توسعه مدلهای نمایی صف با پارامترهای فازی

فرهاد قاسمی
استاد
دانشکده، دانشگاه صنعتی شریف

مقصود امیری
دانشجوی دکتری
مهندسی صنایع دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم و تحقیقات تهران

چکیده

تحقیقاتی در مورد مدلهای صف M/M/c با پارامترهای فازی مثلثی انجام یافته که برای معیارهای صف نتایج فازی مثلثی را نشان داده اند که دارای خطای بیشتر می باشند. در این مقاله ما برای معیارهای صف M/M/c با پارمترهای فازی نتایج فازی مثلثی دیگری ارائه داده و توسط شبیه سازی نشان می دهیم که نتایج ما با ارزش و دارای خطای کمتر می باشد. همچنین مدلهای صف $M/M/\infty$ با پارامترهای فازی مثلثی نیز بحث شده و نتایج جدیدی در مورد این مدلها با حالت فازی نشان داده می شود. و در ادامه به بیان مثالهای عددی پرداخته می شود.

کلمات کلیدی

مدل های صف با پارامترهای فازی، M/M/C، $M/M/\infty$ ، مدل های صف در حالت پایدار

Development of Exponential Queuing Models with Fuzzy Parameters

M. Amiri
Ph. D. Sutdent
Industrial Engineering Tehran Science & Research Unit, Azad University

F. Ghasemi
Professor
Industrial Engineering Department, Sharif University

Abstract

Researches on M/M/C Queuing models with triangular fuzzy parameters show that triangular fuzzy results for queue attributes provide large errors. In this paper, M/M/C queue attributes with fuzzy parameters that result in another triangular fuzzy are proposed and with simulation proved that results have more validity with lower error. Also, $M/M/\infty$ quing models with triangular fuzzy parameters are discussed and new results of this models with numerical examples are showed.

Keywords

Queuing Models with Fuzzy Parameters, M/M/C, $M/M/\infty$, Steady-State Queuing Models.

مقدمه

انسانها در زندگی روزمرهٔ خود با انواع مختلف صف، که به از بین رفتن وقت، نیرو و سرمایهٔ آنها می انجامد، روبرو می شوند. در زندگی می توان صفهای حاصل از ترافیک شهری و نیز صفهایی را که در فرودگاهها، بنادر، مؤسسات مخابراتی و در پشت فرایندهای تولید، تشکیل می شوند نام برد.

نظریهٔ صف که به مطالعه از دیدگاه ریاضی می پردازد، تأثیر عوامل تشکیل دهندهٔ صف و راههای منطقی کاهش زمان انتظار را بررسی می کند. اگر چه هیچگاه نمی توان صف را کاملاً از میان برد، اما می توان ضایعات ناشی از آن را حتی الامکان کاهش داد.

در این مقاله هدف، بررسی یک سیستم صف با پارامترهای فازی می باشد.

فرض کنید یک صف و چند سرویس دهنده داریم که زمان بین دو ورود دارای توزیع نمایی با پارامتر فازی $\tilde{\lambda}$ و مدت زمان سرویس دارای توزیع نمایی با پارامتر فازی $\tilde{\mu}$ می باشد. می خواهیم این سیستم صف را در حالت پایدار بررسی کنیم. یعنی متوسط طول صف فازی و متوسط تعداد در سیستم فازی و متوسط زمان انتظار در صف و سیستم را محاسبه کنیم ومسلماً تمامی خروجی ها فازی خواهند بود. کارهای انجام شده در زمینه سیستمهای صف فازی به شرح زیر می باشد.

- مسئله M/M/1 **فازی توسط آقایان** Yamazaki و Gen و Tsujimura و Jo بررسی شده است که در این زمینه می توان مرجع [۱] را معرفی کرد که در اینجا برای معیارهای صف نتایج فازی مثلثی ارائه داده اند که از طریق شبیه سازی نتایج فازی مثلثی انجام شده دارای خطای بیشتر می باشد.
- مسئله M/M/c **فازی توسط آقایان** Yamazaki و Gen و Tsujimura و Jo بررسی شده است که در این زمینه می توان مرجع [۲] را معرفی کرد که در اینجا برای معیارهای صف نتایج فازی مثلثی ارائه داده اند و کاربرد آن را در شبکه های صف نشان داده اند که از طریق شبیه سازی نتایج فازی مثلثی انجام شده دارای خطای بیشتر می باشد.

در مقاله حاضر علاوه بر مدلهای M/M/c فازی مدلهای M/M/∞ فازی نیز بررسی شده است و نتایج جدیدی در مورد این مدلها با حالت فازی نشان داده خواهد شد و از طریق شبیه سازی نشان می دهیم که نتایج مابا ارزش می باشد.

۱ـ تعاریف و نمادگذاری

نمادهای زیر در این مقاله استفاده شده است:

$\tilde{\pi}_n$ = احتمال این که n نفر در سیستم باشد در درازمدت.

$\tilde{\lambda}_n$ = نرخ ورود مشتری به سیستم اگر n نفر در سیستم باشد در دازمدت.

$\tilde{\tilde{\lambda}}$ متوسط نرخ ورود مشتری به سیستم در درازمدت.

$\tilde{N}$ = متوسط تعداد افراد درسیستم در درازمدت.

$\tilde{\mu}$ = متوسط نرخ خدمت دهی در درازمدت.

$\widetilde{NQ}$ = متوسط تعداد افراد در صف در دراز مدت.

$\tilde{W}$ = متوسط زمان انتظار هر مشتری در سیستم در دراز مدت.

$\widetilde{WQ}$ = متوسط زمان انتظار هر مشتری در صف در درازمدت.

جائیکه: ~ فازی بودن را نشان می دهد.

روابط لیتل فازی:

$$\tilde{N} = \widetilde{NQ} + \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}} \qquad \tilde{W} = \frac{\tilde{N}}{\tilde{\tilde{\lambda}}}$$

$$\widetilde{WQ} = \frac{\widetilde{NQ}}{\tilde{\tilde{\lambda}}} \qquad \tilde{W} = \widetilde{WQ} + \frac{1}{\tilde{\mu}}$$

تعریف زیر را Laarhoven و Pedrycz می باشد [۴].

تعریف ۱ـ اگر $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ یک عدد فازی مثلثی باشد، آنگاه داریم:

$$\exp(\tilde{A}) \approx (\exp(a_1), \exp(a_2), \exp(a_3))$$

تعریف زیر از کتاب وانگ می باشد [۵].

تعریف ۲ـ فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ و $\tilde{X}$ اعداد فازی مثلثی به صورت زیر باشند:

$\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3)$ و $\tilde{X} = (x_1, x_2, x_3)$ باشند.

آنگاه:

$\tilde{X} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2$ و $b_3 - a_3)$ جواب معادلهٔ $\tilde{A} + \tilde{X} = \tilde{B}$ می باشد.

اگر داشته باشیم: $b_1 - a_1 < b_2 - a_2 < b_3 - a_3$ و $\tilde{X} = \left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}\right)$ جواب معادلهٔ $\tilde{A}\,\tilde{X} = \tilde{B}$ می باشد.

اگر داشته باشیم:

$$\frac{b_1}{a_1} \le \frac{b_2}{a_2} \le \frac{b_3}{a_3}$$

تعریف زیر را Laarhoven و Pedrycz می باشد [۴].

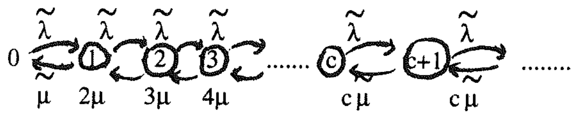
تعریف ۳ـ اگر $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ یک عدد فازی مثلثی باشد و $a_1 > 0$ باشد.

آنگاه داریم:

$$\mathrm{Ln}(\tilde{A}) \approx (\mathrm{Ln}(a_1)\ \mathrm{Ln}(a_2)\ \mathrm{Ln}(a_3))$$

۲ـ مدل صف فاز M/M/c

یک صف و c سرویس دهنده داریم و متوسط زمان بین دو ورود یک توزیع نمایی با پارامتر فازی $\tilde{\lambda}$ و متوسط زمان سرویس یک توزیع نمایی با پارامتر فازی $\tilde{\mu}$ می باشد. می خواهیم متوسط طول صف و متوسط تعداد در سیستم و متوسط زمان انتظار هر مشتری در صف و سیستم را به دست آوریم:



$$\tilde{\pi}_n = \begin{cases} \left(\dfrac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}\right)^n \cdot \dfrac{1}{n!} \cdot \tilde{\pi}_0 & n = 0, 1, 2, \ldots, c \\ \left(\dfrac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}\right)^c \cdot \dfrac{1}{c!} \cdot \left(\dfrac{\tilde{\lambda}}{c\tilde{\mu}}\right)^{n-c} \cdot \tilde{\pi}_0 & n = c, c+1, c+2, \ldots \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\pi}_n = \sum_{n=0}^{c-1} \tilde{\pi}_n + \sum_{n=c}^{\infty} \tilde{\pi}_n = \sum_{n=0}^{c-1} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}\right)^n \cdot \frac{1}{n!}\, \tilde{\pi}_0$$

$$+ \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}\right)^c \cdot \frac{1}{C!} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{c\tilde{\mu}}\right)^{n-c} \cdot \tilde{\pi}_0$$

اگر $\frac{\tilde{\lambda}}{c\tilde{\mu}} < 1$ باشد داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\pi}_n = \sum_{n=0}^{c-1} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \tilde{\pi}_0 + \frac{1}{c!} \cdot \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}\right)^c \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{\tilde{\lambda}}{c\tilde{\mu}}\right)} \quad \tilde{\pi}_0 =$$

$$\sum_{n=0}^{c-1} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{c\tilde{\mu}}\right)^n \cdot c^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \tilde{\pi}_0 + \frac{1}{c!} \cdot c^c \cdot \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}\right)^c \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{\tilde{\lambda}}{c\tilde{\mu}}\right)} \quad \tilde{\pi}_0$$

اگر $\tilde{\rho} = \frac{\tilde{\lambda}}{c\tilde{\mu}}$ باشد داریم:

$$\tilde{\pi}_0 = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\pi}_n}{\sum_{n=0}^{c-1} \tilde{\rho}^n \cdot c^n \cdot \frac{1}{n!} + \frac{1}{c!} \cdot c^c \cdot \tilde{\rho}^c \cdot \left(\frac{1}{1-\tilde{\rho}}\right)}$$

$$\widetilde{NQ} = \frac{\sum_{n=c}^{\infty} (n-c) \cdot \tilde{\pi}_n}{\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\pi}_n} = \frac{\sum_{n=c}^{\infty} (n-c) \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}\right)^c \cdot \frac{1}{c!} \cdot \left(\frac{\tilde{\lambda}}{c\tilde{\mu}}\right)^{n-c} \cdot \tilde{\pi}_0}{\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\pi}_n}$$

$$\widetilde{NQ} = \frac{\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}\right)^c \cdot \tilde{\pi}_0 \cdot \frac{1}{c!} \cdot \sum_{n=c}^{\infty} (n-c) \left(\frac{\tilde{\lambda}}{c\tilde{\mu}}\right)^{n-c}}{\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\pi}_n} \qquad (۳-۱)$$

با فرض $\tilde{\rho} = \frac{\tilde{\lambda}}{c\tilde{\mu}} < 1$ داریم:

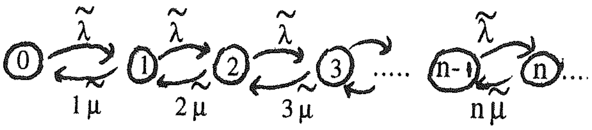
$$\widetilde{NQ} = \frac{\tilde{\pi}_0 \cdot \tilde{\rho}^c \cdot \frac{c^c}{c!} \cdot \tilde{\rho} \cdot \frac{1}{(1-\tilde{\rho})^2}}{\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\pi}_n} \qquad (۳-۲)$$

با استفاده از روابط لیتل داریم:

$$\tilde{N} = \widetilde{NQ} + \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}} \quad \text{و} \quad \widetilde{WQ} = \frac{\widetilde{NQ}}{\tilde{\lambda}} \quad \text{و} \quad \tilde{W} = \frac{\tilde{N}}{\tilde{\lambda}}$$

۳ـ مدل $M/M/\infty$ فازی

در این مدل فرض بر این است که سیستم از نظر خدمت دهندگان محدودیتی نداشته و هر لحظه که یک مشتری جدید وارد می شود یک خدمت دهنده آمادهٔ ارائه خدمت می گردد. مثال بارز اینگونه سیستمها مدلهای سلف سریس می باشد، که در آن خدمت دهندهٔ هر مشتری خود اوست، و می توان تعداد خدمت دهندگان را بی نهایت تصور کرد. در این مدل زمان بین دو ورود نمایی با پارامتر فازی $\tilde{\lambda}$ و مدت زمان سرویس نمایی با پارامتر فازی $\tilde{\mu}$ می باشد.



بنابراین داریم:

$$\tilde{\pi}_n = \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \tilde{\pi}_0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\pi}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \tilde{\pi}_0 = \tilde{\pi}_0 \cdot \exp\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}\right)$$

$$\tilde{\pi}_0 = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\pi}_n}{\exp\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}\right)} \qquad (۴\text{-}۱)$$

در این سیستم تعداد خدمت دهندگان بی نهایت است. لذا هیچ وقت صف به وجود نخواهد آمد و طبق لیتل داریم:

$$\widetilde{WQ} = 0 \text{ و } \widetilde{NQ} = 0 \text{ و } \tilde{N} = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}} \text{ و } \tilde{W} = \frac{1}{\tilde{\mu}}$$

٤ ـ مثال عددی در مورد مدل M/M/2 فازی

فرض کنید متوسط نرخ ورودی فازی به صورت $\tilde{\lambda}=(3/9, 4, 4/1)$ و متوسط نرخ سرویس فازی به صورت $\tilde{\mu} = (5, 5/1, 5/2)$ باشد.

و $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\pi}_n=(0/997, 1, 1/003)$ فرض می شود، و تعداد سرویس دهنده ۲ نفر باشد.

می خواهیم $\tilde{\pi}_0$ و $\widetilde{NQ}$ و $\tilde{N}$ و $\tilde{W}$ و $\widetilde{WQ}$ را محاسبه کنیم:

به وسیله قرار دادن اطلاعات بالا در معادلهٔ (۱-۳) داریم:

$$\tilde{\pi}_0=(0/417, 0/437, 0/456)$$

به وسیله رابطه (۲-۳) داریم:

$$\widetilde{NQ}=(0/112, 0/142, 0/181) \qquad (۵\text{-}۱)$$

و به وسیلهٔ روابط لیتل داریم:

$$\tilde{N}=(0/862, 0/926, 1/001)$$
$$\tilde{W}=(0/21, 0/232, 0/257) \qquad (۵\text{-}۲)$$
$$\widetilde{WQ}=(0/027, 0/036, 0/046)$$

۵ـ مثال عددی در مورد M/M/∞ فازی

فرض کنید $\tilde{\lambda}=(3/9, 4, 4/1)$ و $\tilde{\mu}=(5, 5/1, 5/2)$ و $\sum_{v=0}^{\infty} \tilde{\pi}_n=(0/997, 1, 1/003)$ باشد

می خواهیم معیارهای ارزیابی این سیستم صف را محاسبه کنیم:

با استفاده از رابطه (۱-۴) و تعریف (۱) داریم:

$$\tilde{\pi}_0=(0/439,\ 0/457,\ 0/474)$$

و با استفاده از رابطه (۲-۴) داریم:

$$\tilde{\pi}_1=(0/329,\ 0/358,\ 0/388)$$

$$\tilde{\pi}_n=(0/439\ (\frac{(0/75)^n}{n!}),0/457\ (\frac{(0/784)^n}{n!},0/474(\frac{(0/82)^n}{n!})\ )$$

با استفاده از روابط لیتل داریم:

$$\widetilde{WQ}=0 \qquad \widetilde{NQ}=0$$

$$\tilde{N}=(0/75,\ 0/784,\ 0/82)$$

$$\tilde{W}=(0/192,\ 0/196,\ 0/2)$$

۶- مقایسه دو روش M/M/c فازی

آقایان Yamazaki و Gen و Tsujimura و Jo با در نظر گرفتن $\tilde{\lambda}=(3/9,\ 4,\ 4/1)$ و $\tilde{\mu}=(5,\ 5/1,\ 5/2)$ و دو سرویس دهنده به نتایج زیر رسیدند [۲].

$$\widetilde{WQ}=(0/002,\ 0/036,\ 0/073)$$

$$\widetilde{NQ}=(0/01,\ 0/143,\ 0/285)$$

و با $\tilde{\lambda}$ و $\tilde{\mu}$ داده شده در بالا ما به نتایج زیر رسیدیم:
(طبق روابط (۱-۵) و (۲-۵)

$$\widetilde{WQ}=(0/027,\ 0/036,\ 0/046)$$
$$\widetilde{NQ}=(0/112,\ 0/142,\ 0/181)$$

ما به ازاء

$$\lambda=3/9,\ 3/91,\ 3/92,\ 3/93,\ \ldots,\ 4/1$$

و

$$\mu=5,\ 5/01,\ 5/02,\ \ldots,\ 5/2$$

شبیه سازی را به تعداد ۴۰ اجرا مستقل انجام دادیم و به نتایج زیر رسیدیم:

$$\widetilde{WQ}=(0/031,\ 0/038,\ 0/045)$$
$$\widetilde{NQ}=(0/124,\ 0/153,\ 0/185)$$

از طریق نتایج شبیه سازی مشاهده می شود که نتایج ما با ارزش هستند.

۷- نتیجه گیری

ما مدلهای صف M/M/c فازی را بررسی کردیم. با روش شبیه سازی مشاهده شد که روش M/M/c ارائه شده از پایایی قویتر نسبت به روشهای گذشته برخوردار است و دارای خطای کمتر نسبت به روشهای گذشته می باشد.

همچنین مدلهای M/M/∞ نیز بحث شد و نتایج جدیدی در مورد این مدلها با حالت فازی ارائه شد. با توسعه این روشها زمینه های تحقیقاتی جدیدی فراهم می گردد که در حال حاضر مورد بررسی می باشند.

مراجع

[1] Jung Bok JO, Yasuhiro Tsujimura, Mitssou Gen ans Genji Yamazaki: A Network Model Based on Fuzzy Queueing System. Proc. of the 3rd IEEE In'l Conf. of Fuzzy Systems, (1994), 1951-1956.

[2] Jung Bok JO, Yasuhiro Tsujimura, Mitssou Gen ans Genji Yamazaki: Failure Analysis of Computer System Based on Fuzzy Queueing Theory: Computers ind. Engng vol. 27, Nos 1-4, pp. 425-428, 1994.

[3] Jung Bok JO, Yasuhiro Tsujimura, Mitssou Gen, Genji Yamazaki and Jaeuk lee: performance of multiclass BCMP Modle for Computer System Based on Fuzzy Set Theory:Computers ind. Engng vol. 33, Nos 3-4, pp. 557-560, 1997.

[4] M.Kwiesielewicz: A note on the Fuzzy extension of saaty's priority theory: Fuzzy Sets and Systems 95(1998) 161-172.

[5] Wang lie: A Coures in Fuzzy Systems and Control (1992).