

# تأثیر اتلاف عددی بر روی متغیرهای جریان لزوج مافوق صوت

وحید اصفهانیان  
دانشیار  
دانشکده فنی، دانشگاه تهران

قاسم حیدری نژاد  
دانشیار  
دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

محمد مهدی رشیدی  
دانشجوی دکتری  
دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

## چکیده

روشهای تفاضل مرکزی به دلیل سادگی و زمان کم محاسبات، روشهای مناسبی جهت شبیه سازی عددی به نظر می رسند ولی به دلیل وجود خاصیت پراکندگی در ماهیت معادلات آنها در اطراف ناپیوستگی ها نوسانی می شوند. از سوی دیگر روشهای بالادست مشکل فوق را ندارند ولی به خاطر وجود خاصیت میراکنندگی در معادلات انفصالی آنها لزجت عددی در حل وارد می شود. دقت متغیرهای جریان مافوق صوت بر روی جسم وابسته به مشخصات شوک و حل میدان در پشت شوک، بویژه لایه مرزی می باشد. روشهای عددی بالادست به علت خاصیت میراکنندگی ذاتی، شکل، محل و ضخامت شوک را بخوبی بدست می آورند ولی خاصیت میراکنندگی آنها میدان جریان پشت شوک و بویژه لایه مرزی را تحت تأثیر قرار می دهد. در عوض روشهای مرکزی، جریان در پشت شوک را با دقت مناسبی پیش بینی می کنند ولی در اطراف شوک نوسانات شدیدی بوجود می آورند که می تواند دقت حل را کم کند. در این مقاله اثرات اتلاف عددی با استفاده از مقایسه روشهای تفاضل مرکزی و بالادست انجام شده است. به منظور بررسی دقیق اثرات اتلاف عددی و نوع روش (برازش یا تسخیر)، از دو روش برازش و تسخیر شوک استفاده شده و نتایج به دست آمده از روشهای "رو"، TVD و "بیم-وارمینگ" با یکدیگر مقایسه شده اند. به منظور تأیید صحت محاسبات، نتایج به دست آمده با اطلاعات عددی و تجربی مقایسه شده است.

## کلمات کلیدی

برازش شوک، تسخیر شوک، کاهش تغییرات کل، بیم-وارمینگ، "رو"

## Effects of Numerical Dissipation on Viscous Supersonic Flows Variables

G. Heidarinejad  
Associate professor  
Tarbiat Modarres University

V. Esfahanian  
Associate professor  
University of Tehran

M.M. Rashidi  
Ph.D. Student  
Tarbiat Modarres University

## Abstract

*The present investigation is concerned with the understanding of the effect of numerical dissipation on viscous supersonic flow variables. The numerical dissipation is added to the central*

*difference scheme in order to control numerical instability and to enable the capturing of shock waves. Unfortunately, the dispersive nature of this scheme introduced oscillations around discontinuities. On the other hand, the upwind schemes perform well in these regions. But due to inherent dissipative property of upwind schemes, the accuracy of flow variables especially in high gradient region within the boundary layer can be deteriorated. A systematic study is performed in order to investigate the effect of numerical dissipation used in the central difference scheme compared with upwind schemes. The viscous supersonic flow variables at the wall and their profiles computed based on "Roe", "TVD" and "Beam-Warming" methods are compared with each other in order to gain some insight about the effect of numerical dissipation. Moreover, the computed results are compared with experimental data.*

## Keywords

*Shock fitting, Shock capturing, Total Variation Diminishing (TVD), Beam-Warming, Roe*

## مقدمه

بیم و وارمینگ در سال ۱۹۷۸ الگوریتم حل عددی ضمنی تفاضل مرکزی را مورد استفاده قرار دادند [۱]. در این روش به دلیل انفصال عددی ترم‌های مشتق مرتبه اول در معادلات ناویر-استوکس، جملاتی با خاصیت پراکندگی به وجود می‌آیند که موجب ایجاد نوسان در نواحی دارای شوک و ناپیوستگی می‌شوند. البته این مسئله منحصر به روش "بیم-وارمینگ" نیست و تمامی روشهای تفاضل مرکزی را دارا می‌باشند [۲]. به منظور کم کردن دامنه نوسان و جلوگیری از ناپایداری، عبارتهای میراکننده به معادلات انفصالی روشهای تفاضل مرکزی اضافه می‌شود [۳]. در روش ضمنی می‌توان علاوه بر جملات اتلافی صریح از عبارتهای اتلافی ضمنی نیز استفاده نمود. در صورت دلتا فرم بودن روش و حل حالت دائم، جملات اتلافی ضمنی تأثیری در دقت جوابهای نهایی نخواهند داشت ولی جملات اتلافی صریح در هر حال دقت جوابها را تحت تأثیر قرار می‌دهند [۴].

یکی دیگر از مشکلات روشهای تفاضل مرکزی این است که اجرای برنامه توسط این روشها به تجربه زیادی دارد. از سوی دیگر اعمال عبارتهای میراکننده علیرغم کاهش دامنه نوسان در نواحی شوک دقت جوابها و بویژه مقادیر مربوط به سطح را تحت تأثیر قرار می‌دهند. برای کاهش بیشتر نوسانات در اطراف شوک لازم است که ضرایب جملات اتلافی افزایش یابند. این افزایش موجب کاهش دقت در نواحی دیگر میدان حل می‌شود. بهترین راه کاری که بدین منظور پیشنهاد شده است استفاده از جملات اتلاف عددی غیرخطی است که در این روشها با توجه به میزان نیاز به عبارت میراکننده، مقدار اتلاف عددی توسط روش تغییر می‌یابد [۵].

دسته دیگر روشهای عددی، روشهای بالادست می‌باشند. در این روشها حل عددی با استفاده از مقادیر مشخصهها انجام می‌شود [۶ و ۷]. تفاوت روشهای تفاضل مرکزی و روشهای بالادست در نحوه انفصال عبارتهای جابجایی است. این عبارتها در معادلات ناویر-استوکس دارای اهمیت زیادی هستند و در نواحی دارای شوک نقش اصلی را ایفا می‌کنند. روشهای بالادست دارای خاصیت پخشی بوده و به همین دلیل در نواحی دارای شوک بخوبی عمل می‌کنند و از ایجاد نوسان جلوگیری می‌کنند. ولی از سوی دیگر به دلیل خاصیت میراکنندگی زیاد باعث کاهش دقت جوابها در نواحی دیگر می‌شوند. روش "رو" مرتبه اول به عنوان یکی از روشهای بالادست برای تحلیل عددی مورد استفاده قرار گرفته است. برای برطرف کردن مشکلات روشهای بالادست، راه کارهای مختلفی ابداع شده است. یکی از بهترین روشهای ابداع شده در این زمینه روش TVD می‌باشد [۸ و ۹]. در این روش از تابع آنتروپی [۱۰] و محدود کننده‌های شار [۱۱] استفاده می‌شود. روش TVD بکاررفته در این مقاله دارای دقت مرتبه دوم می‌باشد. روشهای TVD برای حل مسائل اسکالر ابداع شده‌اند و اثبات ریاضی پایداری برای اینگونه روشها برای دستگاه معادلات کلی با مقادیر اولیه دلخواه ثابت نشده است. با این وجود کاربرد روشهای فوق در مسائل پیچیده بسیار موفقیت آمیز بوده است [۱۲].

با توجه به مطالب فوق در صورت استفاده از روشهای بالادست دقت روش جهت تسخیر شوک افزایش می‌یابد و در نتیجه محل شوک دقیق تر به دست خواهد آمد. استفاده از روشهای بالادست (مانند TVD) در مسائلی که در آنها شوکهای قوی وجود

دارد موجب می‌شود دقت جوابها و به‌ویژه مقادیر متغیرهای مربوط به سطح افزایش یابد. ولی این سؤال اساسی در این رابطه وجود دارد که در مسائل بدون شوک استفاده از روشهای بالادست بهبود یافته نسبت به روشهای تفاضل مرکزی دارای چه دقتی می‌باشد. به منظور بررسی این موضوع روش برازش شوک نیز مورد استفاده قرار گرفته است تا با نتایج روش تسخیر شوک مقایسه شود. به دلیل دقت‌تر بودن روشهای برازش شوک (چون در روش برازش شوک از کمترین میزان اتلاف عددی استفاده می‌شود)، نزدیکی حل تسخیر شوک به حل برازش شوک می‌تواند میزان دقت را مشخص نماید. شایان ذکر است که حل به‌روش برازش شوک در بسیاری از مسائل عملی مقدور نیست. لذا در اکثر مسائل باید از روش تسخیر شوک استفاده نمود.

## معادلات حاکم

معادلات استفاده شده در این تحقیق معادلات TLNS هستند که تقریب بسیار مناسبی از معادلات کامل ناویر-استوکس هستند که با حذف عبارتهای لزج در امتداد جریان به دست می‌آیند. این معادلات در اعداد رینولدز بالا اعتبار دارند و به دلیل متغیر بودن فشار در داخل لایه مرزی قابلیت حل میدان دارای جدایش و جریان معکوس توسط آنها وجود دارد. معادلات TLNS برای حالت تقارن محوری به فرم بقایی در مختصات محاسباتی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} + H = \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial S}{\partial \eta} + jT \right]$$

$$U = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad F = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ (E+p)U \end{bmatrix}, \quad G = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ (E+p)V \end{bmatrix}, \quad H = (J\eta)^{-1} \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ (E+p)v \end{bmatrix}$$

$$S = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mu(\eta_x^2 + \eta_y^2) u_\eta + \mu[\eta_x(\eta_x u_\eta + \eta_y v_\eta) - 2\eta_x v / y] / 3 \\ \mu(\eta_x^2 + \eta_y^2) v_\eta + \mu[\eta_y(\eta_x u_\eta + \eta_y v_\eta) - 2\eta_y v / y] / 3 \\ \mu(\eta_x^2 + \eta_y^2) \left[ (u^2 + v^2)_\eta / 2 + \gamma Pr^{-1} e_\eta \right] + (\mu/6) \left\{ \eta_x^2 (u^2)_\eta + 2\eta_x \eta_y (uv)_\eta + \eta_y^2 (v^2)_\eta - 4v(\eta_x u + \eta_y v) / y \right\} \end{bmatrix}$$

$$T = (J\eta)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mu(\eta_y u_\eta + \eta_x v_\eta) \\ 2\mu\eta_y v_\eta - 2\mu v / y \\ \mu u(\eta_y u_\eta + \eta_x v_\eta) + (2/3)\mu v(2\eta_y v_\eta - \eta_x u_\eta) - (2/3)\mu v^2 / y + \gamma Pr^{-1} e_\eta \eta_y \end{bmatrix}$$

کمیت‌های مورد استفاده بی‌بعد شده‌اند و سیال گاز ایده‌آل فرض شده است. برای بی‌بعدسازی از روابط زیر استفاده شده است:

$$t = \frac{t^*}{R_N \sqrt{\gamma}} c_\infty, \quad x_i = \frac{x_i^*}{R_N}, \quad u_i = \frac{u_i^*}{c_\infty} \sqrt{\gamma}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_\infty}$$

$$E = \frac{E^*}{\rho_\infty c_\infty^2} \gamma, \quad T = \frac{T^*}{T_\infty}, \quad e = \frac{e^*}{c_\infty^2} \gamma, \quad p = \frac{p^*}{p_\infty}$$

## روش حل عددی

روشهای بکار رفته در این مقاله الگوریتم فاکتورگیری شده، ضمنی، غیرتکراری و به شکل دلتا را مورد استفاده قرار داده‌اند. الگوریتم فاکتورگیری شده مراحل حل را به دو مسئله یک‌بعدی در هر گام زمانی تبدیل می‌کند و محدودیت پایداری آن نیز از روشهای صریح خیلی کمتر است. در ابتدا روش "بیم - وارمینگ" [۱] معرفی می‌شود. جاروب در جهت  $\xi$ :

$$\left[ I + \Delta t \left( \frac{A_{i+1,j}^n - A_{i-1,j}^n}{2} + K_{i,j} - \frac{1}{Re} \left( L_{i,j}^n + \frac{N_{i,j+1}^n - N_{i,j-1}^n}{2} \right) + D_{I\xi} \right) \right] \Delta U_{i,j}^* = - \Delta t \left( \frac{F_{i+1,j}^n - F_{i-1,j}^n}{2} + \frac{G_{i,j+1}^n - G_{i,j-1}^n}{2} + H_{i,j}^n - \frac{1}{Re} \left[ j T_{i,j}^n + \frac{S_{i,j+1}^n - S_{i,j-1}^n}{2} \right] \right) + D_{I\xi} \quad (2)$$

جاروب در جهت  $\eta$ :

$$\left[ I + \Delta t \left( \frac{B_{i,j+1}^n - B_{i,j-1}^n}{2} + D_{I\eta} \right) \right] \Delta U_{i,j}^* = \Delta U_{i,j}^* \quad (3)$$

بردار جواب از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + \Delta U_{i,j}^* \quad (4)$$

جملات اتلاف مصنوعی خطی به صورت زیر بیان می‌شوند

$$D_{I\xi} = -\varepsilon_I J^{-1} \Delta_\xi \nabla_\xi J \quad D_{I\eta} = -\varepsilon_I J^{-1} \Delta_\eta \nabla_\eta J \quad (5)$$

$$D_{I\xi} = -\varepsilon_I J^{-1} \left[ (\Delta_\xi \nabla_\xi)^2 + (\Delta_\eta \nabla_\eta)^2 \right] J U \quad (6)$$

عبارت  $D_{I\xi}$  برای میرا کردن رشد نوسانات با طول موج بالا ناشی از ایجاد خطا بکار می‌رود و بدینگونه ناپایداریهای غیرخطی را کنترل می‌کند. در این مقاله  $\varepsilon_I = 2\Delta t$  و  $\varepsilon_{I\xi} = \Delta t$  در نظر گرفته شده تا حل نهایی به گام زمانی مرتبط نباشد. در نواحی دارای ناپیوستگی مانند شوک و برگشت جریان، از اتلاف مصنوعی غیرخطی صریح به جای اتلاف مصنوعی صریح استفاده شده است:

$$D_{I\xi} = \nabla_\xi \left( \sigma_{i+1,j} J_{i+1,j}^{-1} + \sigma_{i,j} J_{i,j}^{-1} \right) \left( \varepsilon_{i,j}^{(2)} \Delta_\xi U_{i,j} - \varepsilon_{i,j}^{(4)} \Delta_\xi \nabla_\xi \Delta_\xi U_{i,j} \right) \quad (7)$$

$$\varepsilon_{i,j}^{(2)} = k_2 \Delta t \text{Max}(\Gamma_{i+1,j}, \Gamma_{i,j}, \Gamma_{i-1,j}) \quad \varepsilon_{i,j}^{(4)} = \text{Max}(0, k_4 \Delta t - \varepsilon_{i,j}^{(2)}) \quad (8)$$

$$\Gamma_{i,j} = \frac{|p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}|}{|p_{i+1,j} + 2p_{i,j} + p_{i-1,j}|} \quad \sigma_{i,j} = \xi_x u + \xi_y v + c \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2} \quad (9)$$

برای جهت  $\eta$  نیز روابط مشابهی استفاده می‌شود. اتلاف مصنوعی صریح کلی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$D_{I\xi} = D_{I\xi\xi} + D_{I\xi\eta} \quad (10)$$

ضرایب اتلاف مصنوعی  $k_2$  و  $k_4$  به ترتیب برابر  $0.125$  و  $0.1$  در نظر گرفته شده‌اند. شایان ذکر است که در روش برازش شوک نیازی به استفاده از اتلاف مصنوعی غیرخطی نیست.

روش TVD اختلاف محدود بکار رفته به صورت زیر است:

جاروب در جهت  $\xi$ :

$$\left[ I + \Delta t \left( \Lambda_{i+\frac{1}{2},j}^{n\xi} - \Lambda_{i-\frac{1}{2},j}^{n\xi} + K_{i,j}^n - \frac{1}{Re} \left[ L_{i,j}^n + \frac{N_{i,j+1}^n - N_{i,j-1}^n}{2} \right] \right) \right] \Delta U_{i,j}^* = -\Delta t \left( \overline{\frac{F_{i+\frac{1}{2},j}^n}{i+\frac{1}{2},j}} - \overline{\frac{\Gamma_{i-\frac{1}{2},j}^n}{i-\frac{1}{2},j}} \right) - \Delta t \left( \overline{\frac{G_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{i,j+\frac{1}{2}}} - \overline{\frac{G_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{i,j-\frac{1}{2}}} + H_{i,j}^n - \frac{1}{Re} \left[ j T_{i,j}^n + \frac{S_{i,j+1}^n - S_{i,j-1}^n}{2} \right] \right) \quad (11)$$

جاړوب در جهت  $\eta$ :

$$\left[ I + \Delta t \left( \Lambda_{i,j+\frac{1}{2}}^{n\eta} - \Lambda_{i,j-\frac{1}{2}}^{n\eta} \right) \right] \Delta U_{i,j}^n = \Delta U_{i,j}^* \quad (12)$$

به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\Lambda_{i+\frac{1}{2},j}^{n\xi} = \frac{1}{2} [A_{i+1,j}^n + \Pi_{i+\frac{1}{2},j}^{n\xi}] \quad (13)$$

عبارت  $\Pi_{i+\frac{1}{2},j}^{n\xi}$  مربوط به روش TVD است که در آن از تابع محدودکننده استفاده شده است. این عبارت در واقع نوعی عبارت اتلاف عددی است که به معادله اضافه شده است. اتلاف عددی که در رابطه فوق مورد استفاده قرار گرفته است، نسبت به روشهای معمول دارای مزایای زیادی می‌باشد و مقدار آن بسته به میزان مورد نیاز تغییر می‌کند و برای طیف وسیعی از کاربردها به خوبی عمل می‌کند. مزیت دیگر این روش این است که نیازی به اضافه کردن ضرایب جملات اتلاف عددی (که اغلب در روشهای تفاضل مرکزی از آنها استفاده می‌شود) ندارد. عبارت فوق را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\Pi_{i+\frac{1}{2},j}^{n\xi} = R_{i+\frac{1}{2},j}^{n\xi} \text{Diag} \left[ \beta^k - \psi(a^k + \gamma^k) \right]_{i+\frac{1}{2},j} \Delta_{i+\frac{1}{2}} \quad (14)$$

برای محاسبه عبارت فوق از روابط زیر استفاده می‌شود:

$$\beta_{i+\frac{1}{2},j}^k = \frac{g_{i,j}^k + g_{i+1,j}^k}{\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k} \quad (15)$$

$$g_{i,j}^k = s \max \left[ 0, \min \left[ \sigma_{i+\frac{1}{2},j}^k \left| \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k \right|, s \sigma_{i-\frac{1}{2},j}^k \left| \alpha_{i-\frac{1}{2},j}^k \right| \right] \right] \quad (16)$$

که در آن  $s$  تابع علامت می‌باشد و تابع  $\gamma$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\gamma_{i+\frac{1}{2},j}^k = \begin{cases} \frac{g_{i+1,j}^k - g_{i,j}^k}{\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k} & \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k \neq 0 \\ 0 & \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k = 0 \end{cases} \quad (17)$$

$$\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k = \left( R_{i+\frac{1}{2},j}^n \right)^{-1} \left( U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n \right) \quad (18)$$

روابط مشابهی برای جهت  $\eta$  مورد استفاده قرار می‌گیرند. تابع  $\sigma$  به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\sigma(x) = \frac{1}{2}\psi(x) + \frac{\Delta t}{2}x^2 \quad (19)$$

برای حل حالت دائم معمولاً عبارت مربوط به گام زمانی در رابطه فوق حذف می‌شود. تابع  $\psi$  به عنوان شرط آنتروپی شناخته می‌شود و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\psi(x) = \begin{cases} |x| & |x| \geq \varepsilon \\ \frac{x^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon} & |x| < \varepsilon \end{cases} \quad (20)$$

در حل کنونی مقدار  $\varepsilon$  برابر  $0.125$  منظور شده است. تابع فوق از ایجاد امواج شوک انبساطی که غیرفیزیکی هستند جلوگیری می‌کند. استفاده از مقدار غیرصفر  $\varepsilon$  مقداری لزجت عددی به حل عددی اعمال می‌کند. بردار غیرلزج  $\overline{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n$  از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\overline{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n = \frac{1}{2} \left[ F_{i,j}^n + F_{i+1,j}^n + R_{i+\frac{1}{2},j}^n \Phi_{i+\frac{1}{2},j}^{nk} \right] \quad (21)$$

$$\Phi_{i+\frac{1}{2},j}^{nk} = g_{i,j}^k + g_{i+1,j}^k - \psi \left( \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k + \gamma_{i+\frac{1}{2},j}^k \right) \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^k \quad (22)$$

روش "رو" را می‌توان با استفاده از فرمولاسیون روش TVD بکار رفته به دست آورد، بدین منظور لازم است که عبارتهای  $\beta_{i+\frac{1}{2},j}^k$  و  $\gamma_{i+\frac{1}{2},j}^k$  را در معادله (۱۴) و عبارتهای  $g_{i,j}^k$  و  $g_{i+1,j}^k$  را در معادله (۲۲) حذف نمود.

## اعمال شرایط مرزی و شرایط اولیه

در روش تسخیر شوک جریان ورودی دارای خواص جریان آزاد می‌باشد. در روش برازش شوک ابتدا شوک بر روی جسم انطباق داده می‌شود و سپس متغیرهای پشت شوک که در واقع مقادیر مرزی سطح بالایی را تشکیل می‌دهند با استفاده از روابط رانکین - هوگنیت به دست می‌آیند. به دلیل مافوق صوت بودن میدان جریان در مرز خروجی از برون‌یابی استفاده شده است و در روی محور تقارن شرط مرزی انعکاسی اعمال شده است. در این حالت گرادیان فشار روی سطح برابر صفر در نظر گرفته شده و شرط عدم لغزش نیز اعمال می‌شود در حالت آدیاباتیک گرادیان دما صفر است.

با استفاده از تحلیل آیزنتروپیک توزیع اولیه‌ای برای کمیت‌های فشار، چگالی و سرعت به دست آمده است. به دلیل لزج بودن جریان یک توزیع اولیه خطی درون لایه مرزی در نظر گرفته شده است. هرچه شرایط اولیه حدسی به جواب‌های نهایی نزدیکتر باشند، تعداد تکرار برای همگرایی کاهش خواهد یافت.

جوابهای به دست آمده از حل عددی باید مستقل از شبکه باشند، به همین دلیل سعی شده است که شبکه‌های مناسب را برای هر روش به دست آورده و در نهایت مقایسه را انجام داد. چون روش "بیم-وارمینگ" و TVD هر دو دارای دقت مرتبه دوم هستند، شبکه مورد استفاده برای آنها تقریباً یکسان است، از آنجا که روش "رو" بکاررفته دارای دقت مرتبه اول است، لذا باید از شبکه ریزتری برای این روش استفاده نمود. ضریب تراکم شبکه برابر  $1/0.01$  در نظر گرفته شده است. شبکه مورد استفاده برای  $M = 8$  در روشهای TVD و "بیم-وارمینگ" برابر  $50 \times 100$  و برای روش "رو" برابر  $120 \times 150$  می‌باشد.

## بررسی نتایج عددی

در شکل ۱ شبکه مورد استفاده برای تحلیل عددی نشان داده شده است. تولید شبکه توسط روش جبری انجام گرفته است. شبکه مورد استفاده در نزدیکی جسم فشرده بوده و با دور شدن از جسم، تراکم آن کاسته می‌شود. در شکل ۲ بردارهای سرعت مربوط به روش TVD ارائه شده است. محل شوک در این شکل با توجه به تغییر جهت بردارها قابل تشخیص است. در شکل ۳ توزیع فشار روی سطح به کمک روشهای "بیم-وارمینگ"، "رو"، TVD و حل کاتلر (روش برازش شوک) [۱۴] در حالتی برازش شوک (الف) و تسخیر شوک (ب) با یکدیگر مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که مقادیر به دست آمده توسط روشهای مختلف با هم تفاوت زیادی ندارند و تقریباً بر هم منطبق می‌باشند. در شکل ۴ توزیع دمای روی سطح برای روشهای فوق با نتایج وی‌ویند و قاضی [۱۵] که از حل معادلات کامل ناویر استوکس به دست آمده است. مقایسه شده است. شایان ذکر است که نتایج وی‌ویند و قاضی جزو معتبرترین نتایج عددی است و به عنوان مبنایی برای مقایسه نتایج مورد پذیرش قرار گرفته است. مشاهده می‌شود که تطابق قابل قبولی بین دمای روی سطح روش TVD و روشهای "بیم-وارمینگ" و وی‌ویند وجود دارد. با دقت در شکل ۴ مشاهده می‌شود که توزیع دمای روی سطح در حالت برازش شوک (الف) و تسخیر شوک (ب) برای یک روش خاص با هم تفاوت زیادی دارد. این مطلب در مورد فشار روی سطح مشاهده نمی‌شود، لذا توزیع دمای روی سطح بر خلاف توزیع فشار به روش بکاررفته حساس است. علت استفاده از روش برازش شوک برای مقایسه نتایج این است که در روش برازش شوک کمترین میزان اتلاف عددی استفاده می‌شود. از سوی دیگر هرچه میزان اتلاف عددی بکار رفته در روش کمتر باشد، حل عددی دقیق‌تر است. به همین دلیل از روش برازش شوک به عنوان مبنای مقایسه استفاده شده است. نکته دیگری که در رابطه با دما مشهود می‌باشد، این است که توزیع دمای روش "رو" با روشهای دیگر تفاوت زیادی دارد، این امر به دلیل ماهیت میراکنندگی زیاد این روش می‌باشد. ضمناً در شکل (ب) در قسمت انتهایی نمودار توزیع دمای روش "بیم-وارمینگ" از حل وی‌ویند دور شده است که در واقع کم دقت بودن روش تسخیر شوک فوق را در این ناحیه نشان می‌دهد. در صورتی که روش TVD روند خود را همچنان در این ناحیه حفظ کرده است.

در شکل ۵ توزیع فشار (الف) و توزیع دما (ب) برای میدان جریان دیگری رسم شده است. مشابه شکل‌های قبلی اختلاف چندانی در توزیع فشار روی سطح مشاهده نمی‌شود ولی دمای روی سطح روش "رو" تفاوت زیادی با روشهای دیگر دارد که این امر مؤید ماهیت پخشی زیاد این روش (بوئزه در داخل قسمت لزج و لایه مرزی) می‌باشد. به منظور تأیید صحت حل‌های عددی نتایج دمای روی سطح با نتایج تجربی [۱۶] مقایسه شده است. با مقایسه شکل‌های ۳ و ۴ و ۵ می‌توان دریافت که دمای روی سطح نسبت به فشار پارامتر بسیار حساستری می‌باشد.

در شکل ۶ خطوط فشار ثابت در حالتی برازش و تسخیر شوک نشان داده شده‌اند. در روش تسخیر شوک "بیم-وارمینگ" در ناحیه شوک نوسانات زیادی وجود دارد. علت این نوسانات وجود خاصیت پراکندگی در این روش می‌باشد. از سوی دیگر در منحنی‌های مربوط به روشهای "رو" و TVD هیچگونه نوسانی مشاهده نمی‌شود. این امر نشاندهنده خاصیت تفکیک‌پذیری زیاد روشهای فوق می‌باشد. منحنی مربوط به روش "رو" در حالت تسخیر شوک به حل برازش شوک شباهت بسیار زیادی دارد. لذا روش فوق توانایی بسیار بالایی در تسخیر شوک دارد. ضخامت لایه شوک در روش "رو" از روشهای دیگر کمتر است. در روش تسخیر شوک "بیم-وارمینگ" بیشترین ضخامت لایه شوک به چشم می‌خورد. ضخامت کم لایه شوک به دست آمده توسط

روش، معیاری برای دقت حل عددی در ناحیه شوک است. شایان ذکر است که نتایج مربوط به خطوط منحنی ماخ ثابت نیز با منحنی خطوط فشار ثابت همخوانی دارد.

در شکل ۷ منحنی توزیع سرعت در امتداد محور افقی (u) بر حسب فاصله عمودی از سطح  $Y_N$  ترسیم شده است. محل شوک در  $Y_N \approx 0.8$  می باشد. بیشترین تغییرات سرعت در داخل لایه مرزی  $Y_N \approx 0.08$  مشاهده می شود. در منحنی مربوط به روش تسخیر شوک "بیم-وارمینگ" در ناحیه شوک نوسان وجود دارد ولی در دو روش دیگر هیچگونه نوسانی مشاهده نمی شود و منحنی برازش شوک و تسخیر شوک آنها شباهت بسیار زیادی به هم دارد. این مطلب نشاندهنده تسخیر خوب شوک توسط این روشها می باشد. در ضمن ضخامت لایه شوک که در روش تسخیر شوک "بیم-وارمینگ" مشاهده می شود بیش از دو روش دیگر است. در شکل ۸ توزیع دما بر حسب فاصله عمودی از دیواره ارائه شده است. مشاهده می شود که اختلاف نسبی بین نتایج بیش از شکلهای قبل است. این موضوع بیانگر حساسیت بیشتر متغیر دما می باشد. در روی سطح بیشترین مقدار دما ایجاد می شود و با نزدیک تر شدن به محل شوک دما کمتر می شود (به دلیل کاهش اثرات لزجت). در قسمت بیرونی شوک کمترین دما وجود دارد که این مقدار تقریباً برابر دمای جریان آزاد است. در شکل ۹ توزیع فشار بر حسب فاصله عمودی ترسیم شده است. در نتایج تسخیر شوک روش "بیم-وارمینگ" نوساناتی مشاهده می شود که علت آن توضیح داده شد.

## بحث و نتیجه گیری

با مقایسه نتایج مشاهده شد که حل برازش شوک روش TVD با وجود ماهیت بالادست در نواحی میدان و بویژه در درون لایه مرزی از دقت کافی برخوردار است و از نظر دقت با روش "بیم-وارمینگ" قابل رقابت است. در حل به روش تسخیر شوک مزیت روش TVD بر روش "بیم-وارمینگ" کاملاً مشهود است. زیرا روش TVD در اطراف شوک از ایجاد نوسان جلوگیری می کند و قادر است شوک را در فاصله کمی تسخیر نماید. با مقایسه نتایج روشهای عددی مشخص شد که روشهای به کاررفته از نظر پیش بینی فشار روی سطح با یکدیگر تفاوت زیادی ندارند. از سوی دیگر توزیع دمای روی سطح آنها با یکدیگر تفاوت بیشتری دارد. این مطلب نشاندهنده حساسیت متغیر دمای روی سطح (در حالت آدیاباتیک) می باشد. (شایان ذکر است که نتایج به دست آمده مربوط به معادلات TLNS می باشد. به همین دلیل در مطالعه شبکه در جریانهای لزج باید توجه ویژه ای به این کمیت (در حالت دیواره آدیاباتیک) مبذول داشت. توزیع فشار حاصل از حل برازش و تسخیر شوک برای یک روش خاص (مثلاً TVD) تفاوت زیادی با هم ندارد ولی توزیع دمای روش برازش شوک بسیار دقیق تر از توزیع دمای روش تسخیر شوک است. این امر مزیت روش برازش شوک را نسبت به روش تسخیر شوک در جریانهای لزج مافوق صوت نشان می دهد.

دمای روی سطح در روش "رو" مرتبه اول بیشتر از دو روش دیگر است. روش فوق در ناحیه لزج دارای دقت خوبی نبوده و موجب افزایش دمای روی سطح شده است.

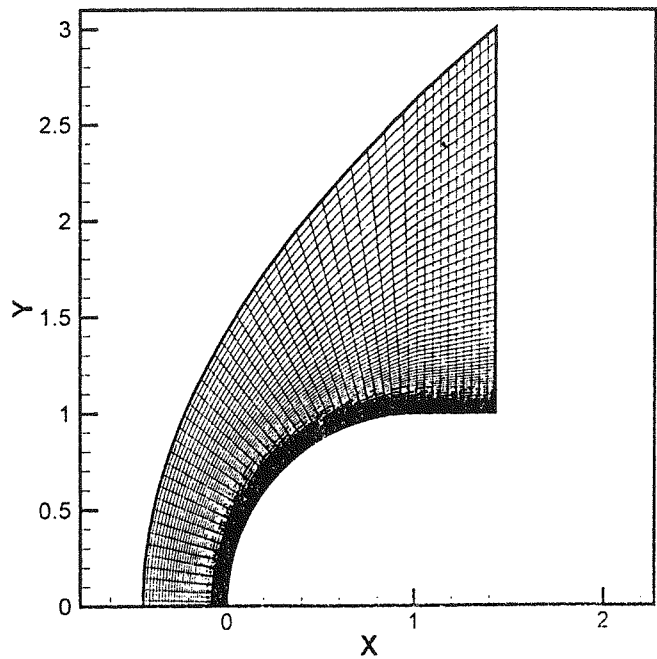
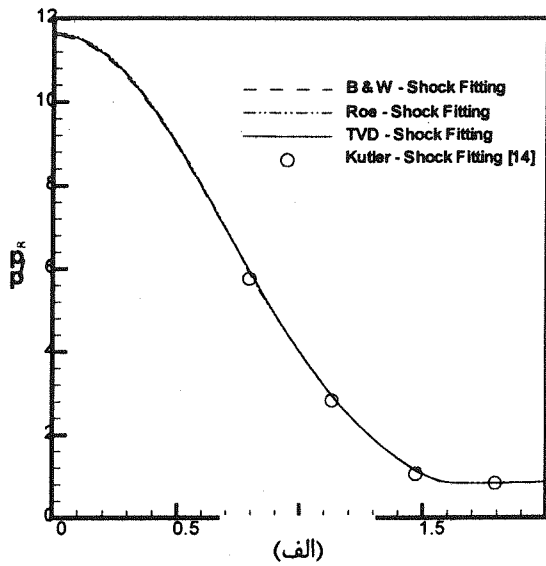
عملکرد روش "رو" از نظر تفکیک پذیری و عدم نوسان از روش TVD بهتر است. این نکته قابلیت بسیار بالای این روش را جهت کاربرد در جریانهای غیرلزج نشان می دهد، زیرا به دلیل توزیع دمای نامناسب به دست آمده از روش استفاده از آن برای جریانهای لزج مناسب نیست.

نکته بسیار جالبی که از حلهای عددی برازش شوک در رابطه با تابع آنتروپی به دست آمد، این بود که حل برازش شوک حساسیت بسیار کمی نسبت به مقدار  $\epsilon$  دارد و حتی با صفر قرار دادن مقدار فوق نیز همگرایی حاصل خواهد شد.

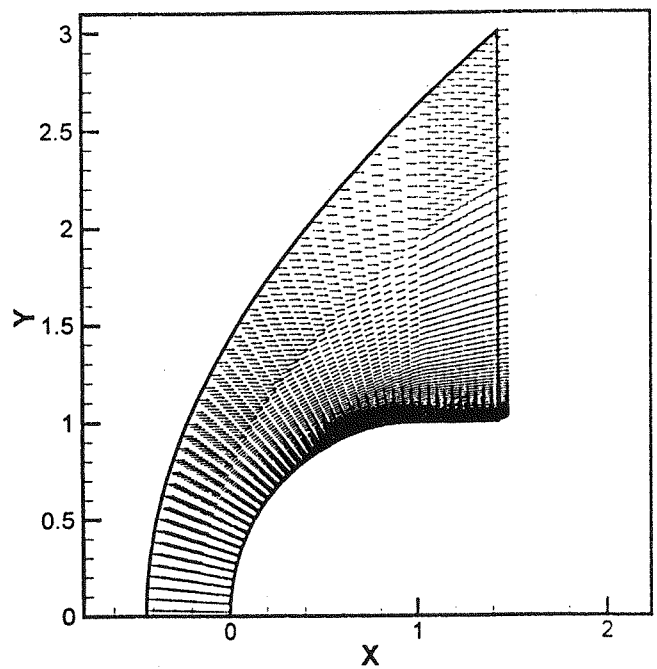
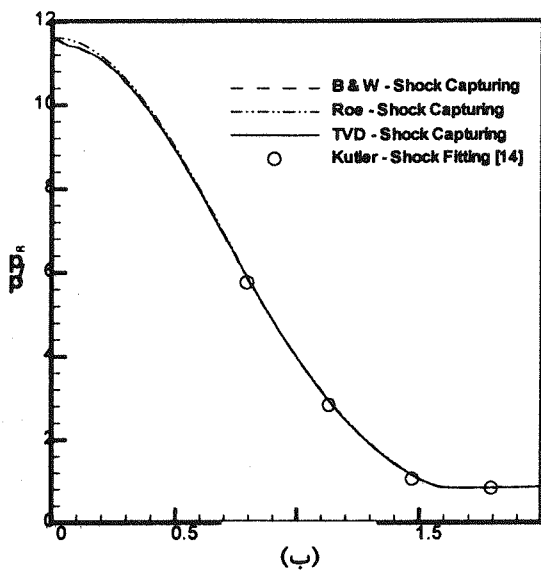
## قدردانی

تهیه کنندگان این تحقیق از مسئولین محترم صنایع شهید باقری و کارشناسان بخش آیرودینامیک و دینامیک پرواز به خاطر زحمات بی شائبه ای که متحمل شده اند قدردانی می نمایند.



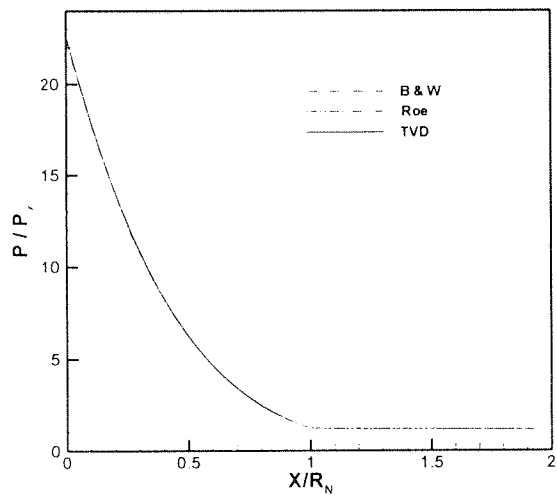


شکل (۱) شبکه‌بندی نقاط در دامنه فیزیکی.

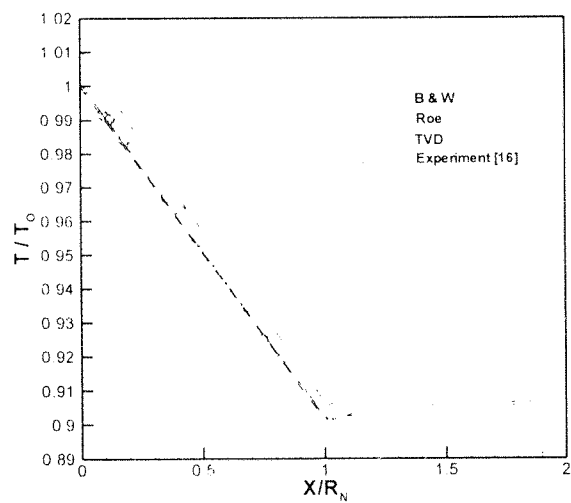


شکل (۲) بردارهای سرعت روش TVD.

شکل (۳) مقایسه توزیع فشار سطح برای حالت  
 $Re = 2.2 \times 10^5$ ,  $M = 2.94$   
 و  $T_{cone} = 0^\circ$  - الف - برازش شوک، ب - تسخیر شوک.



(الف)

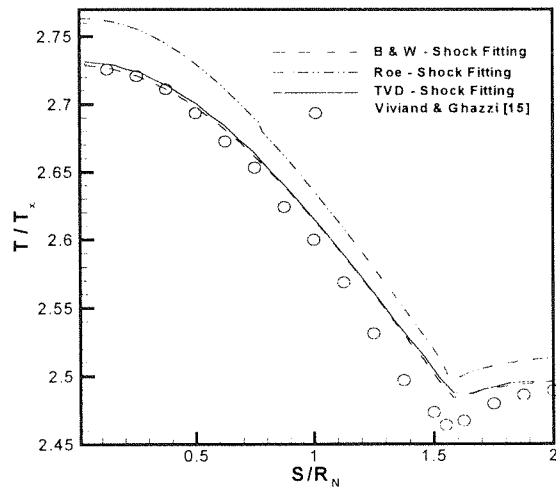


(ب)

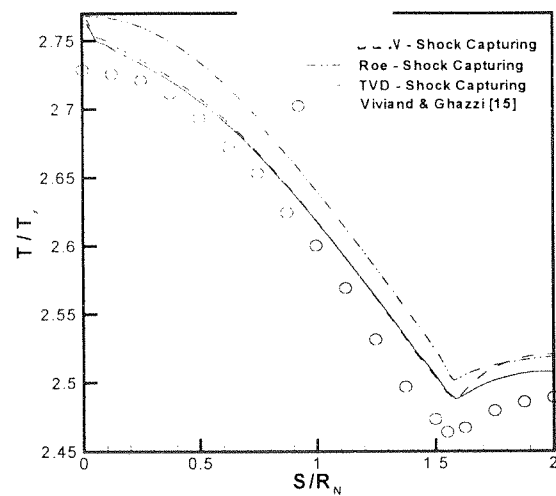
شکل (۵) مقایسه توزیع فشار و دما برای حل برازش

شوک در حالت  $Re = 1.5 \times 10^6$ ،  $M = 4.15$

و  $T_{cone} = 0^\circ$  الف- فشار سطح، ب- دمای سطح



(الف)

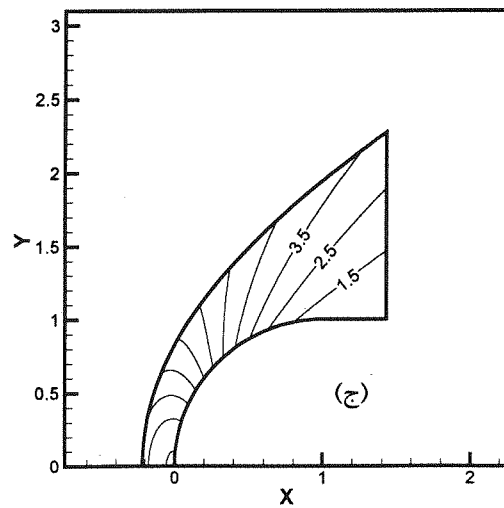
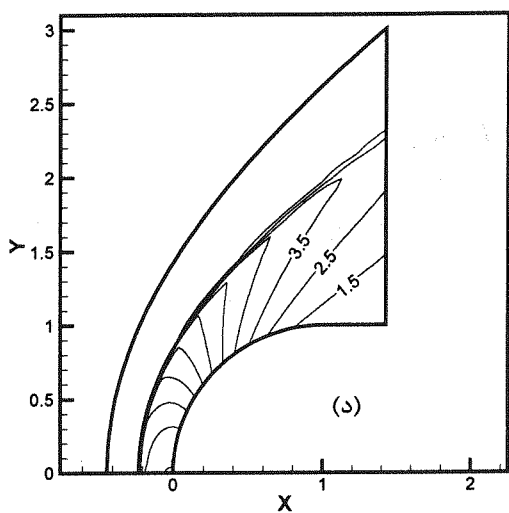
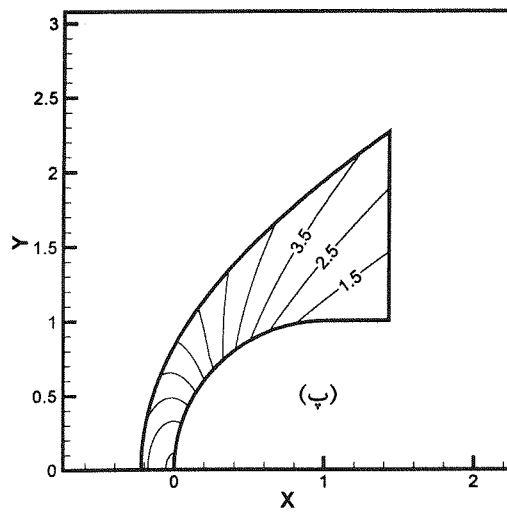
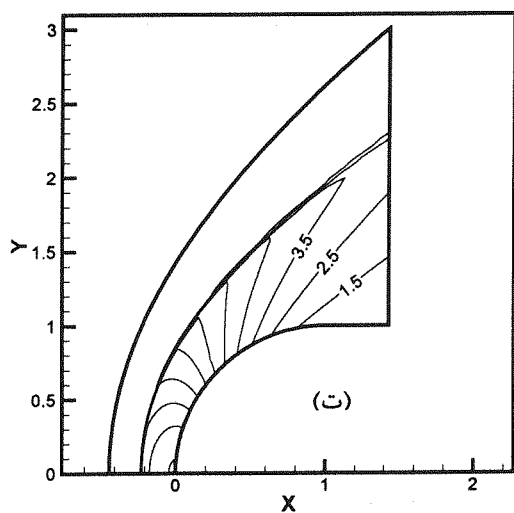
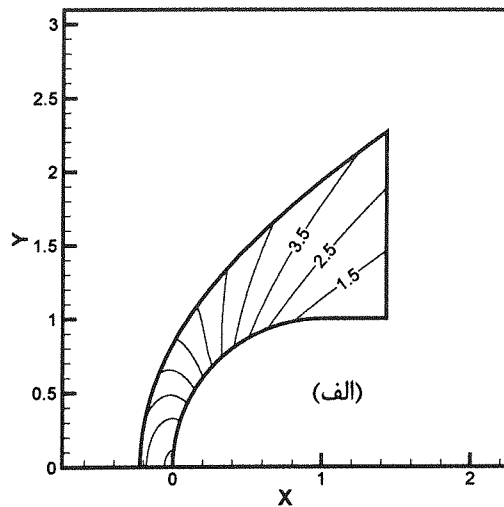
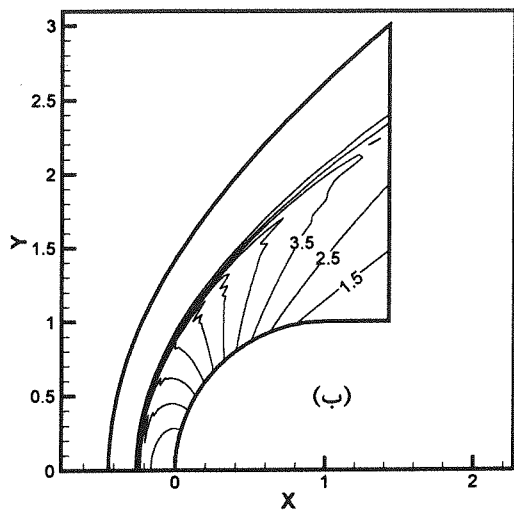


(ب)

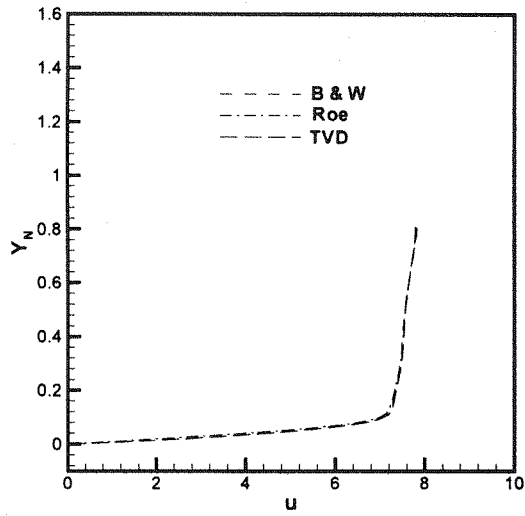
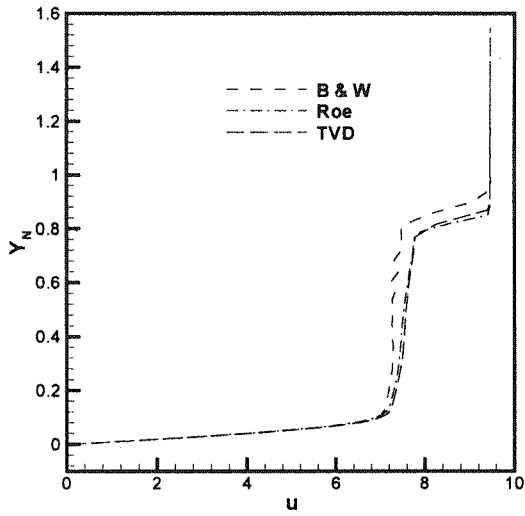
شکل (۴) مقایسه توزیع دمای سطح برای

حالت  $Re = 2.2 \times 10^5$ ،  $M = 2.94$

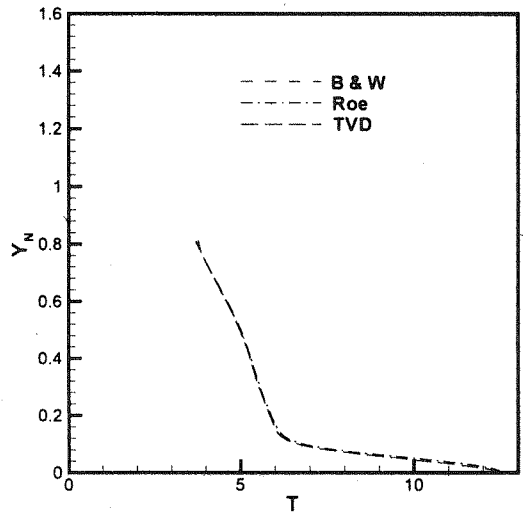
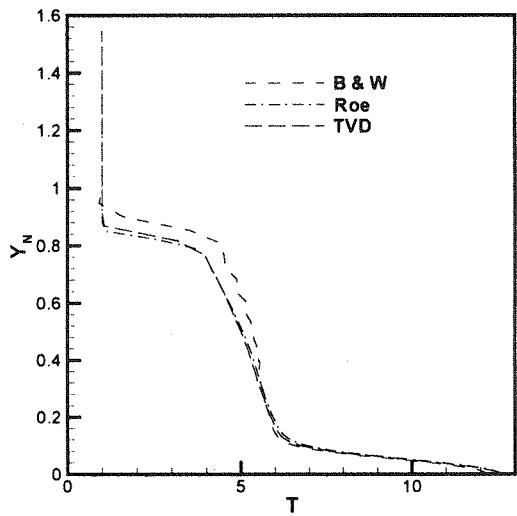
و  $T_{cone} = 0^\circ$  الف- برازش شوک، ب- تسخیر شوک



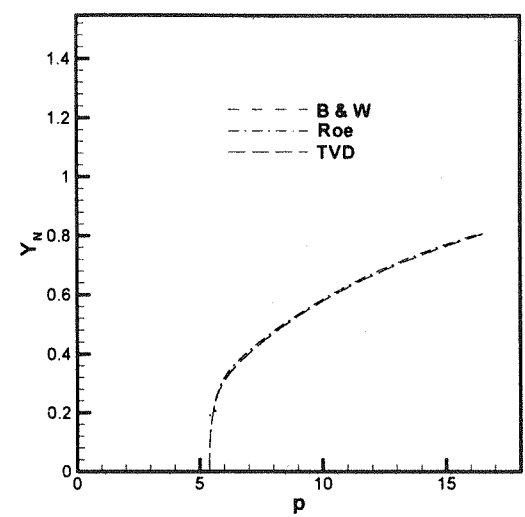
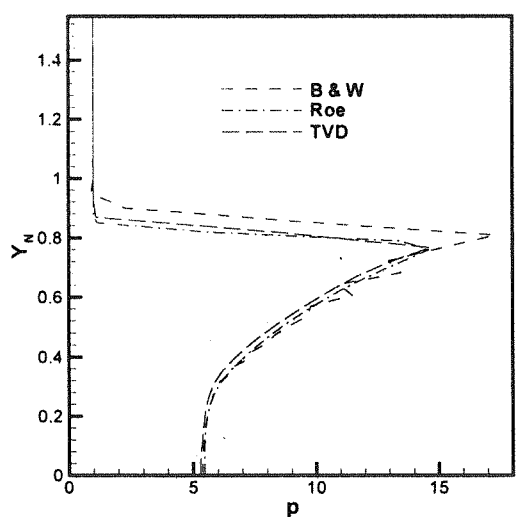
شکل (۶) مقایسه خطوط فشار ثابت برای روشهای مختلف به ازای  $M = 2.94$ ،  $Re = 2.2 \times 10^5$  و  $T_{cone} = 0^\circ$   
 الف- برازش شوک بیم-وارمینگ، ب- تسخیر شوک بیم-وارمینگ، پ- برازش شوک Roe، ت- تسخیر شوک Roe،  
 ج- برازش شوک TVD، د- تسخیر شوک TVD



شکل (۷) مقایسه پروفیل سرعت برای روشهای برازش و تسخیر شوک.



شکل (۸) مقایسه پروفیل دما برای روشهای برازش و تسخیر شوک.



شکل (۹) مقایسه پروفیل فشار برای روشهای برازش و تسخیر شوک.

## فهرست علائم

Factored Algorithm	الگوریتم فاکتورگیری شده	$a$	مقدار ویژه ماتریس ژاکوبین شار غیر لزج
Numerical Discretization	انفصال عددی	$A, B$	ماتریسهای ژاکوبین بردارهای $F$ و $G$
Discretized	انفصالی	$c$	سرعت صوت
Upwind	بالادست	$Diag$	ماتریس قطری
Shock Fitting	برازش شوک	$e$	انرژی داخلی بر واحد جرم
Beam-Warming	بیم - وارمینگ	$E$	انرژی کل بر واحد حجم
Dissipative	پخشی	$F, G, H$	بردارهای شار غیرلزج در مختصات منحنی الخه
Dispersive	پراکندگی	$i, j$	اندیس نقاط شبکه منحنی الخط در جهات $\xi, \eta$
Shock Capturing	تسخیر شوک	$I$	ماتریس واحد
High Resolution	تفکیک پذیری بالا	$J$	ژاکوبین تبدیل
Steady State Solution	حل حالت دائم	$K$	ماتریس ژاکوبین جمله غیرلزج تقارن محوری
Delta Form	دلتا فرم	$L, N$	ماتریسهای ژاکوبین بردارهای لزج $T, S$
Roe	رو	$M$	عدد ماخ
Implicit	ضمنی	$p$	فشار
Damping Terms	عبارتهای میراکننده	$p_\infty$	فشار جریان آزاد
Non-iterative	غیر تکراری	$Re$	عدد رینولدز
Total Variation Diminishing (TVD)	کاهش تغییرات کل	$Pr$	عدد پранتل
Time Step	گام زمانی	$R_N$	طول کمان در راستای بدنه
Numerical Dissipation	اتلاف عددی	$S, T$	بردارهای شار لزج
Flux Limiter	محدودکننده های شار	$u, v$	مولفه های سرعت
Damping	میراکنندگی	$t$	زمان
Thin-Layer Navier-Stokes	ناویر - استوکس لایه - نازک	$T_{cone}$	زاویه مخروط
		$T_\infty$	دمای جریان آزاد
		$x, y$	مولفه های مختصات کارتزین
		$Y_N$	فاصله عمودی از سطح جسم
		$\Delta t$	گام زمانی

## علائم یونانی

$\Delta$	عملگر اختلاف محدود پیشرو
$\epsilon$	ثابت شرط انتروپی
$\gamma$	نسبت گرماهای ویژه
$\xi, \eta$	مختصات منحنی الخط
$\xi_x, \xi_y, \eta_x$	متریکهای تبدیل
	ضریب لزجت
$\mu$	چگالی

- [1] Beam, R.M., and Warming, R.F., "An Implicit Factored Schemes for the Compressible Navier-stokes Equation", AIAA Journal, Vol. 16, No. 4, pp. 393-402, 1978.
- [2] Anderson, D. A., Tanehill, J. C., and Pletcher, R. H., "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer" Hemisphere Publishing Corporation 1984. p. 154.
- [3] Esfahanian, V., "Computation and Stability Analysis of Laminar Flow over a Blunted Cone in Hypersonic Flow", Ph.D. Thesis, The Ohio University, Columbus, Ohio, March 1991.
- [4] Hsieh, T., "Heat Transfer Calculation for Hypersonic Flow over a Spherical Blunt Nose Using an Unsteady Implicit Scheme" In Proceedings of the Second National Symposium on the Numerical Methods in Heat Transfer, Pages 375-401. Hemisphere, Washington D.C., 1982.
- [5] Yee, H.C., "High-Resolution Shock-Capturing Schemes for Inviscid and Viscous Hypersonic Flows", NASA TM 100097, Feb 1988.
- [6] Yee, H.C., "Upwind and Symmetric Shock-Capturing Schemes", NASA TM. 89464, May 1987.
- [7] Yee, H.C., "On the Implementation of a Class of Upwind Schemes for System of Hyperbolic Conservation Law", NASA TM 86839. Sept 1985.
- [8] Yee, H.C., Warming, R.F and Harten, A., "Implicit Total Variation Diminishing (TVD) Scheme for Steady-State Calculations", AIAA paper No. 83-1902, Proc. of the AIAA 6th Computational Fluid Dynamics Conference, Danvers, Mass. July. 1983.
- [9] Yee, H.C., "A Class of High-Resolution Explicit and Implicit Shock-Capturing Methods", NASA TM 101088, Feb 1989.
- [10] Harten, A., "On a Class of High Resolution Total-Variation-Stable Finite-Difference Schemes", SIAM. J. Numer. Anal, Feb 1984, Vol 21, No.1.
- [11] Hirsch, Ch., "Numerical Computational of Internal and External Flows", John-Wiley and Sons, 1988.
- [12] Yee, H.C., and Kutler, P., "Application of Second-Order-Accurate Total Variation Diminishing (TVD) Schemes to the Euler Equations in General Geometries", NASA TM. 85845 August 1983.
- [13] Pulliam, T.H., "Implicit Solutions Methods in Computational Fluid Dynamics," Applied Numerical Mathematics, Vol. 2, No. 6, pp. 441-474, 1986.
- [14] Kutler, P., Chakravarthy, S. R. and Lombard, C. P., "Supersonic Flow Over Ablated Nostip Using an Unsteady Implicit Numerical Procedure", AIAA Paper 78-213, January 1978.
- [15] Viviani, H., and Ghazzi, W., "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations at High Reynolds Numbers with Application to the Blunt Body Problem" In Lecture Notes in Physics, No. 59, Proceedings of the Fifth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Pages 375-401, 1976.
- [16] Beckwith, I.E., and Gallagher, J.J., "Heat Transfer and Recovery Temperatures on a Sphere with Laminar Transitional and Turbulent Boundary Layers at Mach Numbers of 2 and 4.15, NACA TN 4125, 1957.