قرار می‌گیرد .

در قسمت بعدی ماتریس STAR از روی بردار dr به‌دست می‌آید به‌این ترتیب‌که ازعناصر dr(i) به ازاء i = 1 , ... , N یکی‌کم شده‌وبه (STAR (K اضافه می‌گردد تا این که عناصر dr صفر شوند این کار برای K از یک تا n اجرا می‌شود .

SUBROUTINE SEGRE : در این زیر برنامه ماتریس f از روی ماتریس STAR تشکیل می‌شود . به‌این‌ترتیب که اگر اولین عنصر بردار STAR مثلاً" برابر ۲ باشد عناصر (۲، ۱) f و (۲،۳) f برابر یک قرار داده می‌شوند و به‌همین‌ترتیب عمل ادامه می‌یابد تا ماتریس n x n ,f تشکیل شود .

در پایان با جمع ماتریس f با ماتریس d که شامل کلیه مقادیر ویژه است ماتریس J که جواب برنامه است به‌دست می‌آید . لیست برنامه این فلوچارت در شکل ۲ داده شده است .

```
%   This program computes Jordan's matrix with use of
%   Segre's method.
%   Program is written in MATLAB and executable on all
%   IBM PC/XT & AT compatible that have this package.
[x,d]=eig(a);
n=max(size(a));
r(1)=n;
d=round(1000*d)/1000;
d=sort(diag(d));

arrange

d=diag(d);
m=diag(m);
b=a-m;
r(2)=rank(b);
m=n+1;
for k=3:m
c=b^(k-1);
r(k)=rank(c);
end
%    IN THIS PART DIFFERENCE OF RANKS ARE COMPUTED
for p=1:n
dr(p)=r(p)-r(p+1);
end

%    IN THIS PART OF PROGRAM STARS ARE FORMED
for k=1:n
         star(k)=0;
         for i=1:n
                  if dr(i)~=0,
                           dr(i)=dr(i)-1;
                           star(k)=star(k)+1;
                  end
         end
end

clear b;clear c;clear r;clear dr

segre

j=f+d
clear f
```

```
          %    SUBROUTINE ARRANGE
          q=1;t1=0;
          for i=1:n-1
                   if d(i)==d(i+1),
                            if i==1,
                                     t1=1;
                            end
                            t=i;
                            q=q+1;
                            for p=1:n
                                     m(p)=d(t);
                            end
                   end
          end
          for i=1:q
                   nd(i)=d(t);
          end
          if t1~=1,
                   for i=1:t-1
                            nd(q+1)=d(i);
                            q=q+1;
                   end
          end
          if q~=n,
                   for i=q:n
                            nd(i)=d(i);
                   end
          end
          d=nd;
          clear nd
          %  SUBROUTINE SEGRE
          h=-1;
          for k=1:n
                   star(k)=star(k)-1;
                   if star(k)>0,
                   l=h+2;
                   h=star(k)+h+1;
                            for i=l:h
                                     f(i,i+1)=1;
                            end
                   end
          end
          f(n,n)=0;
```

پاورقی :

*MATLAB یک بسته نرم‌افزاری است که بطور وسیعی قابلیت انجام عملیات ریاضی را دارد.

** بسته نرم‌افزاری موسوم Matrix X

منابع :

۱ ــ یادداشتهای مربوط به‌درس کنترل مدرن ۱۳۶۷ دکتر نیک‌روش ــ دانشکده مهندسی برق دانشگاه صنعتی امیرکبیر

2. S.C. Gupta " Transform and State Variable Methods in Linear System" John Wiloy, 1966, PP. 257.