شبیه سازی امواج با استفاده از روش انتگرال مرزی

سید علی آزرمسا
استادیار
دانشکده علوم دریایی، دانشگاه تربیت مدرس

غلامرضا ابوالحسنی
کارشناسی ارشد
دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

چکیده

مدلی عددی براساس تئوری پتانسیل برای پیشبرد امواج غیرخطی در دو بعد با بکارگیری روش انتگرال مرزی کُشی همراه با روش لاگرانژی پیشبرد زمانی برای سطح آزاد آب ارائه شده است.

مدل عددی حاضر قادر است تغییر شکلهای پایدار سطح آزاد آب را بررسی نماید انتظار میرود به کمک این مدل بتوان نیروی وارده بر اجسام متحرک یا ثابت غوطه‌ور را محاسبه نمود.

کلمات کلیدی

تئوری پتانسیل، تئوری کُشی، روش انتگرال مرزی، امواج غیرخطی، پیشروی امواج

Simulation of Waves Using a Boundary Integral Method

S. A. Azarmsa
Assistant Professor
Faculty of Marine Sciences,
Tarbiat Modarres University

G. Aboulhasani
Former Graduate Student
Faculty of Engineering,
Tarbiat Modarres University

Abstract

A numerical model based on potential theory is developed for a two dimensional nonlinear water waves using the Cauchy boundary integral equation together with a Lagrangian time marching method for free water surface. This model can deal with stable deformations of free water surface.

Applying this model, the forces exerted by waves on fixed or mobile objects can be computed.

Keywords

Potential theory, Cauchy theorem, boundary integral method, nonlinear waves, wave propagation.

مقدمه

برای مهندسین طراح پیشگویی دقیق بارگذاری امواج بر روی سازه‌های دریایی اهمیت والایی دارد، مخصوصاً وقتی که سازه‌ها از ابعاد بزرگی برخوردار باشند، طراحی نا مناسب آنها می‌تواند عواقب جانی و مالی جبران نا پذیری در بر داشته باشد.

درحالت کلی بارگذاری امواج را نمی‌توان بطور تحلیلی محاسبه نمود. از اینرو دو روش مدل آزمایشگاهی و مدل عددی برای بارگذاری امواج استفاده می‌گردد که در این تحقیق از مدل عددی برای بارگذاری امواج استفاده شده است.

روشهای عددی متعددی همانند، روش المان محدود (FEM)، روش تفاضل محدود (FDM) و روش انتگرال مرزی (BIEM) وجود دارد که روش معادلات انتگرال مرزی نسبت به روشهای دیگر از مزایا و برتریهای خاصی ازجمله محدود نمودن دامنه محاسبات در مرز میدان و قابلیت بررسی مسائل تئوری پتانسیل با تشکیل و حل دستگاه معادلات خطی n معادله و n مجهول، اشاره نمود.

بالغ بر بیست سال از مدلسازی پیشبرد امواج غیرخطی در دو بعد با استفاده از تئوری پتانسیل به روش انتگرال مرزی میگذرد. در سال ۱۹۷۱ میلادی، ایده بکارگیری معادلات انتگرال مرزی برای حل مسائل سطح آزاد آب مطرح شد و درطول این سالها لانگوت ـ هیگنز و کوکلت (Longuet-Higgins & Cokelet,1976)، وینج و برویگ (Vinge & Brevig,1981) و دولد و پرگرین (Dold & Peregrine,1986) و .... مدلهائی را در این راستا ارائه نمودند.

در روشهای ارائه شده توسط لانگوت ـ هیگنز و کوکلت (Longuet-Higgins & Cokelet, 1976) و دولد و پرگرین (Dold & Peregrine, 1986) معادلات حاکم انتگرال مرزی در فضایی متفاوت با فضای فیزیکی حل شده و برای به دست آوردن ($\frac{\partial \varphi}{\partial t}$) درسطح آزاد آب از تئوری گرین استفاده می‌شد که منجر به حل معادله انتگرال فردهولم (Fredholm, 1903) نوع اول میگردید.

وینج و برویگ (Vinge & Brevig,1981) مدل جدیدی براساس تئوری انتگرال کُشی برای بدست آوردن معادلات حاکم انتگرال مرزی و حل مناسب آنها ارائه نمودند. مزیت اصلی انتگرال مرزی کُشی دراین روش، توصیف مناسب شکست موج و پایداری مدل تا لحظه شکست موج است. محاسبات دراین روش براساس تئوری پتانسیل در مرز میدان سیال و با فرض حرکت متناوب سیال در دوبعد بعمل آمده است.

۱ ـ معادلات حاکم و شرایط مرزی

۱-۱ـ معادلات حاکم

معادلات حاکم در روش انتگرال مرزی ترکیبی از توصیفات لاگرانژی و اویلری است و میدان سیال در یک سیستم مختصات ثابت فیزیکی نسبت به زمان درنظر گرفته شده است.

دربررسی تغییر شکل سطح آزاد آب برای استفاده از تئوری پتانسیل فرض شده که سیالی هموژن در میدان($\Omega(t)$) مطابق شکل(۱) در دو بعد که بوسیله مرز بسته ($\gamma(t)$) محصور شده، داریم و سیال لزج، غیرقابل تراکم و غیر چرخشی است. معادلات لاپلاس برای پتانسیل سرعت (φ) و تابع جریان (ψ) را میتوان از معادله پیوستگی سیال، به ترتیب و با فرض غیر قابل تراکم و غیر چرخشی بودن سیال بدست آورد:

$$\nabla . q = 0 \Rightarrow \nabla^2 \varphi = 0 \qquad (۱)$$

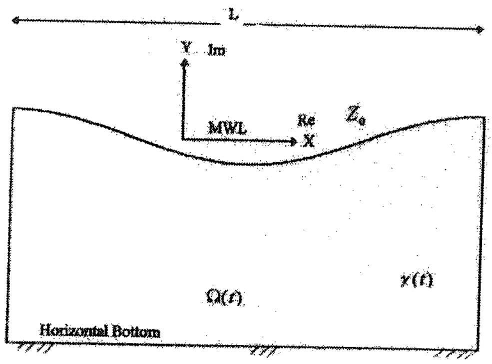
$$\nabla \times q = 0 \Rightarrow \nabla^2 \psi = 0 \qquad (۲)$$

۱-۱-۱ـ معادلات انتگرال مرزی کُشی

باتوجه به معادلات حاصله از تئوری پتانسیل میتوان تابع پتانسیل مختلط $\beta(z;t) = \varphi(z;t) + i\psi(z;t)$ را به ازاء مقادیر

(z)، تحلیلی درنظر گرفت و تئوری انتگرال کُشی را برای این تابع طبق معادله (۳) بکاربرد:

$$\oint_{\gamma(t)} \frac{\beta(z;t)}{z-z_0} dz = 0 \qquad (۳)$$



شکل(۱) میدان سیال ($\Omega(t)$) و مرز بسته ($\gamma(t)$).

در معادله (۳)، ($\gamma(t)$) مرز بسته ایی پیرامون میدان سیال ($\Omega(t)$) مشتمل بر مرز کف ($\gamma_b(t)$)، مرزهای جانبی ($\gamma_{r1}(t)$)، ($\gamma_{r2}(t)$) و مرز سطح آزاد آب ($\gamma_s(t)$) است. بطوریکه فاصله بین مرزهای جانبی طبق شکل (۱) به فاصله یک طول موج (L) می باشد. و (Z_0) گره ای خارج از میدان سیال درنزدیکی گره (Z_k) واقع بر مرز بسته ($\gamma(t)$) است.

جمله عمومی معادلات حاکم انتگرال مرزی کُشی طبق معادله انتگرال فردهولم (Fredholm) نوع دوم با فرض اینکه مرز بسته ($\gamma(t)$) به مرزهای (C_φ) و (C_ψ) تقسیم شود، بصورت معادلات(۴) و (۵) ارائه می‌گردد.

برای (Z_k) هایی که روی مرز (C_φ) باشند.

$$-\alpha_k \cdot \psi(z_k;t) + \mathrm{Re}\{\int_\gamma \frac{\beta(z;t)}{z-z_k} dz\} = 0 \qquad (۴)$$

برای (Z_k) هایی که بر روی مرز (C_ψ) باشند.

$$-\alpha_k \cdot \varphi(z_k;t) - \mathrm{Re}\{i\int_\gamma \frac{\beta(z;t)}{z-z_k} dz\} = 0 \qquad (۵)$$

دراین معادلات (α_k) زاویه بین مماسهای طرفین گره (Z_k) درحالت حدی می‌باشد و برای گره‌های واقع در کنج قائم مرز بسته ($\gamma(t)$) برابر ($\frac{-\pi}{2}$) و درنقاط واقع بر مسیر صاف مرز بسته ($\gamma(t)$) برابر ($-\pi$) است.

مرز(C_φ) مرزی است که پتانسیل سرعت و مشتق جزئی زمانی تمام گره‌های واقع براین مرز مشخص است و (C_ψ) مرزی است که تابع جریان و مشتق جزئی زمانی تمام گره‌های واقع بر آن مشخص است.

۱-۲- شرایط مرزی مرز بسته ($\gamma(t)$)

مرز بسته ($\gamma(t)$) شامل چهار مرز مجزای، مرز سطح آزاد آب ($\gamma_s(t)$)، مرز کف ($\gamma_b(t)$) و مرزهـای جـانبی ($\gamma_{r1}(t)$) و ($\gamma_{r2}(t)$) است.

- مرز سطح آزاد آب شامل دو شرط مرزی سینماتیکی و دینامیکی بصورت زیر است:
- شرط مرزی سینماتیکی: (۶)

$$\frac{Dz}{Dt} = u + iv = \bar{q} \qquad y = \eta \tag{۶}$$

ـ شرط مرزی دینامیکی: (۷)

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 - gy - \frac{P_s}{\rho} \qquad y = \eta \tag{۷}$$

ـ فرض شده مرز کف ($(\gamma_b(t)$)، در عمق معین و ثابتی از تراز متوسط سطح آزاد آب بصورت مرزی غیر قابل نشست باشد. بدین لحاظ شرایط مرزی این مرز برابر است با:

$$\psi = 0 \;\&\; \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0 \;\&\; \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \tag{۸}$$

ـ شرایط مرزی، مرزهای جانبی که به فاصله یک طول موج بصورت قائم بر کف قرار دارند، برابر است با:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}(\gamma_{r1}(t)) = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}(\gamma_{r2}(t)) \qquad \text{و} \qquad \varphi(\gamma_{r1}(t)) = \varphi(\gamma_{r2}(t)) \tag{۹}$$

لذا با حل معادلات حاکم انتگرال مرزی کُشی همراه با یک روش لاگرانژی پیشبرد زمانی، تابع پتانسیل مختلط و مشتقات زمانی و مکانی آن در طول مرز بسته ($(\gamma(t)$) و بطور کل در میدان سیال ($(\Omega(t)$) بدست می‌آید و با داشتن پتانسیل مختلط و مشتقات زمانی و مکانی آن در میدان سیال میتوان شتاب و فشار هر ذره از سیال را در میدان دوبعدی سیال ($\Omega(t)$) بدست آورد.

۲ ـ روش حل عددی

برای حل عددی معادلات حاکم انتگرال مرزی کُشی، بایستی بتوانیم با استفاده از معادلات مذکور، دستگاه معادلات خطی n معادله و n مجهولی تشکیل داده و تابع پتانسیل مختلط میدان سیال ($(\Omega(t)$) را بدست آوریم، برای تحقق این امر بایستی موقعیت مکانی و پتانسیل سرعت ذرات سیال واقع بر سطح آزاد آب ($(x,y,\varphi)_s$) در هر تراز زمانی را بـه کمک روش عددی لاگرانژی پیشبرد زمانی، با استفاده از شرایط مرزی سطح آزاد آب بدست آورد.

در روش وینج و برویگ(Vinge & Brevig,1981) از روش عددی هامینگ مرتبه ۴(Hamming's fourth-order Predictor-Corrector) جهت پیشبرد زمانی سطح آزاد آب استفاده شد، بطوریکه در محاسبات انجام شده توسط وینج و برویگ (Vinge & Brevig,1981) حتی هنگامیکه شکست موج بررسی میشد، هیچ نشانه‌ای از ناپایداری در مدل مشاهده نمی‌گردید.

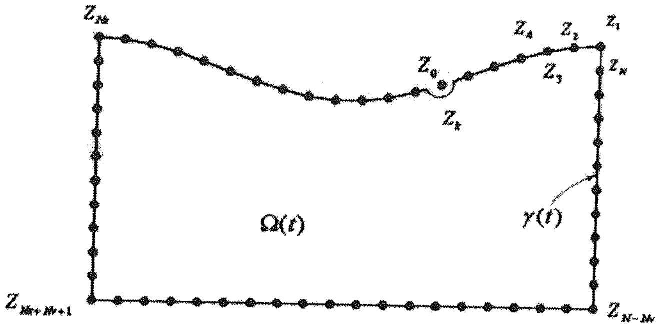
۲-۱ـ روش حل عددی معادلات حاکم

برای حل عددی معادلات حاکم (معادلات (۴)، (۵)) درنقاط منفصل شده در ($\gamma(t)$) مرز بسته میدان سیال مطابق شکل(۲) با فرض آنکه تغییرات تابع پتانسیل مختلط ($\beta(z;t)$) و مشتق جزئی زمانی ($\partial\beta(z;t)/\partial t$) در طول مرز بسته ($\gamma(t)$) بین نقاط منفصل شده نسبت به (Z) خطی باشد داریم:

$$\oint_\gamma \frac{\beta(z;t)}{z - z_k} dz = \sum_{j=1}^{j=N} \Gamma_{k,j} \cdot \beta_j \tag{۱۰}$$

$$\oint_{\gamma} \frac{\partial \beta(z;t) / \partial t}{z - z_k} dz = \sum_{j=1}^{j=N} \Gamma_{k,j} . (\frac{\partial \beta}{\partial t})_j \qquad (۱۱)$$

$$;\Gamma_{k,j} = \frac{z_k - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \ln(\frac{z_j - z_k}{z_{j-1} - z_k}) + \frac{z_k - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \ln(\frac{z_{j+1} - z_k}{z_j - z_k}) \qquad (۱۲)$$



شکل(۲) میدان سیال ($\Omega(t)$) و مرز ($\gamma(t)$) منفصل شده.

حال طبق معادلات(۱۰) و (۱۱) و روند محاسباتی معادله انتگرال فردهولم (Fredholm) نوع دوم، جملـه عمومـی معـادلات عددی حاکم انتگرال مرزی کُشی برابر است با:

- برای (Z_k)هایی که روی مرز (C_φ) باشند:

$$\mathrm{Re}\{\oint_{\gamma} \frac{\beta(z;t)}{z - z_k} dz\} = -\alpha_k . \psi(z_k;t) + \mathrm{Re}\{\int_{\gamma} \frac{\beta(z;t)}{z - z_k} dz\} \cong \mathrm{Re}\{\sum_{j=1}^{j=N} \Gamma_{k,j} . \beta_j\} = 0 \qquad (۱۳)$$

$$\mathrm{Re}\{\oint_{\gamma} \frac{\partial \beta(z;t) / \partial t}{z - z_k} dz\} = -\alpha_k . \partial \psi(z_k;t) / \partial t + \mathrm{Re}\{\int_{\gamma} \frac{\partial \beta(z;t) / \partial t}{z - z_k} dz\} \cong \mathrm{Re}\{\sum_{j=1}^{j=N} \Gamma_{k,j} . (\frac{\partial \beta}{\partial t})_j\} = 0 \qquad (۱۴)$$

برای (Z_k)هایی که بر روی مرز (C_ψ) باشند:

$$-\mathrm{Re}\{i\oint_{\gamma} \frac{\beta(z;t)}{z - z_k} dz\} = \alpha_k . \psi(z_k;t) - \mathrm{Re}\{\int_{\gamma} \frac{\beta(z;t)}{z - z_k} dz\} \cong -\mathrm{Re}\{i \sum_{j=1}^{j=N} \Gamma_{k,j} . \beta_j\} = 0 \qquad (۱۵)$$

$$-\mathrm{Re}\{i\oint_{\gamma} \frac{\partial \beta(z;t) / \partial t}{z - z_k} dz\} = \alpha_k . \partial \psi(z_k;t) / \partial t - \mathrm{Re}\{i\int_{\gamma} \frac{\partial \beta(z;t) / \partial t}{z - z_k} dz\} \cong -\mathrm{Re}\{\sum_{j=1}^{j=N} \Gamma_{k,j} . (\frac{\partial \beta}{\partial t})_j\} = 0 \qquad (۱۶)$$

لذا میتوان چهار جمله عمومی معادله عددی حاکم را برای چهار مرز مذکور بکاربرد و با تشکیل دستگاه معـادلات خطـی n مجهول، به روش حذف گاوس(Gauss) دستگاه معادلات خطی را حل کرده و مقادیر پتانسیل مختلط (β) و مشـتق جزئـی

زمانی پتانسیل مختلط ($\partial\beta/\partial t$) هر گره، واقع بر مرز بسته ($\gamma(t)$) را بدست آورد و با داشتن تـابع پتانسـیل مختلـط و مشـتق جزئی زمانی آن در طول مرز بسته ($\gamma(t)$)، میتوان برای هر نقطه‌ایی همــانند (z_0) در داخـل میـدان سـیال، مقـدار پتانسـیل مختلط و مشتق جزئی زمانی آن نقطه را طبق معادلات (۱۷) و (۱۸) بدست آورد و سپس مقادیر سرعت مختلـط ($q = u - iv$) و مشتقات آن را محاسبه ئمود.

$$\beta(z_0;t) + \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\beta(z;t)}{z - z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{j=N}\Gamma_{0,j}(z_{j-1}, z_{j+1}, z_0).\beta_j(z_j;t) \qquad (۱۷)$$

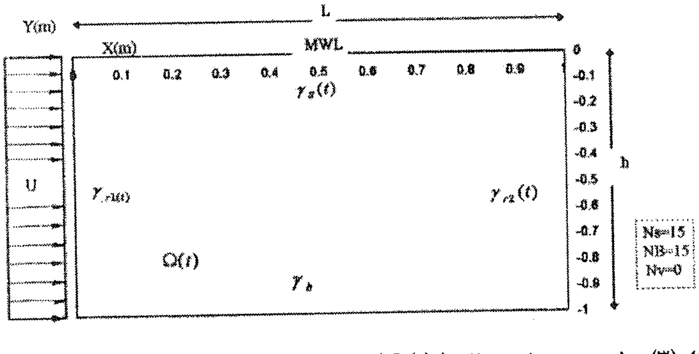
$$\frac{\partial\beta(z_0;t)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\partial\beta(z;t)/\partial t}{z - z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{j=N}\Gamma_{0,j}(z_{j-1}, z_{j+1}, z_0).\frac{\partial\beta(z_j;t)}{\partial t} \qquad (۱۸)$$

که در آن:

$$\Gamma_{0,j}(z_{j-1}, z_{j+1}, z_0) = \frac{z_0 - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}}\ln(\frac{z_j - z_0}{z_{j-1} - z_0}) + \frac{z_0 - z_{j+1}}{z_j - z_{j+1}}\ln(\frac{z_{j+1} - z_0}{z_j - z_0}) \qquad (۱۹)$$

۳ ـ کنترل عددی مدل

درمدل عددی ارائه شده برای ترازهای زمانی متعددی، محاسبات صـورت مـی پذیـرد. بنـابراین لازمسـت معـادلات حـاکم انتگرال مرزی جهت بدست آوردن پتانسیل مختلط (β) با دقت زیادی حل گردد. لذا برای کنترل حل معادلات حاکم انتگـرال مرزی همراه با روش لاگرانژی پیشبرد زمانی، جریان یکنواختی را در کانالی با عمق ثابت که حل تحلیلی دقیـق آن در راسـتای پیشبرد میدان سیال قابل محاسبه باشد مطابق شکل(۳) مدل می‌نمائیم. در شکل(۴) ملاحظه می گردد پس از گذشـت زمـانی برابر یک پریود از پیشروی میدان سیال، مدل پایدار است و این پایداری تا زمانیکه پیشروی میـدان سـیال بررسـی مـی گـردد برقرار می‌باشد و در هر تراز زمانی سرعت میدان سیال برابر (U) است.



شکل(۳) پیشروی میدان سیال ($\Omega(t)$) با جریانی یکنواخت در یک پریود زمانی.

برای کنترل مدل هنگامیکه سطح آزاد آب تغییر شکل می‌دهد از موج استوکس مرتبه۹ درحـالت پـایدار، مـوج اولیـه‌ای در میدان سیال ($\Omega(t)$) در آبهای عمیق بوجود می آوریم و در راستای پیشروی آن میدان سیال مدل شده را بررســی می‌نمـائیم، مطابق شکل(۵) ملاحظه می‌گردد مدل در راستای پیشروی خود پایدار می‌ماند.

چنانچه از موج ناپایداری در میدان سیال ($\Omega(t)$)، بعنوان موج اولیه استفاده شود یا هنگامیکه جهت ناپـایدار نمـودن مـوج

پایدار اولیه، نیروی خارجی بر سطح آزاد آب وارد شود، انتظار می‌رود پس از مدت زمانی موج شکسته شود. در این حالت جهت کنترل پایداری مدل میتوان از کنترلهایی بشرح زیر استفاده نمود:

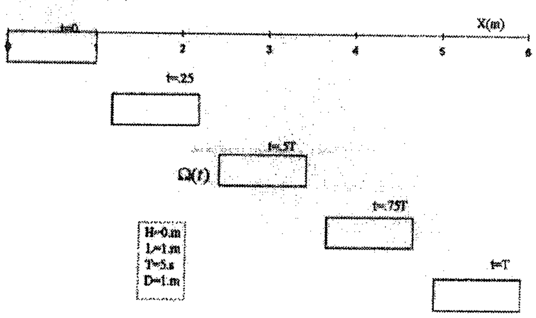
۱ ـ تغییرات انرژی کل میدان سیال نسبت به زمان باید با کار انجام شده توسط نیروی خارجی وارده بر سطح آزاد آب برابر باشد،

۲ـ تغییرات اندازه حرکت سیال در جهت محور xها نسبت به زمان باید با مجموع نیروهای افقی وارده بر سطح آزاد آب برابر باشد،

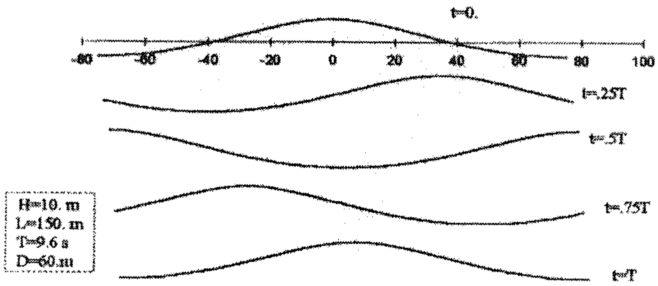
۳ ـ شار جریان(Flux) سیال باید در طول سطح آزاد آب برابر صفر باشد.

٤ ـ بحث و نتیجه گیری

در نهایت کنترلهای مذکور نشان می‌دهد مدل ارائه شده برای میدان دو بعدی سیالی با موجی پایدار در سطح آزاد آب و برای میدان سیالی با جریان یکنواخت جوابهای مناسبی می‌دهد. در نتیجه می‌توان مدل را برای بررسی تغییر شکل سطح آزاد آب با دقت مناسب بکار برد.



شکل(٤) پیشروی میدان سیال ($\Omega(t)$) با جریانی یکنواخت در یک پریود زمانی.



شکل(۵) پیشروی موج استوکس مرتبه۹ در یک پریود زمانی.

مراجع

[1] Dold,J.W, & Peregrine D.H. (1986a): An efficient boundary-Integral method for steep steady water waves. In "Numerical Methods for Fluid Dynamics II" Edited By Morton K.W. & Baines M.J., Oxford U.P., pp671-679.

[2] Fredholm,I.(1903): Sur une classe d' equations. Acta Mathematica, 27, pp365-390.

[3] Longuet-Higgins, MS. & Colelet E.D.(1976): The deformation of steep surface waves. I.A numerical method of computation. Proc. Of the Royal Society, London, A350,pp 1-26.

[4] Vinje, T. & Brevig P.(1981 a): Numerical simulation of breaking waves. Adv. Water resources, Vol.4,pp77-82.

[5] Vinje, T & Brevig P.(1981 b): Numerical calculation of forces from breaking waves. Hydrodynamics in Ocean Engineering, pp 547- 565.