آنالیز حد پایین پوسته‌های استوانه‌ای که در معرض بار شعاعی محلی قرار گرفته‌اند

مهندس غلامحسین رحیمی شعرباف
دانشگاه یومیست ـ انگلستان

چکیده:

مقاله‌ٔ حاضر در ارتباط با تجزیه و تحلیل رفتار پوسته‌های استوانه‌ای زمانی که در معرض بار شعاعی محلی از طریق پایه‌ٔ مستطیلی شکل قرار گرفته‌اند ،می‌باشد . در تجزیه و تحلیل نظری با استفاده از قضیه‌ٔ حد پائین در تئوری خمیری پوسته‌ها حداکثر بار خمیری برای حالت بارگذاری محاسبه شده است . در نهایت نتایج برای برخی از پارامترهای هندسی کاربردی به صورت منحنی رسم شده‌اند .

۱ــ مقدمه

بارهای محلی[۱] وارده بر مخازن تحت فشار استوانه‌ای اغلب از طریق اتصالات ، انشعابات و تکیه پایه‌ها و غیـــره اعمال می‌گردند ، و تجزیه و تحلیل آنها از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است . هم‌اکنون کدهای طراحی مخازن تحت فشار نظیر کد ASME یا کد BS این‌گونه بارها را با روش ارتجاعی[۲] مورد مطالعه قرار می‌دهند . ولی زمانی که فشار یا بار زیادی بر مخزن وارد شود و بخصوص هنگام شرائط اورژانس و یا وقوع نقص و عیب در سازه که نیروی زیادی دفعتاً" اعمال می‌گردند، آنالیز ارتجاعی جواب مناسبی را به دست نمی‌دهد و برای اغلب این شرائط آنالیز ارتجاعی جواب کوچکتر از تخمین نظری محاسبه شده را ارائه می‌کند . لذا در این حالت باید از آنالیز خمیری[۳] استفاده نمود .

در این مقاله سعی بر این است که یک آنالیز حد ساده برای یک مخزن استوانه‌ای که تحت‌تاثیر بار شعاعی در وسط آن و به اندازه کافی دور از لبه‌ها قرار گرفته است، ارائه شود. این‌گونه آنالیز برای پوسته‌های کروی هم براساس قضیه حد بالا و هم حد پائین مـورد بررسی قرار گرفته‌اند، به‌عنوان مثال مقاله (۱) را ببینید. ولی پوسته‌های استوانه‌ای به علت پیچیده‌تر بودن شکل هندسی هنوز به اندازه‌ٔ کافی مورد توجه واقع نشده‌اند . آنالیز خمیری با استفاده از قضیه‌ٔ حد بالا برای محاسبه‌ٔ بار حد پوسته‌های استوانه‌ای زمانی که در معرض ممان خمشی محوری ، ممان خمشی محیطی و نیروی شعاعی قرار گرفته‌اند به‌ترتیب در مقاله‌های (۲)، (۳) و (۴) آمده است . اینک از قضیه‌ٔ حد پائین برای محاسبه‌ٔ بار حد زمانی که مخزن تحت اثر بار شعاعی وارده روی یک مساحت مستطیلی قرار گرفته است ، استفاده می‌شود .

۲ــ نگاهی به آنالیز حد :[۴]

آنالیز خمیری مبتنی بر مجموعه‌ای از قضایا و فرضیاتی شکل گرفته است که اساس آن در اغلب کتب پلاستیسیته آمده است . چنانچه این اصول با معادلات پوسته‌ها (معادلات تعادل، تغییر مکان و سازگاری) پیوند خورند ، آنالیز خمیری پوسته‌ها[۵] را به‌طور عموم به‌دست می‌دهند. این شیوه تجزیه و تحلیل گرچه به نحو وسیعی مورد توجه واقع شده است ولی هنوز به‌جز در تیرها ، قاب‌هاوسازه‌هائی ازاین قبیل عمومیت کاربرد درمورد ورق‌ها و به‌خصوص پوسته‌ها نیافته است . گرچه این روش اغلب از آنالیز ارتجاعی راه حلهای سریعتر ارائه می‌کند و به‌خصوص برای سازه‌های پیچیده‌ای نظیر پوسته‌ها به آن اندازه که از فرضیات ساده‌ــ کننده و در نتیجه محدود ساز در آنالیز ارتجاعی استفاده می‌شود ، در آنالیز خمیری این فرضیات به‌کار گرفته نمی‌شوند .

آنالیز خمیری پوسته‌ها شامل حوزه‌های متعدد تحقیق است کـه مهمترین آن تئوری حد یا آنالیز حد است . این آنالیز مبتنی بر این فرض است که سازه به‌صورت کل و یا ناحیه‌ای خاص از آن به حال خمیری کامل درآمده است . آن‌گاه مبتنی بر یکی از قضایای حد ، نیروی حد که موجب این تغییر شکل خمیری شده محاسبه می‌گردد . ساده سازی عمده در محاسبات این است که از رفتار ماده در خلال بارگذاری مخزن تا ابتدای ناحیه‌ٔ خمیری کلاً" صرفنظر می‌شود . اما بار حد،[۶] باری است که در آن تغییر شکل خمیری با هر مقدار دلخواه بزرگ تحت بار ثابت می‌تواند رخ دهد ، به‌شرطی که ماده‌ٔ سازه رفتار خمیری کامل از خود نشان داده و در نتیجه سخت‌کاری[۷] اتفاق نیفتد . و نیز تغییراتی که در شکل هندسی سازه رخ می‌دهد قابل ملاحظه نباشد .

قضیهٔ حد پائین:[8]

بار حد P بزرگترین بار در مجموعه بارهای $\overline{P}$ مربوط به میدان استاتیکی مجاز تنش می‌باشد.

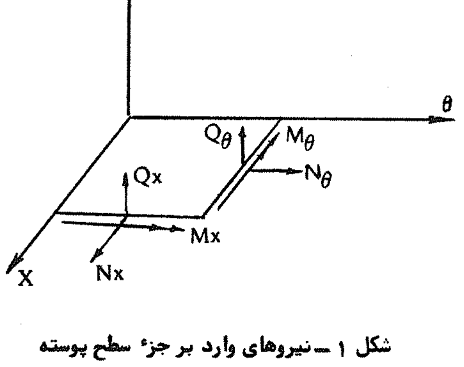
قضیهٔ حد بالا:[9]

بار حد P_1 کوچکترین بار از میان تمامی بارهای $\overset{+}{P}$ مربوط به مکانیزم دینامیکی مجاز می‌باشد.

واضح است که چنانچه بار محاسبه شده در حد بالا و حد پائین برابر باشد، یعنی هم در میدان استاتیکی مجاز تنش و هم در مکانیزم دینامیکی مجاز صدق کند، بار حقیقی حد خواهد بود. میدان مجاز استاتیکی تنش، حالتی از تنش در سازه است که اولاً" در تعادل با بار واردهٔ خارجی بوده و در ضمن در هیچ‌جای میدان ملاک تسلیم[10] را نقض نکند. مکانیزم دینامیکی مجاز به‌ناحیه خمیری سازه گفته می‌شود که اولاً" یک میدان سرعت ذرات سازه وجود دارد که در شرائط مرزی سرعت صدق می‌کند و در ثانی کار انجام شده توسط بار خارجی برابر انرژی تلف شده در سازهٔ خمیری است. ملاک تسلیم در حقیقت شرائطی را که تحت آن رفتار خمیری سازه آغاز می‌شود، مشخص می‌کند. دو ملاکی که هم اکنون به‌طور عموم استفاده می‌شوند ملاک تسلیم ترسکا[11] (تنش برشی ماکزیمم) و ملاک تسلیم فون میزز[12] (انرژی تغییر شکل برشی) می‌باشد. ملاک تسلیم پوسته‌ها به علت حضور مؤلفه‌های متعدد تنش و شکل هندسی ویژه خود پوسته از پیچیدگی خاصی برخوردار است. جهت اطلاع بیشتر در این زمینه به مأخذ (۵) رجوع شود.

۳ـ معادلات تعادل و شرائط تسلیم:

معادلات تعادل پوسته‌های استوانه‌ای در فقدان فشار داخلی و با صرفنظر کردن از نیروهای برشی صفحه‌ای و ممان پیچشی عبارتند از (۶) (شکل ۱)



شکل ۱ ـ نیروهای وارد بر جزء سطح پوسته

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial N_\theta}{a\partial\theta} + \frac{Q_\theta}{a} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial Q_\theta}{a\,\partial\theta} \quad \frac{N_\theta}{a} = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} \quad Q_x = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial M_\theta}{a\,\partial\theta} \quad Q_\theta = 0 \qquad (5)$$

با ترکیب معادلات ۲ و ۳ نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial^2 N_\theta}{\partial\theta^2} + N_\theta = a\,\frac{\partial Q_x}{\partial x} \qquad (6)$$

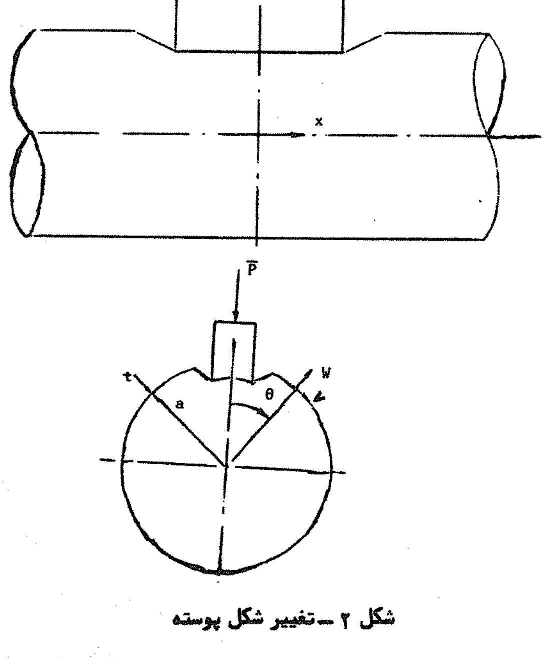
از ترکیب معادلات ۲، ۳، ۴ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \quad \frac{\partial N_\theta}{a\partial\theta^2} \quad \frac{1}{a} N_\theta = 0 \qquad (7)$$

که در معادلات فوق a شعاع استوانه می‌باشد. سطح تسلیم زیرین که به سطح دو ممانه با بر هم کنش محدود[13] مشهور است (۵) را جهت ساده شدن محاسبات برمی‌گزینیم:

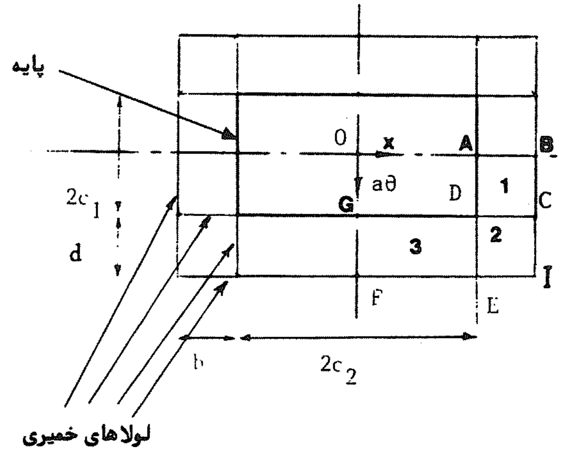
$$|M_x| = M_0\,.\ |M_\theta| = M_0\,,\ |N_\theta| = N_0\,,\ |N_x| = N_0 \qquad (8)$$

که در روابط (۸) $N_0 = \sigma_0 t$ و $M_0 = \frac{\sigma_0 t^2}{4}$ بوده و σ_0 تنش تسلیم در کشش ساده و t ضخامت مخزن می‌باشد. فرض می‌شود که تغییر شکل خمیری پوسته در اطراف پایه به‌گونه‌ای که شکل ۲ نشان می‌دهد، باشد.



شکل ۲ ـ تغییر شکل پوسته

خارج از این حوزه خمیری، پوسته صلب فرض می‌گردد. در ضمن مخزن دو طرف آزاد بوده و به اندازه کافی طویل برای نادیده انگاشتن اثرات لبه‌ها است. به‌علت تقارن حول محورهای x و θ می‌توان یک چهارم حوزه خمیری را در نظر گرفت. برای انجام محاسبات، این حوزه به‌چند ناحیه که توسط لولاهای خمیری[14] از یکدیگر و همچنین از ناحیهٔ صلب متفک شده‌اند، تقسیم می‌شود (شکل ۳).



شکل ۳ ـ مکانیزم شکست

۴ـ محاسبات:

چون در معادلات تعادل شش متغیر مستقل وجود دارد و تعداد معادلات کلاً پنج تا است، لذا می‌توان یکی از متغیرها را به‌گونه‌ای مفروض تصور کرد که شرائط تسلیم نقض نگردد. در اینجا محاسبات برای نواحی ۱ و ۲ و ۳ جداگانه انجام می‌شود.

ناحیه ۱:

فرض شود که‌درتمامی این ناحیه $N_\theta = N_0$ باشد. در این‌صورت از معادلهٔ (۷) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = \frac{N_0}{a}$$

یا

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} = \frac{N_0}{a}\, x + A_1$$

چنانچه $Q_x = -P$ در $x = C_2$ باشد، داریم

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} = \frac{N_0}{a}\, x - N_0 \frac{C_2}{a} - P \qquad (9)$$

یا

$$M_x = \frac{N_0}{2a}\, x^2 - \left(\frac{N_0 C_2}{a} + P\right) x + A_2$$

اگر $M_x = M_0$ در $x = C_2$ باشد، نتیجه می‌شود:

$$M_x = \frac{N_0}{2a}\left(x^2 + C_2^2\right) - \left(\frac{N_0 C_2}{a} + P\right) x + PC_2 + M_0 \qquad (10)$$

در این ناحیه فرض می‌شوذ که $Q_\theta = N_x = 0$ و در نتیجه M_θ ثابت خواهد بود.

ناحیهٔ ۲:

پیوستگی منتجه‌های* تنش (مستقیم، خمشی و عرضی) با نواحی ۱ و ۳ ایجاب‌می‌کند که مقادیر $M_\theta, M_x, Q_\theta, Q_x, N_x, N_\theta$ همانند مقادیر ناحیهٔ ۱ که توسط معادلات (۹) و (۱۰) ارائه شده‌اند باشد.

ناحیهٔ ۳:

در این ناحیه فرض می‌شود که:

$$Q_\theta = \frac{-P}{d}\,(d + C_1 - a\theta)$$

پس معادلهٔ (۲) می‌دهد

$$\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} = -Q_\theta = \frac{P}{d}\,(d + C_1 - a\theta)$$

یا

$$N_\theta = \frac{P}{d}(d + C_1)\,\theta - \frac{Pa\,\theta^2}{2d} + A_3$$

چنانچه $N_0 = 0$ در $a\theta = C_1$ باشد، نتیجه می‌شود:

$$N_\theta = \frac{P}{d}(d + C_1)\,\theta - \frac{Pa\,\theta^2}{2d} - \frac{PC_1}{a}\left(1 + \frac{C_1}{2d}\right) \qquad (12)$$

از معادلهٔ (۵) حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} = aQ_\theta = \frac{-Pa}{d}\,(d + C_1 - a\theta)$$

یا:

$$M_\theta = \frac{Pa^2\theta^2}{2d} - \frac{Pa\,(d + C_1)\,\theta}{d} + A_4$$

اگر: $M_\theta = M_0$ در $a\theta = C_1$ باشد، نتیجه نهائی به صورت زیر است:

$$M_\theta = \frac{Pa^2}{2d}\,\theta^2 - \frac{Pa\,(d + C_1)}{d}\,\theta + PC_1\left(1 + \frac{C_1}{2d}\right) + M_0 \qquad (13)$$

معادلهٔ (۳) می‌دهد

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = \frac{N_\theta}{a} - \frac{\partial Q_\theta}{a\,\partial\theta} = \frac{N_\theta}{a} - \frac{P}{d}$$

پس:

$$Q_x = \left(\frac{N_\theta}{a} - \frac{P}{d}\right) x + A_5$$

چنانچه $Q_x = -P$ در $x = C_2$ باشد، خواهیم داشت:

$$Q_x = \left(\frac{N_\theta}{a} - \frac{P}{d}\right)(x - C_2) - P \qquad (14)$$

از معادلهٔ (۴) نتیجه می‌شود

$$M_x = \left(\frac{N_\theta}{a} - \frac{P}{d}\right)\left(\frac{x^2}{2} - C_2 x\right) - Px + A_6$$

پیوستگی با ناحیه ۲ ایجاب می‌کند که $M_x = M_0$ در $x = C_2$ باشد، لذا:

$$M_x = \left(\frac{N_\theta}{a} - \frac{P}{d}\right)\left(\frac{x^2}{2} - C_2 x + \frac{C_2^2}{2}\right) + P\,(C_2 - x) + M_0 \qquad (15)$$

در این ناحیه فرض می‌شود که $N_x = 0$ باشد.

۵ـ ملاک تسلیم و نامساوی‌های مربوط:

بررسی همه منتجه‌های تنش در تمامی نواحی بیانگر این حقیقت است که ~~اگر~~ نامساوی‌های زیرین برقرار باشد، ملاک تسلیم در هیچ جا

برای سطح تسلیم پیشنهاد شده نقض نمی‌گردد .

در ناحیهٔ ۱، $Q_x = 0$ در $x = b + C_2$ است . بنابرایـن معادلـهٔ ۹ می‌دهد :

$$P = \frac{N_0 b}{a} \qquad (16)$$

از معادلهٔ (۱۰) در $x = b + C_2$ نتیجه می‌شود :

$$\frac{N_0}{2a}(x^2 + C_2^2) - (\frac{N_0 C_2}{a} + P)x + PC_2 - M_0 \geq - M_0$$

پس

$$\frac{N_0 b^2}{2a} - Pb \geq - 2M_0 \qquad (17$$

در ناحیه ۳، معادلهٔ (۱۳) می‌دهد :

$$\frac{Pa^2}{2d}\theta^2 - \frac{Pa(d+C)}{d}\theta^+ + PC_1(1 + \frac{C_1}{2d}) + M_0 \geq - M_0$$

که در $a\theta = d + C_1$ می‌دهد :

$$\frac{pd}{2} \leq 2M_0 \qquad (18)$$

چنانچه از علامت‌های تساوی نامساوی‌های (۱۷) و (۱۸) استفاده کنیم، با در نظر گرفتن (۱۵) خواهیم داشت :

$$b = d = \sqrt{at} \qquad (19)$$

$$\overline{P} = \frac{N_0 \sqrt{at}}{a} \qquad (20)$$

که $\overline{P}$ یک حد پائین برای بار حد می‌باشد .

۶ــ نتایج و بحث پیرامون آنها :

معادلهٔ (۲۰) نشان می‌دهد که مقدار $\overline{P}$ مستقل از ابعاد تکیه‌گاه است . نتایج این آنالیز شبیه نتایج حاصل از آنالیز یک پوستهٔ استوانه‌ای زمانی‌که تحت یک بار متمرکز حلقوی قرار گرفته است (۶) می‌باشد .

شرط تسلیم در تمامی نواحی نقض نمی‌گردد اگر وتنها اگر معادلهٔ (۱۵) برای تمامی مقادیر θ و X در نامساوی $M_x \geq - M_0$ صدق کند، که با استفاده از علامت تساوی نتیجهٔ نهائی چنین است .

$$C_2^2 = 2\, C_1 \sqrt{at} + at \qquad (21)$$

که در این رابطه ابعاد تکیه‌گاه دخیل می‌باشند . معادلهٔ (۲۱) شرط لازم برای برقراری یک میدان تنش که به لحاظ استاتیکی در حوزه خمیری مجاز باشد را ارائه می‌کند . چنانچه پارامترهای هندسی بی‌بعد

$$\alpha = \frac{C_1}{C_2}, \gamma = \frac{C_1}{a} \qquad \rho = \frac{C_1}{\sqrt{at}}$$

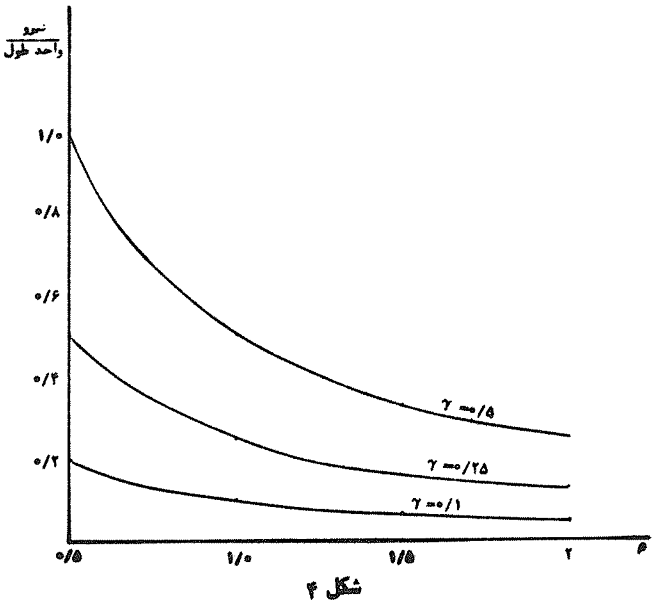
و $\Omega = \frac{b}{C_1}$ را به‌کار ببریم ، معادلات (۱۹) تا (۲۱) به صورت زیر در می‌آیند :

$$P^* = \frac{\overline{P}}{N_0} = \frac{\gamma}{\rho} \qquad \Omega = \frac{1}{\rho} \qquad \alpha^2 = \frac{\rho^2}{1+2\rho} \qquad (22)$$

خارج از نواحی سه گانه خمیری فوق یعنی برای $x > b + C_2$ و $a\theta > b + C_1$ یک میدان مجاز استاتیکی تنش به علت $Q_x = Q_\theta = 0$ وجود خواهد داشت . توجه شود که در آنالیز فوق از اثرات نیروهای برشی عرضی (Q_θ, Q_x) در سطح تسلیم صرفنظر شده است .

جهت ارائه یک مثال کاربردی ، فرض شود که شعاع استوانه 50mm و ضخامت آن $t = 1,5$ mm و ابعاد پایه $2C_1 = 6,25$mm, $2C_2 = 25$mm و تنش تسلیم $\sigma_0 = 10^5$ KN/m^2 باشند . در این‌صورت واحد طول/ $\overline{P} = 26$ N و یا $P = 26 \times 2\,(25 + 6.25) = 162$ N البته آنالیز فوق روش خلاصه با فرضیات متعدد ساده کننده برای محاسبه بار حد است. از این رو می‌توان این آنالیز را از دو جنبه بسط داد و تکمیل نمود. یکی این که سطح تسلیم نزدیکتر به ملاک‌های میزز یا ترسکا در نظر گرفته شود، و دیگر آنالیز کاملتری بخصوص در ارتباط با پیوستگی نواحی خمیری مختلف انجام داد و از فرضیات محدود کننده کمتر استفاده نمود .

انجام آزمایش‌های تجربی برای تایید یا رد نتایج نظری حاصله بسیار مفید است . رابطه (۱۹) نشان می‌دهد که بهترین حد پائین برای بار خد زمانی حاصل می‌شود که $b = d$ باشد ، که می‌توان این امر را با آزمایش به محک ارزیابی نهاد . همچنین رابطهٔ (۲۰) نشان می‌دهد که هرچه ضخامت مخزن زیادتر باشد بار حد نیز بزرگتر خواهد بود و بالعکس هرچه شعاع بزرگتر باشد بار حد کمتر است . شکل ۴ رابطه بین P^* و پارمترهای بدون بعد γ و ρ را به صورت منحنی نمایش می‌دهد.



شکل ۴

پاورقی

1. Local loads
2. Elastic
3. Plastic analysis
4. Limit analysis
5. Plastic analysis of shells
6. Limit load
7. Hardening
8. Lower - bound theorem
9. Upper bound theorem
10. Yield Criterion
11. Tresca yield Criterion
12. Von - Mises
13. Two - moment limited interaction yield surface
14. Plastic Hinges