کاربرد روش ولترا[1] برای حل معادلهٔ نوشوندگی[2]

دکتر محمّد حسین سلیمی

استادیار دانشکدهٔ مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده:

در تئوری جایگزینی[3] تابع امید شکست دارای نقش بسیار مهمّی است که با حل آن می توان در هر دورهٔ زمانی تعداد نوشوندگی[4] را محاسبه کرد و در نتیجه در مدل های جایگزینی بکاربرده و زمان های بهینه تعویض پریودیک قطعات ماشین و یا خود ماشین و هزینه مربوطه را محاسبه نمود. لذا بر آن شدیم که روشی بدست آوریم تا براساس آن بتوان با توابع مختلف شکست یعنی $f(t)$ امید شکست یعنی $H(t)$ را محاسبه نمائیم. این روش پیشنهادی «ولترا» نامیده شده است و قابل کاربرد در توابع مختلف شکست بوده و نسبت به روش های دیگر مزیت و برتری دارد.

۳ــ کاربرد

مقدمه:

اگر یک قطعه از ماشین و یا ماشینی را در نظر بگیریم که $F(x)$ تابع تجمعی شکست و $H(x)$ تابع امید شکست آن در زمان x باشد، تابع نوشوندگی یا (Renewal) عبارت است از:

$$H(x) = F(x) + \int_0^x f(u)\, H(u-x)\, du \qquad (1)$$

(Ross, ۱۹۷۰)، این تابع در تئوری جایگزینی[3] نقش عمده و با اهمیتی دارد زیرا با حل آن در هر زمان می توان مقدار جایگزینی در یک سیستم را برآورد و یا قبلاً قطعات یدکی موردنیاز راپیش بینی نمود. در اکثریت روش های جایگزینی برای بدست آوردن هزینه بهینه شکست و یا زمان بهینه جایگزینی مورد استفاده قرار می گیرد. آقایان (۱۹۶۳) Smith و Leadbetter قبلاً با استفاده از بسط سری ها در مورد تابع شکست خاصی مثل وایبل[5] ارائه طریق نموده اند ولی روش آنان قابل گسترش به کلیه توابع شکست نمی باشد، لذا بر آن شدیم روشی بدست آوریم که اولاً قابل کاربرد در تمام توابع شکست بوده، ثانیاً نتایج آن از دقت موردنظر برخوردار باشد.

از آنجا که تابع (۱) یک Integral equation از نوع ولترا می باشد، می توان با استفاده از روش حل تابع ولترا تابع نوشوندگی را به طریقه عددی حل نمود.

اما تابع کلی (۲)

$$\varnothing(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x} K(x,t)\, \varnothing(t)\, dt \qquad (2)$$

(Holbrook ۱۹۶۹ و Irving ۱۹۵۹) صورت کلی Integral equation می باشد که ابتدا به توضیح راه حل آن می پردازیم:

درحل عددی تابع (۲) با استفاده از (Trapezoidalrule) و با درنظر گرفتن قراردادهای زیر داریم:

$$t_0 = x_0$$
$$t_r = x_0 + r\,\delta t\,,\ 1 \leqslant r \leqslant n$$
$$t_n = x_n\,,\ \varnothing(t_r) = \varnothing_r$$
$$K(x, t_s) = K_s(x)$$
$$K(x_r, t_s) = K(x_0 + r\,\delta t, t_s) = K_{rs}$$
$$\int_{x_0}^{x} K(x,t)\,\varnothing(t)\, dt =$$
$$\delta t\,[(\frac{1}{2})\, K_0(x)\,\varnothing_0 + K_1(x)\,\varnothing_1 + \ldots + K_{n-1}(x)\,\varnothing_{n-1} + (\frac{1}{2})\, K_n(x)\,\varnothing_n + \varepsilon(x) \qquad (3)$$

که $\varepsilon(x)$ جمله اصلاحی است و $x_0 < x < x_n$، معادله (۳) می تواند مقادیر بین x_0 و x_n را بگیرد. لذا معادله (۲) به صورت زیر درمی آید.

$$\varnothing_r = f_r + \delta t\,[\,(\frac{1}{2})\, K_{r0}\,\varnothing_0 + K_{r1}\,\varnothing_1 + \ldots + K_{r,n-1}\,\varnothing_{n-1} + (\frac{1}{2})\, K_{r,n}\,\varnothing_n + \varepsilon_r] \qquad (4)$$

بدین صورت تابع (۲) با تابع (٤) که یک دستگاه ۱+n معادله و ۱+n مجهولی است جایگزین شده و درصورتی که برای اولین تقریب ε_r را ناچیز فرض نموده و صرفنظر نمائیم و معادلات را برای $\varnothing_r\,, r = 0, 1, \ldots, n$ حل نمائیم خواهیم داشت.

$$(2 - \delta t\, R_{00})\,(\varnothing_0 / 2) - \delta t\, K_{01}\,\varnothing_1 \ldots - \delta t\, K_{0,n-1}\,\varnothing_{n-1} - \delta t\, K_{0n}\,(\varnothing_n/2) = f_0$$
$$- \delta t\, K_{10}\,(\varnothing_0/2) + (1 - \delta t\, K_{1,1})\,\varnothing_1 \ldots \delta t\, K_{1,n-1}\,\varnothing_{n-1} - \delta t\,(\varnothing_n/2) = f_1$$

....

$$\delta t\, K_{n0}\,(\varnothing_0/2) - \delta t\, K_{n1}\,\varnothing_1 \ldots \ldots \delta t\, K_{n,n-1}\,\varnothing_{n-1} + (2 - \delta t) K_{n,n}\,(\varnothing_n/2) = f_n \qquad (5)$$

و یا به طور خلاصه

$$K \varnothing = F \qquad (6)$$

که در آن $K = (K_{ij})$ ماتریس ضرایب و

$$\varnothing = \{ \varnothing_0/2 , \varnothing_1 , \ldots , \varnothing_{n-1} , \varnothing_n/2 \} \qquad (7)$$

$$F = \{ f_0 , f_1 , \ldots , f_{n-1} , f_n \} \qquad (8)$$

بردارهای ستونی می باشند.

معادلات (۵) یک جواب (non — trivial) برای حداقل یک مقدار r ; $f(r) \neq 0$ دارد درصورتی که $f(x)$ برای کلیه مقادیر x صفر نبوده و t به طور مناسب انتخاب گردیده باشد.

اگر داشته باشیم $K(x,t) = K(x_n - x , t_n - t)$

این شرط با قرار دادن $t = t_s , x = x_r$ به صورت زیر در می آید.

$$K_{rs} = K_{n-r , n-s} \quad (9)$$

ماتریسی که خاصیت (۹) را دارا باشد Centro - Symmetric نامیده شده که درین صورت حل معادله ساده‌تر می شود.

حل معادلهٔ ولترا

حال معادله $\varnothing(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x} K(x,t)\, \varnothing(t)\, dt$ را درنظر می گیریم. درین حالت معادلات (۵) شکل مثلثی زیر را خواهند گرفت:

$$\varnothing_0 = f_0$$

$$-(\delta t/2) K_{1,0}\, \varnothing_0 + \{ 1 - (\delta t/2) K_{1,1} \} \varnothing_1 = f_1$$

$$-(\delta t/2) K_{2,0}\, \varnothing_0 + \ldots + \delta t\, K_{2,1}\, \varnothing_1 + \{ 1 - (\delta t/2) K_{2,2} \}\, \varnothing_2 = f_2$$

....

$$-(\delta t/2) K_{n,0}\, \varnothing_0 - \delta t\, K_{n,1} \varnothing_1 - \ldots - \delta t\, K_{n,n-1}\, \varnothing_{n-1} + \{ 1 - (\delta t/2) K_{n,n} \} \varnothing_n = f_n \qquad (10)$$

به شرط آن که $\lim_{x \to x_0} \int_{x_0}^{x} K(x,t)\, \varnothing(t)\, dt = 0$

حل عددی معادله نوشوندگی

حال معادله (۱) $H(t) = F(t) + \int_0^t f(x)\, H(t-u) du$ را درنظر می گیریم که همان معادله نوشوندگی است که قابل تبدیل به صورت زیر است:

$$H(t) = F(t) + \int_0^t f(t-u)\, H(u)\, du$$

که این معادله به همان فرم معادله

$$\varnothing(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x} K(x,t)\, \varnothing(t)\, dt$$

بوده و با جایگزینی مقادیر $H(t)$, $F(t)$ و $f(t)$ در معادلات (۱۰) خواهیم داشت:

$$H_1 = F_1$$

$$H_2 = F_2 + \delta t \, . \, f_1\, H_1$$

$$H_3 = F_3 + \delta t\, (f_2 H_1 + f_1 H_2)$$

....

$$H_n = F_n + \delta t\, (H_1 f_{n-1} + H_2 f_{n-2} + \ldots\ldots + H_{n-1} f_1)$$

$$F_1 = F(\delta t) , F_2 = F(2 \delta t) , \ldots , F_n = F(n \delta t)$$

که در آن

$$H_1 = H(\delta t) , H_2 = H(2 \delta t) , \ldots , H_n = H(n \delta t)$$

حال اگر به طور مثال فاصله زمانی (۱ و ۰) را درنظر گرفته و فرض کنیم داریم: $n = 10$ ، $\delta t = 1/10$

$$H(1) = H(10 \times 1/10)$$

$$H(0.5) = H(n/2 \times \delta t)$$

یک برنامه کامپیوتری برای محاسبه مقادیر مختلف $H(t)$ برای توابع مختلف شکست و با مقادیر مختلف پارامترها نوشته شده است جواب این برنامه کامپیوتری برای مقادیر مختلف t و n وقتی که تابع شکست وایبل[5] بوده

و

Shape parameter $= n = 0 , 1 , 1.5$

Scale Parameter $= 1$

درجدول زیر داده شده است.

پاورقی:

1 - Volterra
2 - Renewal Equation
3 - Replacement Theory
4 - Renewal
5 - Weibull

منابع:

1 - Volterra - v. «*Theory of functional and of Integral and Integro - Differential Equations*».

2 - Smith, W.L. & Leadbetter, M.R. «*Notes on the Renewal function for the weibull distribution*», Technometrics Vol. 5, No. 3, August 1963.

3 - Smith, W. «*Renewal Theory and its Ramifications*», Journal of the Royal statistical Society, series B, No, 2, (1958).

4 - IRUINE, J. & MULLINEUX, *Mathematics in physics and Engineering*. 1959, Academic Press, NewYork.

5 - Cox, D.R. *Renewal Theory* (1970).

6 - Barlow, R.E. «*Maintenance and Replacement*
7 - *policies*», statistical theory of Reliability,. University of wisconsin, 1964. Jardin, A.K.S (Ed.) (1970). *operational research in maintenance*. Manchester University Press.

Expected No. of Failures when the underlying failure distribution is Weibull, for different values of shape parameter (0.5 to 1.5) Scale parameter =1 (VOLTERRA)

t \ n	0.5	1	1.5
0.1	0.289019969	0.097482182	0.031312388
0.2	0.418077884	0.194728775	0.087532445
0.3	0.520081042	0.291740347	0.158449077
0.4	0.608016699	0.388517467	0.239843183
0.5	0.686902717	0.485060701	0.329014766
0.6	0.759312384	0.581370614	0.424023511
0.7	0.826775604	0.677447771	0.523408239
0.8	0.890290460	0.773292734	0.626047845
0.9	0.950551302	0.868906063	0.731078035
1	1.008064567	0.964288320	0.837834529
1.1	1.0632133	1.059440062	0.945810865
1.2	1.116295696	1.154361846	1.054625373
1.3	1.167549394	1.249054228	1.163994633
1.4	1.217167504	1.343517763	1.273711889
1.5	1.265309544	1.437753003	1.383629484
1.6	1.312109147	1.5317605	1.49364465
1.7	1.357679629	1.625540806	1.603688128
1.8	1.402118104	1.719094468	1.713715164
1.9	1.445508584	1.812422035	1.723698500
2	1.487924351	1.905524052	1.933623055
2.1	1.529429809	1.998401065	2.043481827
2.2	1.570081933	2.091053619	2.15327303
2.3	1.609931440	2.183482254	2.262997953
2.4	1.649023718	2.275687513	2.372659514
2.5	1.6873999597	2.367669935	2.482261298
2.6	1.725095972	2.45943059	2.591806948
2.7	1.762146328	2.550968422	2.70129982
2.8	1.798581169	2.64228556	2.810742805
2.9	1.83442839	2.733382008	2.920138269
3	1.869713585	2.824258299	3.029488065