

اصلاح مولفه های سرعت در روش تقریب مهندسی لایه نازک در قسمت پشت به باد اجسام سه بعدی ماوراء صوت

سید محمد حسین کریمیان

دانشیار

دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مهدی معرفت

استادیار

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

مهرداد ملک زاده دیرین

دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

چکیده

برای تحلیل جریان ماوراء صوت در قسمت پشت به باد اجسام سه بعدی از روشهای تقریب مهندسی استفاده می گردد. در بعضی از روشهای تقریب مهندسی از رابطه مرتبه دوم فشار مزین استفاده می شود و سرعت قائم نیز معمولاً از یک رابطه تقریبی بدست می آید. در این مقاله برای آنکه بتوان دقت محاسبه این مولفه سرعت را بالا برد با استفاده از معادله پیوستگی رابطه جدیدی برای سرعت قائم در لایه شوک بدست آمده است. نتایج برای یک مخروط نوک پخ نمایش داده شده اند و بیانگر آنند که پروفیل سرعت پیشنهادی موجب بهبود و توسعه روش به قسمت پشت باد اجسام سه بعدی ماوراء صوت می شود.

کلمات کلیدی

ماوراء صوت - پشت به باد - جریان غیر لزج - تقریب لایه نازک

Velocity Modification of a Thin-Layer Approximate Engineering Method in the Leeward Region of Three-Dimensional Hypersonic Bodies

M. Maerefat

Assistant Professor

Tarbiat-Modares University

S. M. H Karimian

Associate Professor

Amirkabir University of Technology

M. Malekzadeh Dirin

Ph. D Student

Tarbiat-Modares University

Abstract

Thin-layer approximate engineering methods are used for calculation of inviscid hypersonic flows over blunt-nosed bodies. In these methods, the pressure is obtained using Maslen's pressure relation and the normal velocity component is calculated using an approximate relation which is not accurate enough in the leeward region. In this paper, a new relation for calculation of normal

velocity has been derived from the continuity equation using thin shock layer assumptions. It has been shown that the present relation has critically improved the profiles of velocity in the leeward region. Results are presented for a cone at angle of attack and are compared with finite difference solutions of Euler equations. Since the method is fast, it can be used for preliminary design or parametric study of hypersonic vehicles.

Keyword

Hypersonic – Leeward Region – Inviscid Flow – Thin-Layer Assumption

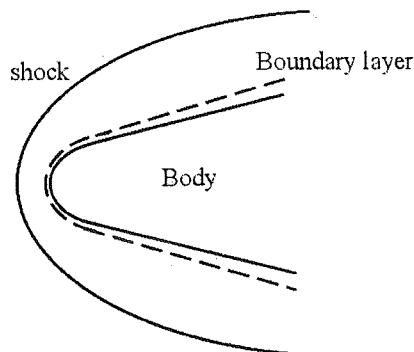
مقدمه

برای طراحی حرارتی اجسام ماوراء صوت می‌باید ضریب انتقال حرارت جابجایی روی سطح محاسبه گردد. چنین نتیجه‌ای را می‌توان با حل عددی معادلات ناویر-استوکس (NS) [۱] یا یکی از صورتهای ساده شده آن نظیر معادلات سه‌موی شده (PNS) [۲] و یا معادلات لایه شوک لزج (VSL) [۳] بدست آورد. متأسفانه زمان اجرای کامپیوتری چنین روشهایی در حال حاضر طولانی بوده و استفاده از آنها مقرون به صرفه نمی‌باشد [۴]. چرا که در مرحله طراحی اولیه، بازه وسیعی از شکلهای هندسی مختلف و شرایط جریان آزاد مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

بنابراین ترجیح داده می‌شود تا برای طراحی اولیه و محاسبه گرمایش آیرودینامیکی اجسام ماوراء صوت از روشهای تقریب مهندسی لایه نازک^۱ استفاده شود که از سرعت بالاتری در محاسبات برخوردارند. در این تحلیل‌ها میدان جریان سیال اطراف جسم به دو ناحیه جریان در لایه مرزی و جریان غیر لزج در بیرون لایه مرزی تقسیم می‌گردد (شکل ۱). متداول است که ابتدا میدان جریان غیر لزج حل شود و سپس خواص جریان غیر لزج روی بدنه به عنوان شرایط لبه لایه مرزی در نظر گرفته شود. همانطور که گفته شد این روش‌ها از سرعت و دقت بالایی برخوردارند. بطوریکه حتی امروزه نیز برای طراحی اجسام ماوراء صوت مورد استفاده قرار می‌گیرند [۵]. پس از تقسیم جریان سیال اطراف جسم به دو ناحیه جریان لزج (لایه مرزی) و جریان غیر لزج، می‌توان از روشهای مختلفی برای حل این نواحی استفاده کرد.

برای تحلیل جریان غیر لزج اطراف جسم می‌توان از روشهای عددی [۶] و یا از روش مشخصه‌ها [۷] و یا ترکیبی از هر دو [۸] استفاده کرد. ولی زمان اجرای کامپیوتری چنین روشهایی در حال حاضر طولانی بوده (حداقل در صورت استفاده از کامپیوترهای شخصی) و مناسب طراحی اولیه اجسام ماوراء صوت نیستند. بنابراین یک روش تقریبی حل میدان جریان غیر لزج سه بعدی می‌تواند کاربرد مهم و موثری داشته باشد.

روشهای تقریبی متعددی برای حل جریان غیر لزج سه بعدی وجود می‌باشند که شاید ساده‌ترین آنها تئوری اصلاح شده نیوتنی باشد. این روش فشار در ناحیه سکون اجسام نوک پخ را با دقت خیلی خوبی مشخص می‌کند ولی برای اجسام لاغر^۲ دقیق نیست. بعلاوه نداشتن شکل حقیقی شوک و مشخص نبودن خصوصیات لایه شوک کاربرد این تئوری را بطور جدی محدود می‌کند. بعضی از محققین برای محاسبه خواص میدان جریان غیر لزج، اشکال مختلف روش مزلن^۳ را به کار می‌برند. روش اصلی مزلن [۹] برای جریانهای متقارن محوری ماوراء صوت قابل استفاده است. در این روش ابتدا معادله ممنوم قائم بر شوک به مختصات تابع جریان منتقل می‌شود و پس از استفاده از فرضیات ساده کننده‌ای که در سرعتهای ماوراء صوت صادقند، از آن انتگرال گیری می‌شود، در نتیجه یک رابطه صریح خطی برای فشار در امتداد عمود بر شوک بدست می‌آید.



شکل (۱) نمایش نواحی لزج (لایه مرزی) و غیر لزج موجود در لایه شوک.

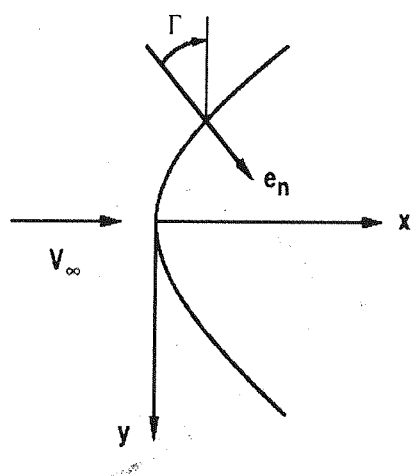
از آنجا که شکل جسم با توجه به شکل شوک بدست می‌آید، این روش یک روش معکوس می‌باشد و برای رسیدن به شکل جسم مورد نظر می‌باید یک فرایند تکرار را انجام داد. این روش نتایج قابل قبولی دارد ولی بواسطه رابطه فشار مرتبه اول، در ناحیه سکون اجسام نوک پخ دارای دقت کافی نیست. بعدها مزلن [۱۰] روش خود را به حالت سه بعدی توسعه داد. همچنین او رابطه مرتبه دومی برای فشار بدست آورد که دقت جوابها را بهتر می‌کرد. ولی این روش برای اجسام پیچیده خیلی سخت می‌شود و برای اجسام نوک پخ نیز جواب خوبی نمی‌دهد. رایلی و دوجارنت^۴ [۱۱] روش تقریب مهندسی سه بعدی‌ای را توسعه داده‌اند که بسیار دقیق تر از تئوری نیوتنی بوده و کاربرد وسیع‌تری از روش متقارن محوری مزلن دارد. روش آنها مانند روشی است که جکسون^۵ [۱۲] برای اجسام متقارن محوری دو بعدی ارائه کرده است. آنها در تحلیل خود از شکل اصلاح شده‌ای از تقریب مرتبه دوم فشار مزلن استفاده کرده‌اند و برای تعیین مولفه سرعت قائم نیز از روابطی که تابع جریان را تعریف می‌کنند، استفاده می‌شود.

روش آنها هم یک روش معکوس است. به این صورت که برای بدنه مورد نظر، هندسه‌ای برای شکل شوک حدس زده می‌شود و سپس جریان سیال در پشت این شوک حل می‌گردد. در ادامه با استفاده از خصوصیات جریان در لایه شوک، فاصله شوک تا خط جریان صفر (بدنه محاسباتی) محاسبه می‌شود و با توجه به خطای موجود بین بدنه محاسباتی و بدنه اصلی، شکل شوک اصلاح می‌گردد. در این روش فشار و جرم حجمی جریان در لایه شوک، با دقت بسیار خوبی تعیین می‌شوند. ولی در قسمت پشت به باد اجسام سه بعدی، مولفه‌های سرعت محاسبه شده توسط این روش دارای دقت کافی نیستند مخصوصاً در قسمت نواحی نزدیک به نوک جسم که جریان در آنجا زیر صوت است.

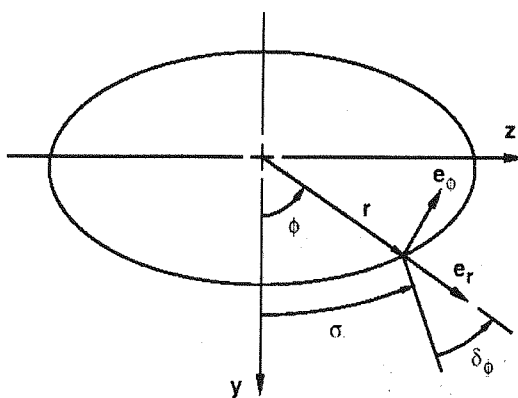
در این مقاله با استخراج مولفه سرعت عمود بر شوک از معادله پیوستگی، رابطه جدیدی بدست آمده که تاثیر قابل ملاحظه‌ای در بهبود مولفه‌های سرعت جریان غیر لزج لایه شوک دارد. این افزایش دقت مولفه‌های سرعت جریان غیر لزج دارای اهمیت زیادی می‌باشد چون از خصوصیات جریان غیر لزج لایه بیرونی به عنوان شرایط لبه لایه مرزی استفاده می‌شود و سپس جریان لزج لایه داخلی با استفاده از یک کد لایه مرزی حل شده و شار حرارتی منتقل شده به بدنه جسم محاسبه می‌گردد. در ادامه بعد به تشریح کلیات روش ارائه شده توسط رایلی و دوجارنت پرداخته شده است. همچنین تصحیح انجام شده نیز مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

۲- تحلیل جریان غیر لزج

در این قسمت به تشریح کلیات روش حل لایه غیر لزج بیرونی پرداخته شده است. توجه کنید که تمامی متغیرهای بکار گرفته شده در این مقاله، به شکل بی بعد می‌باشند.



شکل (۳) هندسه شوک (دید جانبی).



شکل (۲) هندسه شوک (دید از پشت).

۲-۱- سیستم مختصات

از آنجا که در این روش شکل جسم با توجه به شکل شوک تعیین می‌شود، ابتدا لازم است سیستم مختصات شوک معرفی شود. یک شوک سه بعدی را در نظر بگیرید که رویه آن در سیستم مختصات استوانه‌ای (x, r, ϕ) به صورت زیر تعریف شده باشد [۱۳]:

$$r = f(x, \phi) \quad (1)$$

محور x در امتداد بردار سرعت جریان آزاد بوده و دو زاویه $\Gamma(x, \phi)$ و $\delta_\phi(x, \phi)$ که شکل شوک را تعریف می‌کنند، به صورت زیر هستند: (شکل‌های ۲ و ۳)

$$\tan \delta_\phi = \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \phi}$$

$$\tan \Gamma = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \delta_\phi \quad (2)$$

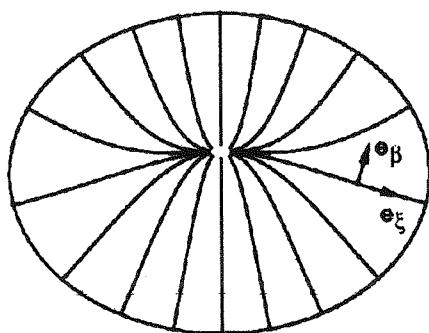
$$\sigma = \phi - \delta_\phi$$

دستگاه مختصات دیگری به نام دستگاه مختصات شوک (ξ, β, n) تعریف می‌شود [۱۴] که مرکز آن روی مرکز مختصات استوانه‌ای است. در این سیستم مختصات بردار e_n عمود بر شوک و به سمت داخل تعریف می‌شود. مختصه‌های ξ و β طوری انتخاب می‌شوند که e_ξ در جهت تصویر بردار سرعت جریان آزاد به روی شوک است و بردار e_β عمود بر e_ξ و e_n می‌باشد. بنابراین ξ و β معرف مختصات نقطه‌ای روی شوک می‌باشند و n معرف فاصله عمودی از روی شوک به سمت داخل است (شکل‌های ۴ و ۵).

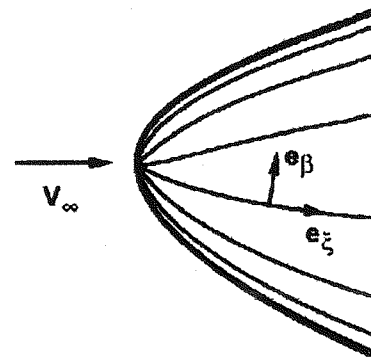
بردار سرعت نقطه‌ای از جریان در لایه شوک عبارت است از:

$$\bar{V} = ue_\xi + ve_n + we_\beta \quad (3)$$

از آنجا مولفه مماسی سرعت جریان آزاد در روی شوک، در دو طرف آن تغییر نمی‌کند بردارهای e_ξ یک دستگاه مختصات منحنی الخط شوک به صورت زیر بدست می‌آیند [۱۴]:



شکل (۵) سیستم مختصات منحنی الخط شوک (دید از جلو)



شکل (۴) سیستم مختصات منحنی الخط شوک (دید جانبی)

$$e_\xi = \cos \Gamma e_x + \sin \Gamma \cos \delta_\phi e_r - \sin \Gamma \sin \delta_\phi e_\phi$$

$$e_\beta = \sin \delta_\phi e_r + \cos \delta_\phi e_\phi \quad (4)$$

$$e_n = \sin \Gamma e_x - \cos \Gamma \cos \delta_\phi e_r + \cos \Gamma \sin \delta_\phi e_\phi$$

طول قطاعی کوچک بر روی شوک و در امتداد هر یک از این مختصات عبارتند از $h_n dn$ و $h_\beta d\beta$ ، $h_\xi d\xi$

۲-۲- معادلات حاکم

معادله پیوستگی برای یک جریان سه بعدی دائم به صورت زیر است:

$$\nabla \cdot (\rho V) = 0$$

با تعریف دو تابع جریان ψ و ϕ به صورت

$$\rho V = \nabla \psi \times \nabla \phi$$

و جایگذاری آن در معادله پیوستگی خواهیم داشت [۱۱]

$$\rho u h_\beta B = \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial \beta}$$

$$\rho v h_\xi h_\beta AB = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} - \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad (5)$$

$$\rho w h_\xi A = \frac{\partial \psi}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

همانطوری که در مراجع (۹ و ۱۰) اشاره شده است، در اجسام ماوراء صوت نوک یخ، بیشتر دبی جرمی جریان از نزدیکی شوک عبور می کند و در آنجا مولفه سرعت w بسیار ناچیز است، بنابراین می توان با تقریب خوبی فرض کرد که در لایه شوک $w = 0$. در صورتیکه ϕ را به صورت $\phi(\beta)$ فرض کنیم خواهیم داشت

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = -\rho u h_\beta B \quad (6)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \rho v h_\xi h_\beta AB \quad (7)$$

۳-۲ - رابطه فشار

معادله ممنتوم برای جریان غیر لزج عبارت است از

$$V \cdot \nabla V = -\frac{1}{\rho} \nabla P$$

که می توان آن را در دستگاه مختصات شوک (ξ, β, n) به صورت زیر نوشت [۱۱]

$$\frac{u}{A} \left(\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} + u k_\xi \right) + v \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (8)$$

که در آن k_ξ شعاع انحناء شوک در صفحه $n - \xi$ است. با تبدیل این معادله به دستگاه مختصات جدید (ξ, β, η) که در آن $\eta = \frac{\psi}{\psi_s}$ است، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{\psi_s}{h_\beta AB} \left(\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} + u k_\xi \right) - \eta \frac{(\rho v)_s}{AB} \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad (9)$$

رایلی و دوجارنت با انتگرال گیری از معادله بالا، رابطه ای صریح برای تعیین فشار در لایه شوک استخراج نموده اند. اما قبل از انتگرال گیری، از فرضیات ساده کننده ای که در جریانهای ماوراء صوت صادقند، استفاده شده است. استفاده از چنین فرضیاتی ضروری می باشد چون همانطوری که مشاهده می شود، طرف دوم معادله (۹) شامل متغیرهای می باشد (مانند ρ و u و ...) که می باید مقادیر آنها را قبل از انتگرال گیری مشخص نمود. از آنجا که در جریانهای ماوراء صوت لایه شوک نازک است می توان فرض کرد

$$\begin{aligned} \rho &\approx \rho_s & A &\approx 1 \\ u &\approx u_s & B &\approx 1 \\ \frac{\partial \rho_s}{\partial \xi} &\approx 0 & \frac{\partial v_s}{\partial \xi} &\approx 0 \\ n &\approx \left(\frac{\partial n}{\partial \eta} \right)_s (\eta - 1) \end{aligned} \quad (10)$$

با استفاده از فرضیات بالا و انتگرال گیری از معادله (۹) به رابطه زیر خواهیم رسید.

$$p(\xi, \beta, n) = p_s(\xi, \beta) + p_1(\eta - 1) + p_2(\eta^2 - 1) \quad (11)$$

که در آن

$$p_1 = \frac{\psi_s u_s k_\xi}{h_\beta}$$

$$p_2 = \frac{\psi_s v_s \tan \Gamma}{2h_\beta} (k_\xi + k_\beta)$$

k_β شعاع انحناء شوک در صفحه $\beta - n$ بوده و اندیس (s) معرف مقادیر مربوطه به روی شوک است. با توجه به توضیحاتی که در بالا داده شد می توان نتیجه گرفت که رابطه فشار بدست آمده با انتگرال گیری تقریبی از معادله ممنتوم قائم بر شوک بدست آمده است.

۲-۴ - رابطه سرعت

برای تعیین خصوصیات جریان در لایه شوک می باید پروفیل مولفه سرعت قائم v محاسبه شود. زوی [۱۵] رابطه مرتبه اولی به صورت زیر برای محاسبه مولفه سرعت قائم پیشنهاد کرده است

$$v = v_s \eta$$

زویی این پروفیل سرعت را برای جریانهای متقارن محوری ارائه کرده است که دارای دقت قابل قبولی نیز می‌باشد. ولی این رابطه برای جریانهای سه بعدی دارای دقت کافی نیست [۱۷].
رایلی و دوجارنت [۱۱] با استفاده از روابطی که تابع جریان را تعریف می‌کنند و اپراتورهایی که مشتقات را از سیستم مختصات (ξ, β, n) به سیستم (ξ, β, η) تبدیل می‌کنند، رابطه‌ای به شکل زیر ارائه کرده‌اند:

$$v = v_s + v_l (\eta - 1) \quad (12)$$

که در آن

$$v_l = \frac{\psi_s v_s}{h_\beta \cos \Gamma} (k_\xi + k_\beta)$$

در قسمت نتایج نشان داده می‌شود که این پروفیل سرعت دارای دقت کافی نیست و تاثیر قابل توجهی در دقت مولفه‌های سرعت دارد.

۲-۵- تصحیح رابطه سرعت

در مقاله حاضر پروفیل مولفه سرعت قائم با انتگرال‌گیری تقریبی از معادله پیوستگی بدست آمده است. معادله پیوستگی در سیستم مختصات منحنی الخط به شکل زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial n} (\rho v h_\xi h_\beta AB) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho u h_\beta B) = 0 \quad (13)$$

قبل از انتگرال‌گیری از معادله بالا، ابتدا آنرا به سیستم مختصات تابع جریان (ξ, β, η) منتقل می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (\rho v h_\xi h_\beta AB) \approx \left(\frac{\psi_s}{\rho u h_\beta B} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho u h_\beta B) \quad (14)$$

که با انتگرال‌گیری از آن خواهیم داشت

$$\int_0^\eta \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho v h_\xi h_\beta AB) d\eta = \int_0^\eta \left(\frac{\psi_s}{\rho u h_\beta B} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho u h_\beta B) d\eta$$

یا

$$\rho v h_\xi h_\beta AB = c_l + \int_0^\eta \left(\frac{\psi_s}{\rho u h_\beta B} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho u h_\beta B) d\eta$$

و یا

$$v = \frac{c_l}{\rho} + \left[\frac{1}{\rho h_\xi h_\beta AB} \int_0^\eta \left(\frac{\psi_s}{\rho u h_\beta B} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho u h_\beta B) d\eta \right]$$

در رابطه قبل، c_l ضریب ثابتی است که بعد از انتگرال گیری ظاهر شده است. برای آنکه بتوان از ترم دوم سمت راست رابطه قبل به صورت تقریبی انتگرال گیری کرد، از همان فرضیات ساده کننده‌ای که برای استخراج رابطه فشار استفاده شده بود (روابط ۱۰)، استفاده می‌شود. در این صورت خواهیم داشت

$$v = \frac{c_l}{\rho} + \left[\frac{l}{\rho h_\xi h_\beta AB} \int_0^\eta \left(\frac{\psi_s}{\rho u h_\beta B} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho u h_\beta B) d\eta \right]_s$$

یا

$$v = \frac{c_l}{\rho} + \left[\frac{\psi_s}{\rho_s u_s h_\beta} (k_\xi \sin \Gamma + k_\beta \sin \Gamma) \right] \int_0^\eta d\eta$$

و یا

$$v = \frac{c_l}{\rho} + \left[\frac{\psi_s \sin \Gamma}{\rho_s u_s h_\beta} (k_\xi + k_\beta) \right] \eta$$

برای تعیین ضریب ثابت c_l ، رابطه بالا را بر روی شوک ($\eta = l$) اعمال می‌نماییم که پس از ساده‌سازی خواهیم داشت

$$v = \frac{\rho_s v_s}{\rho} + v_l (\eta - l) \quad (15)$$

$$v_l = \frac{\psi_s v_s}{h_\beta \cos \Gamma} (k_\xi + k_\beta)$$

همانطور که مشاهده می‌شود رابطه بدست آمده شبیه رابطه‌ای است که توسط رایلی و دوجارنت پیشنهاد شده است (رابطه ۱۲) با این تفاوت که در ترم اول سمت راست، تغییرات جرم حجمی در نظر گرفته شده است. از آنجا که تغییرات جرم حجمی در لایه شوک غیرخطی است، رابطه سرعت نیز غیرخطی خواهد بود که تاثیر قابل توجهی در تعیین مولفه‌های سرعت در لایه شوک خواهد داشت. در قسمت نتایج نشان داده شده است که تصحیح معادله سرعت به شکل بالا موجب بهبود و توسعه روش به قسمت پشت باد اجسام سه بعدی ماوراء صوت می‌شود.

۲-۶- روابط دیگر

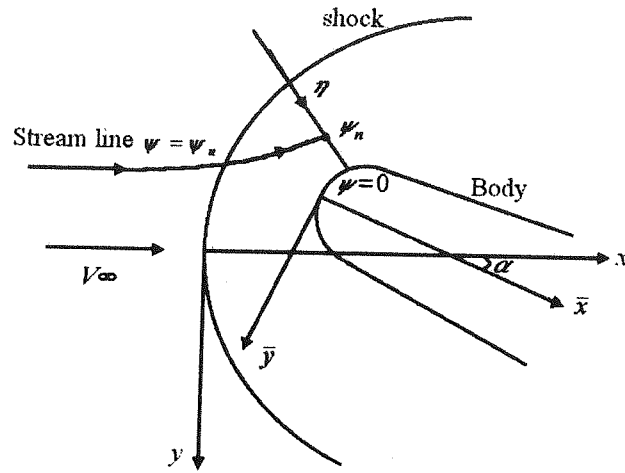
برای یک جریان آیزنتروپیک معادله انرژی به شکل زیر ساده می‌شود

$$H = h + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) = const \quad (16)$$

با استفاده از رابطه قبل و معادله حالت گاز کامل مقادیر ρ و u قابل محاسبه خواهند بود. رابطه مهم دیگری که با انتگرال گیری از معادله (۶) بدست می‌آید [۱۱] عبارت است از

$$n_h - \frac{n_b^2 k_\beta}{2} = \frac{\psi_s}{h_\beta} \int_0^l \frac{d\eta}{\rho u} \quad (17)$$

که به واسطه آن فاصله عمودی شوک از بدنه محاسبه می‌شود.



شکل (۶) شکل جسم و شوک.

۷-۲ - روش حل

چون روش حل جریان غیر لزج از نوع معکوس می‌باشد، شکل شوک باید آنقدر تغییر داده شود تا شکل بدنه مورد بررسی حاصل شود. این روند تکرار در دو ناحیه زیر صوت و مافوق صوت با یکدیگر تفاوت دارند. در ناحیه سکون یک جسم نوک - پیخ ماوراء صوت، جریان زیر صوت بوده و بنابراین بواسطه رفتار بیضوی این جریان می‌باید شکل شوک در این ناحیه تماماً مشخص باشد. بدین ترتیب یک شوک سه بعدی که از ترکیب بیضوی سه معادله مخروطی زیر بدست می‌آید، حدس زده می‌شود [۱۱].

$$f_k'^2 + b_k x^2 - 2c_k x + 2d_k x f_k = 0 \quad k = 1, 2, 3 \quad (18)$$

که در آن $f_k(x)$ مختصات شعاعی معادله بوده و k معرف موقعیتهای $\phi = 0, 90, 180$ می‌باشد. رویه بیضوی‌ای که از این سه معادله و در جهت محیطی تشکیل می‌گردد، به صورت زیر است

$$f^2 [\tilde{B}(x) \cos^2 \phi + \sin^2 \phi] + f \tilde{C}(x) \cos \phi = \tilde{D}(x) \quad (19)$$

که در آن

$$\tilde{B}(x) = \frac{f_2^2}{f_1 f_3}$$

$$\tilde{C}(x) = \tilde{B}(x)(f_3 - f_1) \quad (20)$$

$$\tilde{D}(x) = f_2^2$$

تعداد نه پارامتر b_k, c_k, d_k شکل شوک را معرفی می‌کنند. این پارامترها آنقدر تغییر داده می‌شوند تا شکل بدنه‌ی بدست آمده از حل جریان غیر لزج، با شکل واقعی بدنه یکی شود. جزئیات روند حل ناحیه زیر صوت قبلاً توضیح داده شده است [۱۸].

در انتهای منطقه زیر صوت جریان تماماً مافوق صوت است و می‌توان از یک فرایند گام زنی استفاده کرد. ابتدا روابط هندسی حاکم بر شوک به صورت زیر معرفی می‌گردند [۱۱].

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos \Gamma$$

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \sin \Gamma \cos \delta_\phi$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\sin \Gamma \cos \delta_\phi}{r}$$

$$\frac{\partial \sin \Gamma}{\partial s} = -k_\xi \cos \Gamma \quad (21)$$

$$\frac{\partial h_\beta}{\partial s} = h_\beta k_\beta \tan \Gamma$$

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial s} = h_\beta \sin \Gamma$$

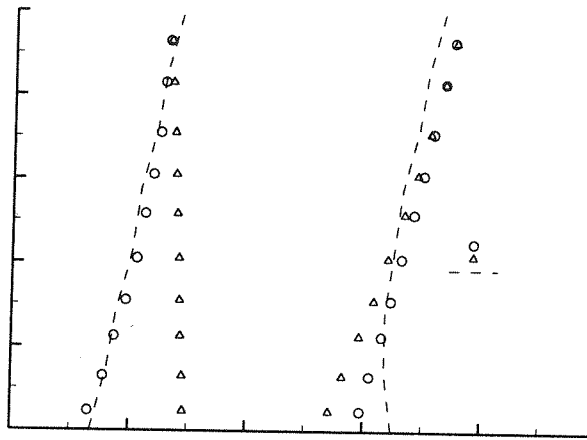
با انتگرال‌گیری از روابط بالا می‌توان متغیرهای هندسی شوک شامل $(x, \phi, r, \sin \Gamma, h_\beta, \psi_s)$ را بدست آورد. برای این کار جوابهای قسمت انتهایی زیرصوت برای شروع حل مافوق صوت مورد استفاده قرار می‌گیرند. شعاع انحناء شوک، k_ξ ، در جهت (ع) برون‌یابی^۸ شده و به روی هر خط شوک (خطوطی که β آنها ثابت است) از معادلات بالا انتگرال‌گیری می‌شود. با استفاده از روابط (۱۵ و ۱۱) فشار و مولفه سرعت عمودی در لایه شوک و در امتداد خط عمود بر شوک محاسبه می‌شوند (شکل ۶). پس از تعیین فشار نقاط بین شوک ($\eta = 1$) و بدنه ($\eta = 0$)، مقادیر آنتالپی و جرم حجمی جریان نیز با استفاده از روابط حاکم بر گاز ایده آل بدست می‌آیند. از آنجا که جریان پس از شوک آیزنتروپیک می‌باشد، می‌توان در امتداد یک خط جریان (منظور خط جریانی است که از نقطه‌ای که قصد تعیین خواص آنرا داریم، می‌گذرد) از روابط حاکم بر جریان آیزنتروپیک استفاده کرده و خصوصیات ترمودینامیکی نقطه مورد بررسی را با استفاده از خصوصیات جریان روی شوک مشخص نمود (شکل ۶). مولفه مماسی سرعت، u ، با توجه به ثابت بودن آنتالپی کل جریان و با استفاده از رابطه (۱۶) بدست خواهد آمد.

در این مرحله تمامی خواص فیزیکی جریان از شوک ($\eta = 1$) تا بدنه ($\eta = 0$) مشخص می‌باشند. بنابراین می‌توان فاصله بدنه تا شوک را با استفاده از رابطه (۱۷) محاسبه نمود. اگر بدنه محاسبه شده با بدنه واقعی همخوانی نداشت، شعاع انحناء شوک k_ξ را با استفاده از روش سکانت اصلاح نموده و مراحل قبلی را تکرار می‌کنیم. معمولاً دو تا سه تکرار کافی است. این روند تا انتهای میدان حل ادامه خواهد یافت. در اینجا تنها برای یادآوری اضافه می‌کنیم که در قسمت زیر صوت نیز از حل معادلات هندسی بالا استفاده می‌شود با این تفاوت که بواسطه مشخص بودن شکل شوک در این ناحیه (چون شکل شوک حدس زده شده است)، نیازی به حدس k_ξ نیست و می‌توان آن را محاسبه نمود. همچنین در ناحیه زیر صوت انتگرال‌گیری از روابط هندسی فقط بر روی سه خط شوک $\beta = 0, 90, 180$ انجام گرفته و در انتهای این ناحیه، بدنه محاسباتی با بدنه واقعی مقایسه می‌شود و در صورتی که همخوانی لازم وجود نداشت معادله رویه شوک با اصلاح پارامترهای (b_k, c_k, d_k) ، تصحیح می‌شود و روند حل از نقطه سکون تا انتهای ناحیه زیر صوت تکرار می‌گردد [۱۸]. لازم به تذکر است که تحلیل نقطه سکون بواسطه منفرد بودن آن متفاوت بوده و توضیحات لازم در مرجع [۱۸] داده شده است.

۳ - نتایج

نتایج برای یک مخروط نوک کروی و در زاویه حمله غیر صفر ارائه شده‌اند. اگر چه روش حاضر محدود به چنین هندسه‌ای نیست ولی اغلب چنین هندسه‌های (به عنوان شکل عمومی بیشتر اجسام ماوراء صوت) مورد مطالعه عددی و تجربی قرار گرفته‌اند. در این تحقیق از روابط گاز ایده آل استفاده می‌شود، ولی چنین فرضی ضروری نیست و می‌توان روش حاضر را برای در نظر گرفتن مدل‌های تعادلی اصلاح نمود [۱۱].

نتایج نسبت به محور جسم رسم شده‌اند و ϕ_h نمایانگر زاویه محیطی نقطه‌ای بر روی جسم بوده و x_h نیز در جهت محور بدنه می‌باشد. توجه کنید که نتایج به شکل بی بعد نمایش داده شده‌اند و مولفه‌های سرعت، توسط سرعت جریان آزاد و ابعاد نیز توسط شعاع نوک کروی بی بعد می‌شوند.



شکل (۷) پروفیل مولفه‌های سرعت محوری و شعاعی در صفحه رو به باد یک مخروط ۱۰ درجه.

$$\phi_b = 180^\circ, \frac{x_b}{R_h} = 0.8, M_\infty = 10, \alpha = 10^\circ$$

نتایج بدست آمده با جوابهای حل عددی معادلات جریان غیر لزج [۱۶] مقایسه شده اند. چون این حل عددی در مرکز تحقیقاتی (Naval Surface Warfare Center) توسعه یافته است در شکل‌ها نتایج آنرا با علامت (NSWC) مشخص کرده‌ایم. همچنین در تمامی مثال‌هایی که در این مقاله ارائه شده است، نتایج رسم شده با نتایج بدست آمده از روش رایلی و دوچارنت [۱۷] مقایسه شده است.

در شکل (۷) مولفه‌های سرعت شعاعی U و سرعت محوری W در موقعیت طولی $\frac{x_b}{R_h} = 0.8$ رسم شده است. زاویه نیم

راس مخروط و زاویه حمله ۱۰ درجه بوده و ماخ جریان آزاد نیز ۱۰ می‌باشد. اگرچه هدف از این مقاله تصحیح مولفه‌های سرعت در قسمت پشت به باد می‌باشد ولی همانطوری که در شکل (۷) نشان داده شده تصحیح صورت گرفته باعث تصحیح مولفه‌های سرعت محاسبه شده در قسمت رو به باد جسم ($\phi_b = 0$) نیز می‌شود. مقدار این تصحیح برای مولفه سرعت U در حدود ۴۰ درصد و برای مولفه سرعت W در حدود ۱۵ درصد است. این افزایش دقت قابل توجه در محاسبه مولفه‌های سرعت، بواسطه استفاده از رابطه پیشنهادی (رابطه ۱۵) برای محاسبه مولفه سرعت قائم حاصل شده است.

در شکل (۸) مولفه‌های سرعت در موقعیت طولی $\frac{x_b}{R_h} = 0.8$ و برای قسمت پشت به باد ($\phi_b = 180$) رسم شده است.

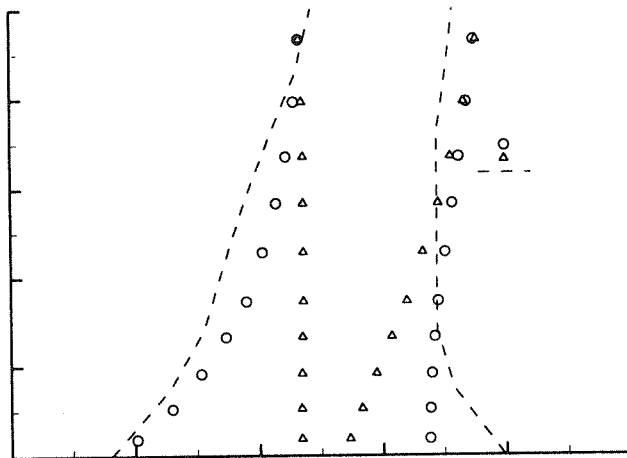
افزایش دقت جوابها بسیار قابل توجه است بطوری که مولفه سرعت U در حدود ۶۰ درصد و مولفه سرعت W در حدود ۳۰ درصد اصلاح شده است. این در حالی است که این مولفه‌ها قبلاً حتی از نظر رفتار فیزیکی هم صحیح نبوده اند.

در شکل (۹) مولفه‌های سرعت در موقعیت طولی $\frac{x_b}{R_h} = 9.6$ و در صفحه رو به باد جسم رسم شده‌اند. همانطور که

ملاحظه می‌شود تصحیح انجام گرفته اثر قابل ملاحظه‌ای ندارد و مولفه‌های سرعت محاسبه شده دارای دقت قابل قبولی می‌باشند.

شکل (۱۰) مولفه‌های سرعت را در موقعیت طولی $\frac{x_b}{R_h} = 9.6$ و در صفحه پشت به باد نشان می‌دهد. در اینجا نیز

مشاهد می‌شود که مولفه سرعت U در حدود ۴۰ درصد تصحیح شده است.



شکل (۸) پروفیل مولفه‌های سرعت محوری و شعاعی در صفحه پشت به باد یک مخروط ۱۰ درجه.

$$\phi_h = 180^\circ, \frac{x_h}{R_h} = 0.8, M_\infty = 10, \alpha = 10^\circ$$

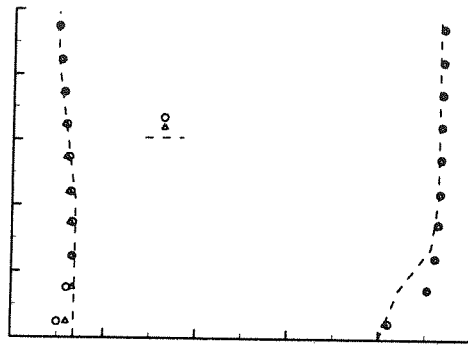
از آنجا که فشار و جرم حجمی لایه شوک تفاوت چندانی با نتایج مرجع ۱۷ ندارد (کمتر از ۵ درصد) از معرفی آنها صرف نظر شده است.

در مثالهای بالا نشان داد شد که استفاده از رابطه سرعت پیشنهادی موجب افزایش دقت مولفه‌های سرعت محاسبه شده در روش رایلی و دوجارنت می‌شود. از آنجا که در این روش، شکل شوک با استفاده از رابطه (۱۷) بدست می‌آید و این رابطه نیز خود تابعی از مولفه سرعت محاسبه شده در لایه شوک می‌باشد، لذا باید انتظار داشت که تصحیح مولفه‌های سرعت در قسمت پشت به باد موجب تصحیح شکل شوک در این قسمت شود. این مطلب در شکل (۱۱) نشان داده شده است. همانطوری که مشاهده می‌شود در قسمت رو به باد جسم، شکل شوک بدست آمده توسط روش حاضر دارای دقت قابل قبولی می‌باشد. ولی در شکل (۱۱) مشاهده می‌شود که افزایش دقت مولفه‌های سرعت، موجب افزایش دقت شکل شوک محاسبه شده در قسمت پشت به باد جسم شده است.

۴- زمان اجرای کامپیوتری

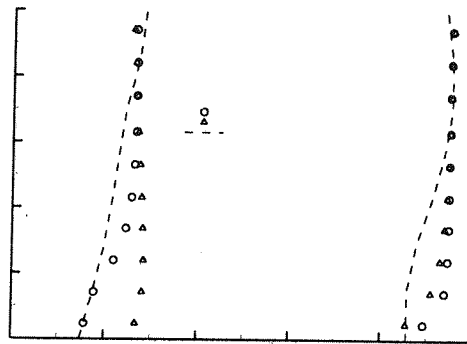
همانطور که قبلاً گفته شد روش حاضر دارای دقت خیلی خوبی می‌باشد و در ضمن زمان اجرای کامپیوتری آن نیز بسیار اندک است. در این قسمت زمان کامپیوتری حل روش حاضر با زمان کامپیوتری حل عددی معادلات اویلر مقایسه شده است. برای حل عددی جریان غیر لزج از دو کد عددی استفاده می‌شود. از کد (HALIS) [۱۹] برای حل عددی معادلات اویلر غیر دائم در ناحیه دماغه پخ جسم - که جریان در آنجا زیر صوت است - استفاده شده است. همچنین از کد (STEIN) [۲۰] برای حل عددی معادلات اویلر دائم در ناحیه‌ای که جریان مافوق صوت است، استفاده می‌گردد.

به عنوان نمونه، جریان غیر لزج حول یک مخروط با سطح مقطع بیضوی $1 \times 1/5$ حل شده است. این مخروط دارای نوکی با شعاع انحناء بسیار کوچک بوده و زاویه نیم راس مخروط آن $10/26$ درجه می‌باشد. در این مثال ماخ جریان آزاد برابر ۱۰ در نظر گرفته شده و زاویه حمله نیز ۱۰ درجه انتخاب شده است. محاسبات توسط ابر کامپیوتر CRAY-2S انجام گرفته است. استفاده از کدهای CFD بالا که معادلات اویلر را حل می‌کنند، موجب صرف زمانی در حدود ۲۲۵ ثانیه می‌شود. در صورتیکه استفاده از روش حاضر بر روی چنین کامپیوتری تنها کسری از ثانیه زمان می‌برد [۱۱].



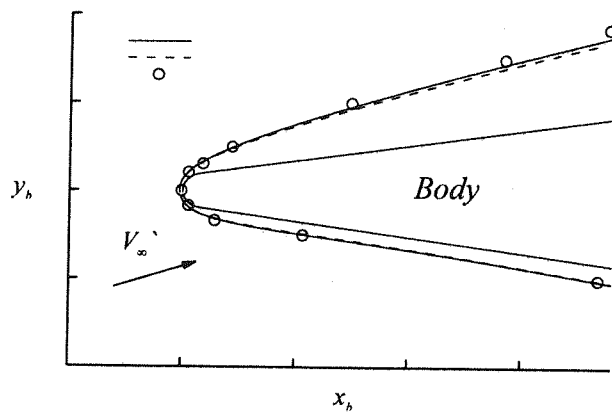
شکل (۹) پروفیل مولفه های سرعت محوری و شعاعی در صفحه رو به باد یک مخروط ۱۰ درجه.

$$\phi_b = 0^\circ, \frac{x_b}{R_b} = 9.6, M_\infty = 10, \alpha = 10^\circ$$



شکل (۱۰) پروفیل مولفه های سرعت محوری و شعاعی در صفحه پشت به باد یک مخروط ۱۰ درجه.

$$\phi_b = 180^\circ, \frac{x_b}{R_b} = 9.6, M_\infty = 10, \alpha = 10^\circ$$



شکل (۱۱) شکل شوک محاسبه شده حول یک مخروط ۱۰ درجه در ماخ ۱۰ و زاویه حمله ۱۰ درجه.

برای آنکه بتوان سرعت حل ابرکامپیوتر CRAY-2S را با کامپیوترهای شخصی (PC) موجود در کشور مقایسه کرد، همین مسئله توسط روش مورد بررسی و با استفاده از یک ریز پردازنده Pentium4-550 حل شده است. زمان بدست آمده ۱۶۰ ثانیه می باشد که اگر با زمان بدست آمده از حل با ابرکامپیوتر مقایسه شود، نشان خواهد داد که تا چندین سال زمان حل روشهای CFD می توانند طولانی باشند. در طراحی اولیه اجسام ماوراء صوت، نمی توان زمان طولانی حل کدهای CFD را تحمل کرد. ذکر این نکته خالی از لطف نیست که در حال حاضر در کشورهای پیشرفته از ابرکامپیوتر CRAY-6 برای انجام محاسبات استفاده می شود.

۵- نتیجه گیری

با استفاده از معادله پیوستگی رابطه جدیدی برای مولفه سرعت قائم در لایه شوک ارائه شده است. این رابطه جدید باعث می شود تا مولفه های سرعت در قسمت پشت به باد تصحیح شوند. همچنین بواسطه تصحیح مولفه های سرعت، دقت شکل شوک محاسبه شده در قسمت پشت به باد نیز افزایش یافته است. نتایج یک مخروط نوک کروی بیانگر آنند که پروفیل سرعت پیشنهادی موجب بهبود و توسعه روش به قسمت پشت به باد اجسام سه بعدی ماوراء صوت شده است.

قدردانی

این تحقیق با پشتیبانی سازمان صنایع هوا فضا انجام گرفته است. نویسندگان این مقاله از آقای مهندس احمد مهدی زاده بواسطه همکاری های موثرشان قدردانی می نمایند.

فهرست علائم

η	نسبت تابع جریان، $\frac{\psi}{\psi_s}$	A, B	ضرایب هندسی
ξ, β, n	سیستم مختصات شوک	e_s, e_r, e_θ	بردارهای یکه سیستم مختصات استوانه ای
ρ	جرم حجمی	e_s, e_β, e_n	بردارهای یکه سیستم مختصات منحنی الخط شوک
σ	زاویه شوک، $\phi - \delta_\theta$	f	شعاع شوک
ψ	تابع جریان	k_s, k_β	شعاع های انحناء شوک

زیر نویس ها

b	مقدار روی بدنه
s	مقدار روی شوک
w	مقدار روی دیواره
∞	شرایط جریان آزاد

- 1-Thin Layer
- 2-Slender Body
- 3-Mslen
- 4-Riley and DeJarnette
- 5-Jakson
- 6-Leeward Region
- 7-Zoby
- 8-Extrapolating

M	ماخ
p	فشار
q	شار حرارتی
u, v, w	مولفه های سرعت در سیستم مختصات شوک
V	بردار سرعت
x, r, ϕ	سیستم مختصات استوانه ای
α_s	زاویه حمله
Γ	زاویه شوک نسبت به سرعت جریان آزاد
δ_θ	زاویه شوک در جهت محیطی

- [1] Gnoffo, P. A., "An Upwind-Biased Point-Implicit Relaxation Algorithm for Viscous, Compressible Perfect – Gas Flows," NASA TP 2953, June 1990.
- [2] Lawrence, S. L., Chaussee, D. S., and Tannehill, J. C., "Application of an Upwind Algorithm to the Three-Dimensional Parabolized Navier-Stokes Equations," AIAA Paper 87-1112, June 1978.
- [3] Davis, R. T., "Numerical Solution of the Hypersonic Viscous Shock Layer Equations," AIAA Journal, Vol. 8, No. 5, 1970, pp. 843-851.
- [4] Cheatwood, F. M., and DeJarnette, F. R., "Approximate Viscous Shock Layer Technique for Calculating Hypersonic Flows About Blunt-Nosed Bodies," Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 31, No. 4, 1994, pp. 621-628.
- [5] Hollis, B. R., and Horvath, T. J., et al "X-33 Computational Aeroheating Predictions and Comparisons with Experimental Data," Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 38, No. 5, 2001, pp. 658-669.
- [6] Thomas, P. D., Vinokur, M., Bastianon, R. A., and Conti, R. J., "Numerical Solution for Three-Dimensional Inviscid Supersonic Flow," AIAA Journal, Vol. 10, July 1972, pp. 887-894.
- [7] Rakich, J. F., and Cleary, J. W., "Theoretical and Experimental Study of Supersonic Steady Flow Around Inclined Bodies of Revolution," AIAA Journal, Vol. 8, March 1970, pp. 511-518.
- [8] Chaussee, D. S., Kutler, P., and Holtz, T., "Inviscid Supersonic / Hypersonic Body Flowfield and Aerodynamics from Shock-Capturing Technique Calculation," Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 13, June 1976, pp. 325-331.
- [9] Maslen, S. H., "Inviscid Hypersonic Flow Past Smooth Symmetric Bodies," AIAA Journal, Vol. 2, July 1964, pp. 1055-1061.
- [10] Maslen, S. H., "Asymmetric Hypersonic Flow," NASA CR-2123, 1971.
- [11] Riley, C. J., and DeJarnette, F. R., "Engineering Calculations of Three-Dimensional Inviscid Hypersonic Flow Fields," Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 28, Nov-Dec 1991, pp. 628-635.
- [12] Jackson, S. K., Jr. The Viscous-Inviscid Hypersonic Flow of a Perfect Gas Over Smooth Symmetric Bodies. PhD thesis, University of Colorado, 1966.
- [13] DeJarnette, F. R., and Hamilton, H. H., "Inviscid Surface Streamlines and Heat Transfer on Shuttle-Type Configurations," Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 10, May 1973, pp. 314-321.
- [14] DeJarnette, F. R., and Hamilton, H. H., "Aerodynamic Heating on 3-D Bodies Including the Effects of Entropy-Layer Swallowing," Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 12, Jan 1975, pp. 5-12.
- [15] Zoby, E. V., and Graves, R. A., Jr., "A Computer Program for Calculating the Perfect Gas Inviscid About Blunt Axisymmetric Bodies at an Angle of Attack of 0 Deg," NASA TM-X2843, Dec. 1973 .
- [16] Morrison, A. M., Solomon, J. M., Ciment, M., and Ferguson, R. E., "Handbook of Inviscid Sphere-cone Flow Fields and Pressure Distributions," Volume 1, NSWC/WOL/TR 75-45, Dec. 1975.
- [17] Riley, C. J., and DeJarnette, F. R., "An Approximate Method for Calculating Three-Dimensional Inviscid Hypersonic Flow Fields," NASA TP-3018, Aug. 1990.
- [18] Karimian, S. M. H., and Mehdizadeh, A., "Approximate Solution of Inviscid Flow Around the Nose of Hypersonic Bodies At Angle of attack," Amirkabir, Vol. 12, No. 47, Summer 2001,
- [19] Weilmuenster, K. J., and Hamilton, H. H., "Calculations of Inviscid Flow over Shuttle-Like Vehicles at High Angles of Attack and Comparitions with Experimental Data," NASA TP-2103, May 1983.
- [20] Marconi, F., Salas, M., and Yaeger, L., "Development of a Computer Code for Calculating the Steady Super/Hypersonic Inviscid Flow Around Real Configurations. Volume I-Computational Technique," NASA CR-2675, April 1976.