جابجائی ذرات جامد ریزدانه توسط جریان‌های واگرا در محیط‌های متخلخل

دکتر حبیب اله بیات

استادیار دانشکده مهندسی عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده :

مدلی ریاضی مرکب از سه معادله دیفرانسیل جزئی جهت بیان مکانیزم جا به جائی مواد جامد بسیار ریز دانه در محیط‌های متخلخل معرفی شده است. می توان با کمک این مدل نحوه ترسیب و تعلیق مجدد مواد جامد را که با افت انرژی همراه است در زمان ها و مکان های مختلف در داخل محیط به صورت کمی تعیین نمود. اگر چه مدل برای شرائط ساده شده و فرضی تهیه گردیده است ، لیکن می توان امیدوار بود که دارای کاربرد های وسیع تری ، حداقل در سطح مطالعات آزمایشگاهی ، باشد. به علت دشواری راه حل های جبری جهت حل معادلات دیفرانسیل یاد شده ، استفاده از کامپیوتر در این باره ضروری است. لازم به یاد آوری است که مدل ریاضی مورد بحث دارای مبانی تحلیلی کافی و دقیقی نبوده و بیشترجنبه تجربی دارد. اما به علت ایجاد زمینه لازم جهت درک بهتر مکانیزم بسیار پیچیده جا به جائی مواد ریز دانه در محیط‌های‌متخلخل تحت تاثیر جریان های واگرا مفید خواهد بود.

۱ ــ مقدمه :

جا به جائی مواد جامد بسیار ریز دانه تحت تاثیر جریان های واگرا در محیط های متخلخل و مکانیزم ترسیب و تعلیق و جا به جا ئی مجدد آن ها یکی از مسائل پیچیده هیدرولیکی است که علیرغم اهمیت آن ، هنوز به خوبی شناخته نشده است . بهره گیری از برخی نظریات و تئوری های حاکم بر جدا سازی ذرات جامد معلق از سیالات درحال حاضرعمدتا" زیر بنای روش های شناخت مکانیزم جا به جائی ذرات توسط جریان های واگرا را تشکیل می دهد .

تحقیقات و مطالعات پراکنده ای که دراین زمینه تاکنون انجام گرفته است ، منجر به حصول نتایج همنوای نشده و بعضا" حکایت از اختلافات عمیق در بین آن ها دارد. لیکن با بهره گیری از یک مدل ریاضی که مرکب از سه معادله دیفرانسیل جزئی پیوستگی (۱) ، حرکت (۲) و انرژی (۳) می باشد ، می توان تاحدودی چگونگی جا به جائی مواد را شناخته و تغییرات غلظت مواد مذکور در سیا ل ، درزمان‌ها و مکان های مختلف را معرفی نمود .

۲ ــ تئوری :

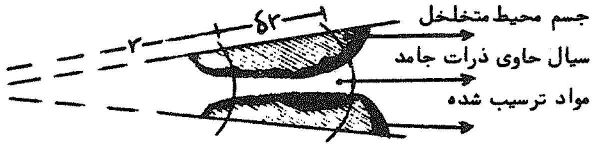
ستونی استوانه‌ائی شکل به شعاع r_0 از سیالی همگن و متراکم نشدنی (۴) را فرض نمائید که توسط محیطی متخلخل و همگن احاطه شده باشد. سیال مذکور که حامل ذرات جامد بسیار ریز (قطردانه‌های ذرات جامد یکسان و بسیار کوچکتر از قطرمتوسط خلل و فرج محیط متخلخل می باشد تا جداسازی تحت تاثیر عمل الک شدن (۵) صورت نگیرد.) با غلظت ثابت می باشد ، تحت فشار ثابت و بابده ثابت به طور یکنواخت از تمامی سطح تماس به داخل محیط متخلخل به طور آرام (۶) جریان دارد . غلظت مواد جامد در سیال آنقدر کم فرض می شود تا تاثیری درگران روی سیال نداشته باشد.

در این دستگاه مختصات استوانه ای مفروض ، سرعت جریان در هر نقطه تابعی از فاصله آن نقطه از مبدا جریان (سطح تماس بین ستون استوانه ای شکل مرکزی با محیط متخلخل پیرامون آن ، مبدا جریان تعریف می شود) با توزیع متقارن می باشد. بنابراین کافی است تافقط یک قطعه (۷) از آن استوانه مورد بحث قرار گیرد (شکل ۱) . درچنین شرائط مفروضی ، ترسیب مواد جامد ریز بر سطوح داخلی خلل و فرج عمدتا" تحت تاثیر کشش سطحی صورت می گیرد. ضمنا" باترسیب مواد جامدو ادامه آن بر سطوح داخلی خلل و فرج کم کم سطح مقطع جریان کاهش یافته و چون بده جریان ثابت فرض شده است ، لاجرم سرعت جریان درداخل خلل و فرج به تدریج افزایش می یابد. لیکن افزایش سرعت سبب اعمال نیروی برشی بیشتری بر مواد ترسیب شده گردیده و بخشی از آن ها را مجددا" به حالت تعلیق درخواهد آورد . لذا فرآیند ترسیب مواد جامد ریز تحت اثر کشش سطحی و تعلیق مجدد آن‌ها تحت تاثیر نیرو های برشی در نهایت به حالت تعادل رسیده که

در این مرحله (یعنی پس از رسیدن به تعادل) حجم مواد ترسیب یافته با حجم مواد به تعلیق درآمده برابر خواهد بود .

بایستی توجه داشت که ذرات ترسیب شده شدیداً متخلخل بوده و دارای ساختمانی ناپایدار هستند . بنابراین اگر چه ذرات جامد در آغاز حرکت در داخل محیط متخلخل هم قطر بوده اند ، پس از گذشت مدت زمانی معین وطی فاصله ای مشخص در داخل محیط دیگر چنین فرضی منطقی نخواهد بود . زیرا پس از رسیدن به حالت تعادل در هر نقطه از محیط ، مواد دو باره معلق شده در جریان به صورت گروه هائی چندتائی از ذرات بهم چسبیده وارد سیال خواهند شد ، که از این پس ، احتمالاً جدا سازی ازطریق الک شدن نیز موثر خواهد بود .

به منظور بیان ریاضی مکانیزم مورد بحث و نشان دادن ابعاد هندسی [۸] قطعه ای از محیط متخلخل در شکل (۱) نشان داده شده است .



شکل (۱)

الف ــ معادله پیوستگی :

همان‌طوری که در شکل (۱) نشان داده شده است ، قطعه ای از محیط متخلخل را به ضخامت واحد وطول δr ودرفاصله r ازمبدا جریان در نظر بگیریم در هر مقطع زمانی مفروض ، حجم قطعه مورد بحث در اشغال جسم محیط متخلخل ، مواد ترسیب شده ، سیال بی حرکت و سیال متحرک حامل مواد جامد خواهد بود . حال اگر معادله تغییرات حجم جریان طی عبور از قطعه در مقایسه با حجم جریان خروجی از آن را نوشته و از آن در تمام طول r انتگرال بگیریم خواهیم داشت :

$$\frac{u_o}{r_o}\left(\frac{\partial C}{\partial \bar r}\right)_t + \bar r(\epsilon_o-\sigma)\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_{\bar r} + \bar r(1-m-C)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)_{\bar r}=0 \qquad (1)$$

که درآن

u_0 = سرعت جریان در ورود به محیط متخلخل

C = غلظت مواد جامد معلق در سیال

m = تخلخل مواد ترسیب شده

σ = مقدار حجمی مواد ترسیب شده

ϵ_0 = تخلخل اولیه محیط متخلخل

t = زمان

$r/r_0 = \bar r$

با در نظر گرفتن این که تخلخل باقی مانده در هر زمان (t) با رابطه $\epsilon = \epsilon_o - \sigma$ بیان می شود ، می توان نشان داد که زمان لازم برای عبور سیال از داخل محیط متخلخل در هر مقطع زمانی $\bar t$ از رابطه زیر بدست می آید :

$$T = t - [\epsilon r_o(r^{-2}-1)/2u_o] \qquad (2)$$

دراین صورت رابطه (۱) قابل تقلیل به صورت زیر خواهد بود :

$$\frac{u_o}{r_o}\left(\frac{\partial C}{\partial \bar r}\right)_T + \bar r(1-m-C)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_{\bar r}=0 \qquad (3)$$

ولی چون حداقل زمان لازم برای عبور سیال از داخل محیط متخلخل در ابتدای جریان یافتن سیال به داخل محیط خواهد بود که در این مرحله محیط متخلخل کاملاً تمیز و عاری از هرگونه مواد ترسیب شده است ، لذا حداکثر مقدار $(t-T)$ برابر است با $[\epsilon_o r_o(r^{-2}-1)/2u_o]$ که به آن زمان جا به جائی [۹] می‌گویند این زمان در مقایسه باکل زمان لازم برای رسیدن مرحله تعادل در هر نقطه مفروضی بسیار کوچک می باشد ، لذا می توان فرض نمود که $T=t$ است . از آنجا رابطه (۳) به صورت زیر درخواهد آمد :

$$\frac{u_o}{r_o}\left(\frac{\partial C}{\partial \bar r}\right)_t + \bar r(1-m-C)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)_{\bar r}=0 \qquad (4)$$

ضمناً فرض شده است که مقدار C یا غلظت مواد جامد حمل شده نیز بسیار کم می باشد . پس در مقایسه با مقدار m قابل صرف نظر کردن می باشد . بنابراین رابطه (۴) خلاصه تر خواهد شد .

$$\frac{u_o}{r_o}\frac{\partial C}{\partial \bar r} + \bar r(1-m)\frac{\partial \sigma}{\partial t}=0 \qquad (5)$$

رابطه (۵) شکل ساده شده و قابل حل معادله پیوستگی می باشد .

ب ــ معادله حرکت :

برای استحصال معادله حرکت بایستی از تئوری های حاکم بر جریان های یک بعدی در صافی های ماسه ای سریع کمک گرفت . معادله حرکت در نظریه اخیرالذکر به صور مختلف توسط مولفین و محققین ارائه شده است . لیکن شکل عمومی و کلی معادله حرکت در صافی های ماسه ای سریع را می توان به صورتی که ایوز (Ives) پیشنهاد می کند پذیرفت . در این صورت داریم :

$$\frac{\partial C}{\partial L} = -\lambda_o\left(1+\frac{\beta\sigma_a}{\epsilon_o}\right)^x\left(1-\frac{\sigma_a}{1-\epsilon_o(1-m)}\right)^y\left(1-\frac{\sigma_a}{\sigma_{ua}}\right)^z C \qquad (6)$$

که در آن : λ = ضریب جدا سازی [۱۰]

σ_a = مقدار مطلق رسوب یا $\sigma = \dfrac{\sigma_a}{1-m}$

σu = مقدار نهائی مواد ترسیب شده

σua = مقدار مطلق σu یا $\sigma_u = \dfrac{\sigma_{ua}}{1-m}$

β = عدد ثابت

حال بادر نظر گرفتن این که $\dfrac{\partial C}{\partial r} = \dfrac{1}{r_0}\dfrac{\partial C}{\partial \bar r}$ و با بیان رابطه (۶) در دستگاه مختصات استوانه ای خواهیم داشت :

$$\frac{\partial C}{\partial \bar r} = -r_o\bar r\,\lambda_o\frac{C}{u_o}\left(1-\frac{\beta'\sigma}{\epsilon_o}\right)^x\left(1-\frac{\sigma}{\epsilon_o}\right)^y\left(1-\frac{\sigma}{\sigma_u}\right)^z \qquad (7)$$

که در این رابطه به جای ضریب β از β' که شامل عامل $\beta(1-m)$

نیز می باشد استفاده شده است . برای حصول به یک راه حل جبـــری جهت رابطه (۷) می توان نماهای سه گانه را برابر با واحد فرض نمو د $x = y = z = 1$ که متاسفانه مدارک علمی زیادی برای تـائید صحت چنین فرضی در دست نیست .

ج ــ معادله انـرژی :

بهره گیری از شکل عمومی معادله انرژی کوزینی (۱۱) که بیانگـر افت انرژی‌جریان یک بعدی آب خالص در محیط های متخلخل‌می‌باشد ، جهت استحصال معادله انرژی در شرائط مفروض امکان پـذیـر است . بنابراین بادر نظر گرفتن این که درجریان های واگرا ، سرعت جـریا ن در محیط متخلخلی با ضخامت واحد عبارت است از : $Q/2\pi r$ لذا خواهیم داشت :

$$\left(\frac{dH}{dr}\right)_0 = k\,\frac{\mu}{\rho}\,.\,\frac{Q}{2\pi rg}\,.\,\frac{S_0^2}{\epsilon_0^3} \qquad (8)$$

که درآن : $\left(\frac{dH}{dr}\right)_0$ = افت انرژی در محیط متخلخل تمیز

μ = گران روی سیال

ρ = دانسیته سیال

S_0 = سطح مخصوص دانه های تشکیل دهنــــده محیط متخلخل تمیز

g = شتاب ثقل

Q = بــده جریان

سایر پارامتر ها قبلا" تعریف شده اند

از طرفی براساس فرضیات اولیه می توان نوشت :

$$\frac{dH}{d\ln\bar{r}} = \bar{r}\,\frac{dH}{d\bar{r}} \quad \text{و} \quad \frac{dH}{dr} = \frac{1}{r_0}\,.\,\frac{dH}{d\bar{r}}$$

بـنـــابراین رابطه (۸) را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود .

$$\left(\frac{dH}{d\ln\bar{r}}\right)_0 = k\,.\,\frac{\mu}{\rho}\,.\,\frac{Q}{2\pi}\,.\,\frac{S_0^2}{\epsilon_0^3} \qquad (9)$$

اما با ترسیب مواد جامد برسطح خلل و فرج محیط متخلخــل ، شرائط هندسی محیط عوض شده و سطح مخصوص دانه های آن تابعـی‌از مقدار σ خواهد بود . این تغییر سطح مخصوص دانه ها به صورت رابطه زیر قابل تعریف می باشد :

$$S = S_0\left(1+\frac{\beta'\sigma}{\epsilon_0}\right)\left(1-\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right) \qquad (10)$$

همچنین‌به ازاء هر مقدار از σ تخلخل باقی مانده عبارت خواهد بود از :

$$\epsilon = \epsilon_0\left(1-\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right) \qquad (11)$$

با جای گذاری روابط (۱۰) و (۱۱) در رابطه (۹) خواهیم داشت :

$$\frac{\partial H}{\partial\ln\bar{r}} = k\,\frac{\mu}{\rho}\,.\,\frac{Q}{2\pi}\,.\,\frac{S_0^2}{\epsilon_0^3}\,.\,\frac{(1+\beta'\sigma/\epsilon_0)^2}{(1-\sigma/\epsilon_0)} \qquad (12)$$

و یا این که :

$$\frac{\partial H}{\partial\ln\bar{r}} = \left(\frac{dH}{d\ln\bar{r}}\right)_0 \frac{(1+\beta'\sigma/\epsilon_0)^2}{1-\sigma/\epsilon_0} \qquad (13)$$

رابطه (۱۳) شکل ساده شده معادله انرژی برای جریان های‌واگرا در محیط های متخلخل می باشد .

لازم‌به تذکر است که ازحل جبری دو معادله پیوستگـی و حـرکت می توان به سه معادله زیر دست یافت . باکمک این معادلات جـدیـد مقادیر C و σ برحسب t و $\bar{r}$ پیدا خواهد شد .

$$\frac{\beta'\sigma_u}{(\sigma_u\beta'+\epsilon_0)(1+\beta')}\ln\frac{(\epsilon_0+\beta'\sigma)}{(\epsilon_0+\beta'\sigma_1)} + \frac{\epsilon_0^2}{(\epsilon_0+\beta'\sigma_u)(\epsilon_0-\sigma_u)}\ln\frac{(\sigma_u-\sigma)}{(\sigma_u-\sigma_1)} - \ln\frac{\sigma}{\sigma_1} + \frac{\sigma_u}{(1+\beta')(\sigma_u-\epsilon_0)}\ln\frac{(\epsilon_0-\sigma)}{(\epsilon_0-\sigma_1)} = \frac{\lambda_0 r_0}{2u_0}(\bar{r}^2-1) \qquad (14)$$

$$(c/c_0) = (\sigma/\sigma_1) \qquad (15)$$

$$\frac{\beta'\sigma_u\epsilon_0}{(\beta'\sigma_u+\epsilon_0)(1+\beta')}\ln\left(\frac{\epsilon_0+\beta'\sigma_1}{\epsilon_0}\right) - \frac{\epsilon_0^2\,\sigma_u}{(\epsilon_0+\beta'\sigma_u)(\epsilon_0-\sigma_u)}\ln\left(\frac{\sigma_u-\sigma_1}{q_u}\right) \frac{\sigma_u\,\epsilon_0}{(1+\beta')(\sigma_u-\epsilon_0)}\ln\left(\frac{\epsilon_0-\sigma_1}{\epsilon_0}\right) = \frac{\lambda_0 C_0 t}{(1-m)} \qquad (16)$$

که‌درآن σ_1 عبارت است از مقدار σ در $\bar{r}=1$ (محـل ورود جریان به محیط متخلخل) که تنها تابعی از زمان می باشد .

C_0 عبارت است از غلظت مواد جامد حمل شده توسط سیال‌در $\bar{r}=1$

۳ ــ نتیجـه گیـری :

به منظور شناخت مکانیزم جا به جائی مواد جامد ریز در محیـط های‌متخلخل به وسیله جریان های واگرا با بـهره گیری از برخی نظـریه های حاکم بر جریان های یک بعدی و بیان آن ها در دستگاه مختصات استوانه ای ، می توان به سه معادله دیفرانسیل جزئی مشروحه در زیـر دست یافت :

معادله پیوستگـی
$$\frac{u_0}{r_0}\,\frac{\partial C}{\partial\bar{r}} + \bar{r}(1-m)\frac{\partial\sigma}{\partial t} = 0$$

معادله حرکت
$$\frac{\partial C}{\partial\bar{r}} = -r_0\bar{r}\,\frac{\lambda_0}{u_0}\left(1+\frac{\beta'\sigma}{\epsilon_0}\right)\left(1-\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)\left(1-\frac{\sigma}{\sigma_u}\right)C$$

معادله انرژی
$$\frac{\partial H}{\partial\ln\bar{r}} = \left(\frac{dH}{d\ln\bar{r}}\right)_0 \frac{(1+K\beta'\sigma/\epsilon_0)^2}{1-\sigma/\epsilon_0}$$

اگرچه‌حل جبری معادلات فوق امکان پذیر است ، ولی بـهـره گیری از ماشین های حسابگر ، حصول به نتیجه را تسریع و تسهیل می نماید . به هر حال پس از حل معادلات فوق ، مقداری از مواد جامد ریز کـه‌در هر نقطه از محیط متخلخل باقی مانده است معلوم شده و تغییـرات آن در زمانهای مختلف مشخص می شود . پیامد مشخص جا به جائی مواد جامد ریز که به صورت تغییرات انرژی قابل اندازه گیری است نیـزمـی تواندبه کمک مدل مورد بحث برای زمان ها و مکان های مختلف مفروض در داخل محیط متخلخل پیش بینی گردد .

پاورقی

1- Continuty equation
2- Dynamic equation
3- Headloss equation
4- Uncompressible
5- Straining
6- Laminar and low
7- Axisymmetrical Segment
8- Geometry
9- Displacement time
10- Filter Coefficient

منابع

1- Carman P.C., «*Fluid Flow Through Graunular Beds*», Trans, Institution of Chemical Engineers, 1937, Vol. 15, PP 150-166.

2- Herzing J.P., «*Flow of Suspensions Through Porous Media*», Trans Instit. of Chemical Engineers, 1970, Vol. 62, PP 8-34.

3- Adin A. & Rebham M., «*A Model to Predict Concentration and Head Loss Profiles in Filtration*», J. American Water Works Association, 1977, Vol. 69, No 8, PP. 444-453.

4- Bear J., «*Dynamic of Fluids in Porous Media*», Pub. American Elsevier, New York. 1972.

5- Ives, K.J., «*The Scientific Basis of Filtration*», Pub. Noordhoff, Leyden 1975. Uk.

6- Wardlow R.B., «*The Development of a Deterministic Integratid Surface / Subsurface Hydrological ResponseModel*», Ph. D. Thesis, Dept of Civil Enging, Univ. of Strathclyde, UK, 1978.