روش تحقیقاتی پارامتری[1]

دکتر مهدی سبزه‌پرور

استادیار دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده:

بررسی و آنالیز یک سیستم فیزیکی غیرخطی[2] که اطلاعات کافی در مورد پارامترهای آن در دست نیست موردنیاز می‌باشد. روش‌های موجود به علت حساسیت زیاد نسبت به حدس اول و زیاد شدن تعداد پارامترهائی که اختلاف اندازه مابین واحد آنها بسیار زیاد است (مثلاً ارتفاع ۱۰۰۰۰ متر و زاویه ۰/۰۲ رادیان) باعث پیچیدگی منحنی واگرائی و درنتیجه ایجاد فضای غیراقلیدسی خواهد شد. ضمن این که وقت کامپیوتر را زیادی مصرف می کنند، اکثراً با واگرائی جواب‌ها مواجه خواهند شد.

در روش تحقیقاتی پارامتری انتقال منحنی‌ها به یک فضای متریک (فضای صفحه کاغذ که یک فضای کاملاً اقلیدسی را تشکیل می‌دهد) باعث خواهد شد که تمام متغیرها ازیک نوع (واحد طولی) بوده وعلاوه بر این هموزن کردن اندازهٔ پارامترها، مشکلات فوق را برطرف می سازد.

این روش موارد استفاده زیادی در ساختن مدل ریاضی مسائل مبهم فیزیکی دارد که درمقایسه با روش‌های موجود بسیار سریع و دقیق عمل کرده و قادربه آنالیز سیستم‌هائی که تا بیش ازپانزده متغیر می باشند، هست.

یکی از روش‌های شناسائی پارامترها که موارد استفاده زیادی دارد، روش گرادینت می باشد که باآلگوریتم‌های آزمون خطایا تکرار[3] برای اصلاح کردن تخمین پارامترها جهت نزدیک شدن به بهینه عمل می کند.[1] اگرچه این روش عمدتاً با چند سعی، خیلی سریع به جواب موردنظر می رسد، لیکن درنزدیکی بهینه همگرائی بسیار آهسته ای دارد.

روش دیگر گرادینت رتبه دوم است که با درنظر گرفتن نوع منحنی و شیب آن درنزدیکی بهینه عمل می کند[1] و مشکل روش اول را ندارد. امّا مشکلی که با آن مواجه می باشد ظرافت و دقت زیاد آن درتمام طول منحنی است (نقاط بحرانی و غیربحرانی) که این ظرافت درنقاط غیربحرانی که اکثراً طول منحنی می باشد باعث کندی عمل می گردد. روش‌های فوق در رابطه با توابعی که دارای یک یا دو متغیر می باشند و منحنی تابع آنها زیاد پیچیده نباشد چندان مشکلی ایجاد نمی کنند ودراکثراوقات به‌جواب‌های مطلوبی خواهند رسید[2]، اما با زیاد شدن تعداد متغیّرها و پیچیده شدن شکل منحنی با اشکالات اساسی روبروخواهند شد.

متأسفانه در اکثر متدهای تحقیقاتی پارامتری بعد فیزیکی مسأله درنظر گرفته نمی‌شود و تمام متغیرها را هم واحد و اختلاف اندازه مابین آنها را خیلی کم درنظر گرفته، هنگامی که این نوع راه‌حل‌ها را در مسائل فیزیکی بکارمی گیریم اکثراً با واگرائی مواجه خواهیم شد. برای مثال به روش کمترین مربعات[4] مراجعه شود.

با بررسی روش‌های موجود آشکار است که نیاز سختی به یک روش تحقیقاتی پارامتری که قادربه جوابگوئی مسائل فیزیکی مبهمی که اطلاعات کافی در مورد پارامترها در دست نیست می باشد. بنابراین بعد ازمطالعه روی مزایا و مشکلات روش‌های موجود، روش جدیدی که قادربه شناسائی بیش ازپانزده متغیر در یک سیستم درمدت زمان کوتاه با دقت زیاد می باشد پیشنهاد می شود.

سه مشکل اساسی در روش‌های موجود وجود دارد.

۱ــ واحد متغیرها،

۲ــ اندازهٔ متغیرها،

۳ــ همگرائی جواب‌ها.

برای برطرف کردن مسأله اول می توان تغییرات تابع را روی صفحه کاغذ که یک فضای اقلیدسی را تشکیل می دهد تصویر کرد. این عمل باعث خواهد شد که همه متغیرها ازیک نوع واحد طولی برخوردارشوند، درحالی که درمسأله فیزیکی با واحد اصلی خود عمل می کنند. حال این فضا را با نام فضای متریک معرفی می کنیم.

برای این که مقدار متغیرها نیز هم وزن شوند، متغیرهای جدیدی را تعریف می کنیم که حاصل از تقسیم متغیر اصلی با مقیاس انتخاب شده می باشد. البته انتخاب این مقیاس ها کار خیلی حساسی است و اندازه آن رابطه مستقیم با سرعت همگرائی دارد. دو طریق برای انتخاب مقیاس ها پیشنهاد می شود. اول آن که با داشتن اطلاع در مورد متغیرها می توان مقدار مقیاس را همسنگ با مقدار متغیر در نزدیکی بهینه گرفت و اگر این اطلاعات در دست نباشد، اطلاع کافی را با چگونگی رفتار مشتق حاصله نسبت به متغیرهای آن را می توان تخمین زد. نتایج چندین آزمایش نشان داده اند که علی رغم وجود حدود پنجاه درصد اشتباه در انتخاب مقیاس ها، با این روش می توان به جواب رسید، هرچند دفعات سعی و خطا متناسب با مقدار اشتباه افزایش خواهد یافت[3،4].

مشکل سوّم را نیز می توان با انتخاب ضریب همگرائی متغیر برطرف کرد، به این طریق که این ضریب در رابطه با مقدار مشتق تابع نسبت به متغیر انتخاب می شود، هرجا منحنی زاو یه نسبتاً کوچک داشته باشد و تغییرات زیادی در مشتقات قبلی و کنونی نباشد از ضریب بزرگتری، و هنگام بحرانی شدن منحنی از ضریب کوچک تری استفاده می شود.

با درنظر گرفتن این شرایط به شرح این روش می پردازیم، متغیرهای جدید را به این صورت تعریف می کنیم.

$$X_1 = \frac{A_1}{S_1}, \quad X_2 = \frac{A_2}{S_2}, \quad \vdots \quad X_n = \frac{A_n}{S_n} \qquad (1)$$

S_1 ، S_2 ... ،S_n مقیاسهای انتخابی است، X متغیر جدید و A متغیر اصلی می باشند. بدین وسیله متغیرهای اصلی به فضای متریک منتقل می شوند، که همگی دارای یک نوع واحد طولی هستند و می توان فاصله بین دو متغیر را در هر زمان از رابطه زیر بدست آورد.

$$r = \sqrt{\Delta X_1^2 + \Delta X_2^2} \qquad (2)$$

حال در این فضای جدید تغییرات را می توان به این صورت نوشت:

$$\Delta y = m_1 + m_2$$

$$m_1 = \frac{M_1}{S_1} \qquad (3)$$

$$m_2 = \frac{M_2}{S_2}$$

M_1 و M_2 تغییرات متغیرهای اصلی هستند و Δy کل تغییرات پارامترها در فضای متریک می باشد. بنابراین معادله گرادینت در فضای متریک بدین صورت درخواهد آمد.

$$\frac{\Delta X_1}{\Delta X_2} = \frac{m_1}{m_2} \qquad (4)$$

و بالاخره مقدار تغییرات در متغیرهای اصلی چنین خواهد بود:

$$\frac{\Delta A_1}{\Delta A_2} = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 \left(\frac{M_2}{M_1}\right) \qquad (5)$$

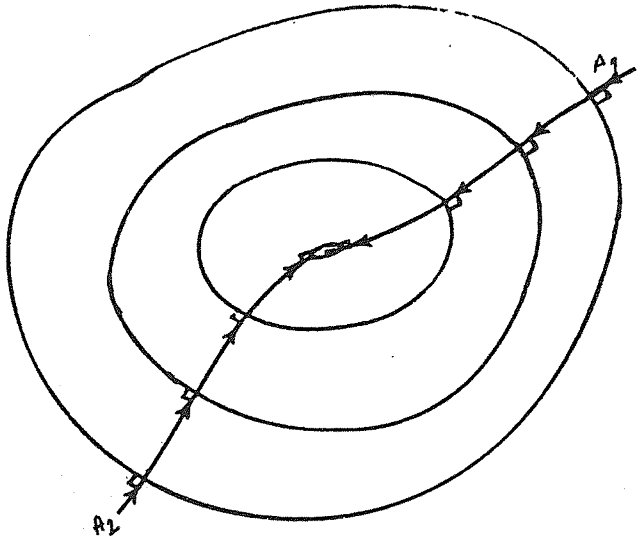
و با استفاده از این مقادیر مقدار جدید متغیرهای اصلی را به این صورت بدست آورد:

$$A_{1N} = A_{10} - \Delta A_1$$

$$A_{2N} = A_{20} - \Delta A_2$$

اندیس N و O نمایانگر مقدار جدید و قدیمی پارامترها می باشد.

شکل زیر چگونگی عملکرد این روش را در رابطه با رسیدن به بهینه نشان می دهد، درحالی که ضرایب همگرائی در محل منحنی های مرزی تعیین شده اند.



حال آنالیز بالا را برای تعیین مقادیر مینیمم یک تابع اسکالری که دارای نه متغیر می باشد استفاده می کنیم.

$$f = f(A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots, A_9) \qquad (7)$$

گرادینت تابع درفضای متریک به این صورت خواهد بود:

$$\Delta f = \frac{\delta f}{\delta X_1}\bar{i}_1 + \frac{\delta f}{\delta X_2}\bar{i}_2 + \ldots\ldots + \frac{\delta f}{\delta X_9}\bar{i}_9 \qquad (8)$$

$\bar{i}_1$ ، $\bar{i}_2$ ...... و $\bar{i}_9$ بردارهای واحد مستقل برای هر متغیر می باشند و

$$X_i = \frac{A_i}{S_i} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots \qquad (9)$$

نیز مقیاس های انتخاب شده در رابطه با مقدار پارامتر می باشند.

برای پیدا کردن جهت پارامترها یک بردار واحد برای کل پارامترها تعریف می کنیم.

$$\hat{u} = \frac{dX_1\bar{i}_1 + dX_2\bar{i}_2 + \dots\dots + dX_9\bar{i}_9}{\sqrt{dX_1^2 + dX_2^2 + \dots\dots + dX_9^2}} \qquad (10)$$

و برای این که مقدار حرکت و جهت حرکت هر یک از پارامترها مستقلاً مشخص شود جهت حرکت کسینوسی را بدست می آوریم:

$$m_j = \frac{dX_i}{\sqrt{dX_1^2 + dX_2^2 + \dots\dots + dX_9^2}} \qquad (11)$$

حال مقدار تغییرات هر یک از پارامترها به این صورت خواهد شد:

$$\Delta X_i = m_i \Delta l$$

که در آن Δl مقدار سرعت همگرائی را نشان می دهد. برای شناسائی این تغییرات روی پارامترهای اصلی (فیزیکی) این تغییرات را در پارامترهای اصلی پیدا می کنیم به این صورت که:

$$\Delta A_i = S_i \Delta X_i$$

$$\Delta A_i = S_i m_i \Delta l \qquad (13)$$

برای داشتن یک همگرائی ماکزیمم لازم است که بردار تغییرات پارامترها[5] موازی و در جهت مخالف با بردار گرادینت آنها باشد، بنابراین،

$$dX_1\bar{i}_1 + dX_2\bar{i}_2 + \dots\dots + dX_9\bar{i}_9 =$$

$$\frac{\delta f}{\delta X_1}\bar{i}_1 + \frac{\delta f}{\delta X_2}\bar{i}_2 + \dots\dots + \frac{\delta f}{\delta X_9}\bar{i}_9 \qquad (15)$$

با استفاده از تعاریف بالا و جایگزین کردن مقادیر اصلی پارامترها مقدار تغییر هر پارامتر به صورت زیر درخواهد آمد:

$$\Delta A_i = S_i^2 \frac{\delta f}{\delta A_1} \Delta l / \left[\left(\frac{\delta f}{\delta A_1}\right)^2 S_1^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta A_2}\right)^2 S_2^2 + \dots\dots + \left(\frac{\delta f}{\delta A_9}\right)^2 \right]^{1/2} \qquad (16)$$

که در آن $\left(\frac{\delta f_i}{\delta A_i}\right)$ مقدار مشتق تابع نسبت به متغیر A_i می باشد. با محاسبه مشتقات مقادیر جدیدی برای پارامترها به دست خواهد آمد که سعی بعدی را ممکن می سازد و

$$A_i^1 = A_i^0 - \Delta A_i$$

A_i^1 مقدار جدید و A_i^0 مقدار قدیمی متغیر می باشد. این سعی آنقدر تکرار می شود تا مقدار کل مشتق های تابع $\frac{\delta F}{\delta l}$ (مجموع مشتق های جزئی $\frac{\delta F}{\delta A_i}$) به صفر نزدیک شود.

پاورقی

در مقالات دیگر مجله به جای واژهٔ لاتینی Parameter کلمه (فراسنج) فارسی را جایگزین کرده‌ام (ویراستار).

1 - Parameter Identification Method
2 - Non Linear
3 - Iteration
4 - Least Squares
5 - parameter Change Vector

منابع

1. Wilde, Douglass J. Optimum Seeking Methods, Prentice Hall Inc., NewJersey, 1964.
2. Nash, Peter., System Modeling and Optimization, Peter Peregrinus Ltd. Stevenge, UK, and NewYork, 1981.
3. Sabzehparvar Mehdi, «A Numerical Method for Analyzing Performance Flight Test Data», M. S. Thesis, Department of Aerospace Engineering Mississipi State University, May 1982.
4. Sabzehparvar Mehdi, «Determination of Aerodynamic and Propulsion Parameters of General Aviation Aircraft Using Steady State Flight Test Data», Ph. D. Dissertation, Department of Aerospace Engineering Mississippi State University, August 1984.