دینامیک فنرها
SPRING DYNAMICS

از : مهندس نادر خورزاد

عمل سوپاپ را دریك موتوراحتراقی درنظرمیگیریم .

ابتدا چگونگی عمل فنر سوپاپ را در موقعیکه سرعت میله سوپاپ یا موتور در حال زیاد شدن باشد مورد توجه قرا میدهیم .

(۱) درسرعت کم از رابطه‌های معمولی‌فنرها میتوان تعین کرد که تغییرطول برواحد طول درتمام‌فنر یکسان خواهدبود واگرتغییرمکان عمودی ازنقطه‌ائی که نیرودرفنرصفرباشد اندازه گیری وبنام X_e نامیده شود نیروی مربوط به‌این تغییرمکان (F_e) خواهد بود .

وبنابراین $(F_e)_o = KX_e$ (۱)

K ضریب فنریت بوده و بارابطه معمولی در فنرها قابل قبول خواهد بود .

$$K = \frac{d \cdot G}{64R^3N} \quad (۲)$$

G = مدول‌الاستیسیته برشی

d = قطرمفتول‌فنر

R = شعاع مارپیچ فنر

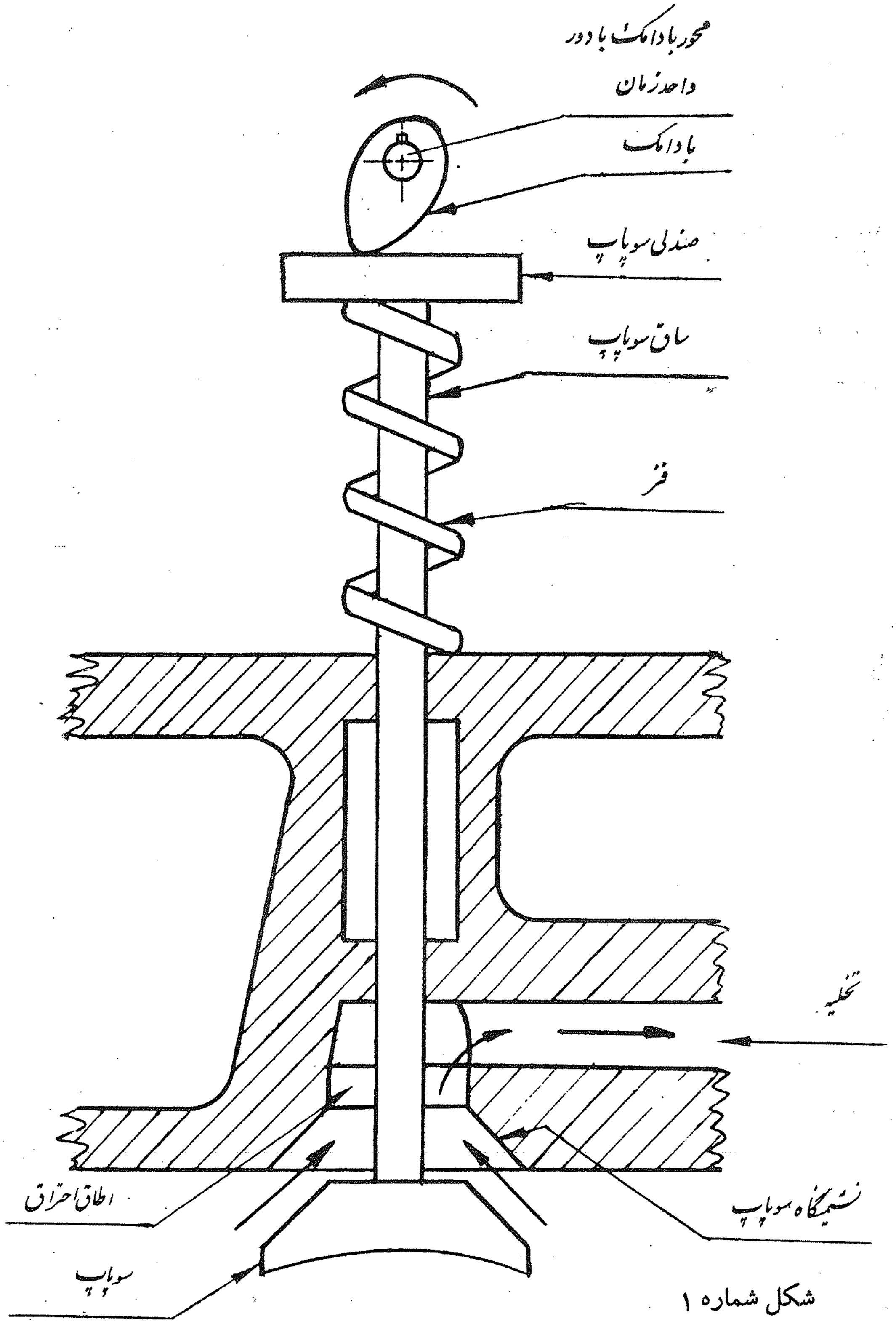
N = تعداد طبقه‌های مؤثرفنر

(۲) با ازدیاد سرعت جرم فنرنیروی مقاومی درمقابل شتاب ایجاد میکند (ینروی‌اینرسی) ، و نیروی عمودی موجود درطول فنریکنواخت نبوده وهمچنین تغییرمکان برواحد طول‌فنرهم نمیتواند یکنواخت باشد ودرهرلحظه دربعضی ازنقاط فنرفشرده میشود ودرنقاط دیگر کشیده خواهد شد برای هرزاویه‌ائی ازبادامك نیروی فنر F_e برسوپاپ ممکن‌است‌بمقدار زیاد کمتریابیشتراز $(F_e)_o$ باشد. وبدین ترتیب نیروئی که‌سوپاپ برنشیمنگاه سوپاپ وارد میآورد از رابطه (۱) بدست نخواهد آمد وممکن است خیلی کمترازمقداری باشد که از رابطه (۱) بدست میآید و بدین ترتیب در صورت محاسبه فنر براساس رابطه (۱) در راندمان موتور وقفه ایجاد خواهد شد .

(۳) بالاتراز سرعت معینی این اثر بقدری زیاد خواهد شد که دیگر ساق سوپاب در تماسی که باید با بادامك داشته باشدباقی‌نخواهد ماند وسوپاپ بحالت پس جستن (Bouncing) برنشیمنگاه سوپاپ برخورد میکند ، واین عمل باعث سائیدگی تخریبی سطح سوپاپ گردیده وایجاد خستگی مینماید .

اگراشکالات حالت سرعت (۲) و(۳) را بخواهیم برطرف نمائیم . ممکن است نتیجه گرفت که قطر مفتول فنررا زیاد نمود تافنرسختری بوجودآید ولی بدین ترتیب جرم فنر نیزبیشترخواهد شد وبالاخره‌این سئوال پیش میآید که چقدرباید اندازه فنررا تغییرداد ؟

در اینجا ابتدا برای حالت (۲) خصوصیات فنر را تعین نموده تا بتوان برای اتفاقات در حالت (۳) پیش بینی‌هائی نمود .



شکل شماره ۱

برای اینکه مسئله موجود را بصورت سئوالی درآورد که : F_e چه مقدار برحسب زمان نسبت به پارامترهای دستگاه وسرعت تغییر میکند ؟

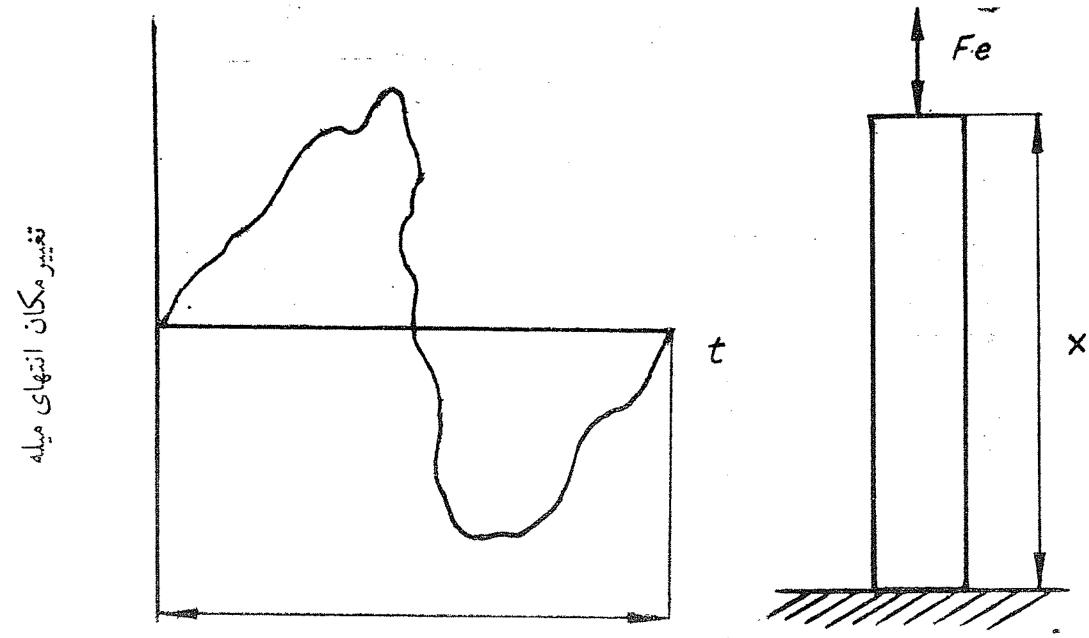
نیروی F_e نیروی سوپاپ برنشیمنگاه سوپاپ نخواهد بود اما F_e باید معلوم باشد تا بتوان نیروی نشیمنگاه سوپاپ راتعیین کرد. دراینجا ماکارخود رابیشتر برروی دینامیك فنرتمرکزخواهیم داد وهمچنین

اثرحالت گذران را صرفنظر نموده و تمام آنالیزخود را برای موقعیکه حالت تعادل بدست آمده باشد صرف خواهیم نمود .

در حالت (۳) بنظرمیرسد که شرائط مرزی تغییرمکان انتهای فنر بوسیله یك حرکت سیکلی مشخص میشود .

اگریك میله الاستیکی رابعنوان فنردر نظر بگیریم. شرائط مرزی برای تغییرمکان انتهای میله بوسیله یك معادله سیکلی نسبت بزمان تعین میگردد.

مسئله نیروی ضربه‌ائی برروی میله (مانند زدن چکش بروی میله) میباشد. معادله دیفرانسیلی نیرو ویاتغییرمکان درمیله یکی‌میباشد اما مقادیرمرزی آنها مختلف میباشد وازلحاظ حالت گذران مسائل مختلف بوجود خواهدآمد .



شکل شماره ۲   دوره تناوب T

اگریك میله راگرفته و خطوطی عرضی بافاصله‌های مساوی درتمام طول این میله رسم کرده و سپس میله را تحت اثر بارسیکلی قرارداده وبادوربین‌های سرعت‌زیاد (high - speed camra) عکس برداریم خطوط کشیده‌شده رامیتوان‌بصورت زیرمشاهده کرد .

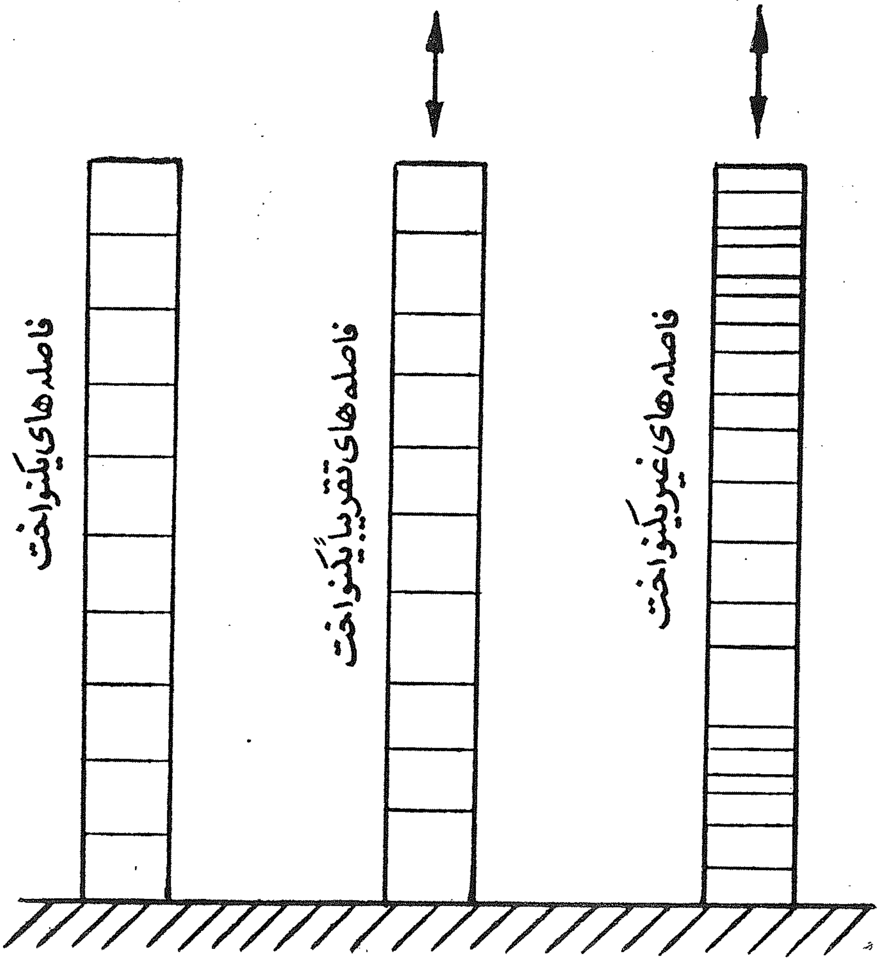
چگونگی این خطوط درقسمت (C) نشان میدهد که مقدار دانسیته خطوط درهر لحظه متغیر خواهد بود دراینجاست که میتوان حدس زد که حرکت ممکن است موجی باشد .

رابطه (۱) فقط به فنری که درتمام طول یکنواخت‌باشد مانند قسمت (a) ویا (b) قابل قبول بوده ولی بهیچوجه برای‌قسمت (c) قابل قبول نخواهدبود بنابراین باید رابطه‌ای که درقسمت (c) صادق باشد پیدا نمود .

خلاصه آنالیز و حل این مسئله

الف ـ بوجودآوردن یك قانون کلی برای‌فنر که نیرورا درهر نقطه نسبت به‌تغیر شکل‌نسبی (Strain) تعین نماید .

ب ـ بوجود آوردن معادله دیفرانسیلی ازقانون نیوتون برای تغییرمکان فنر برحسب زمان ومحل فنر بادرنظر گرفتن نیروی استهلاکی (Damping forcc)



a ـ حالت استاتیک بدون بار

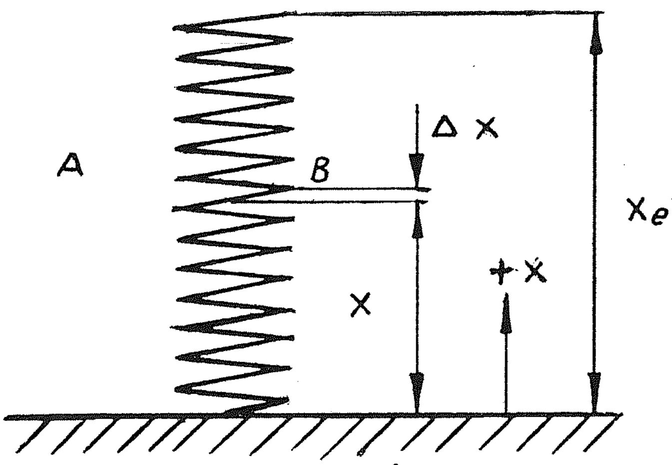
b ـ درحالت سرعت کم تحت اثربارسیکلی

c ـ درحالت سرعت زیاد تحت اثربارسیکلی

شکل شماره ۳

ج ـ تعیین کردن مقادیرمرزی برای این مسئله .

د ـ معادله دیفرانسیلی رابطورعمومی حل نموده وبا استفاده ازحل بدست آمده مقدارتغییر نیرو را نسبت به $(Fe)_0$ تعین مینمائیم .



شکل شماره ۴

الف ـ قانون کلی فنرها

X محورمختصات برای تعین محل هر نقطه مانند A نسبت به سطح ثابت و X_e مقدار X برای انتهای فنردرحالت آزاد درنظر گرفته میشود .

در اینجا میتوان عوامل زیررا بسادگی فرض نمود .

۱. قطرمارپیچ فنریکنواخت بوده جنس مفتول و قطر آن نیزیکنواخت باشد . و گام

پیچیدن فنر درتمام طول یکسان باشد .

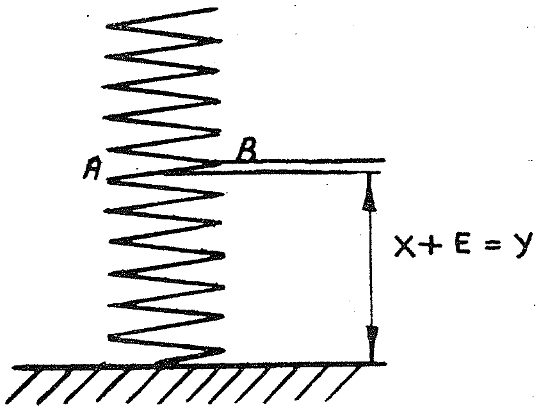
۲ . اثر جاذبه راصرفنظر مینمائیم

۳ . حرکت هرذره فنر درجهت طول بوده وحرکت عرضی وجود نداشته باشد.

۴ . نیروی‌استهلاکی (Damping Force) متناسب است با نرخ تغییرطول نسبت به زمان

۵ . تمام تغییرات طول کم بوده یعنی چنانکه نقطه A بطرف بالا وپائین حرکت میکند تغییرمکان آن $y(x,t)$ میشود.

$$y = X + E \qquad (۳)$$



شکل شماره ۵

که فقط E تابعی از زمان بوده و $\left|\frac{E}{x}\right| \ll 1$ میباشد .

حال اگرحالت تغییرمکان داده شده فنر را درنظربگیریم

اگرتغییر مکان نقطه A درهرلحظه از زمان E باشد حال‌ببینیم که تغیرمکان درنقطه B درهمان لحظه چیست .

$$E(X+\Delta X,t) = E(X,t) + \Delta X\frac{\partial E}{\partial X} + \frac{1}{2!}(\Delta X)^2\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \cdots$$

$$\text{تغییرمکان نقطه B} = X + \Delta X + E + \Delta X\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{2!}(\Delta X)^2\frac{\partial^2 E}{\partial X^2} + \cdots$$

$$\text{تغییر مکان B} - \text{تغییرمکان A} = \Delta X + \Delta X\frac{\partial E}{\partial X} + \frac{1}{2!}(\Delta X)^2\frac{\partial^2 E}{\partial X^2} + \cdots$$

$$\text{تغییرمکان B} - \text{تغییرمکان A} = \Delta X\left[1 + \frac{\partial E}{\partial X} + \frac{1}{2!}(\Delta X)\frac{\partial^2 E}{\partial X^2} + \cdots\right] \qquad (۴)$$

بنا براین تغییرمکان AB درجهت عمودی برابرمیشود

$$\Delta X\left[\frac{\partial E}{\partial X} + \frac{1}{2!}(\Delta X)\frac{\partial^2 E}{\partial X^2} + \cdots\right] \qquad (4a)$$

$$\text{تغییرمکان برواحدطول فنر} = \frac{\Delta X\left[\frac{\partial E}{\partial X} + \frac{1}{2!}(\Delta X)\frac{\partial^2 E}{\partial X^2} + \cdots\right]}{\Delta X}$$

$$\text{تغییرمکان برواحد طول‌فنر} = \frac{\partial E}{\partial X} + \frac{1}{2!}(\Delta X)\frac{\partial^2 E}{\partial X^2} + \cdots \qquad (۵)$$

نیروی درنقطه A درلحظه موردبحث خواهد شد $F(x,t)$ ونیروی درB برای همان‌لحظه‌برابراست با

$$F + \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)\Delta X + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)(\Delta X)^2 + \cdots$$

این نیروبین F و $F + \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)\Delta X$ یك واحد تغییرطول برابرمقدار زیر بوجود میآورد

$$\frac{\partial E}{\partial X} + \frac{1}{2!}(\Delta X)\frac{\partial^2 E}{\partial X^2} + \frac{1}{3!}(\Delta X)^2\frac{\partial^3 E}{\partial X^3} + \cdots$$

در اینجا میتوان دید که برای فنر ومیله الاستیکی هردومقدار نیرو متناسب است با تغییر طول

$$F+ (\frac{\partial F}{\partial X})\Delta X+\frac{1}{2!}(\frac{\partial F}{\partial X})(\Delta X)^2+\dots=$$

$$K\left[\frac{\partial E}{\partial X}+\frac{1}{2!}(\Delta X)\frac{\partial^2 E}{\partial X^2}+\frac{1}{3!}(\Delta X)^2\frac{\partial^3 E}{\partial X^3}+\dots\right] \qquad (۶)$$

بااجازه دادن $\Delta X\to o$ یعنی تمام مشتق‌های نسبی در نقطه A گرفته شود و F در نقطه A بـاشد. بنابراین

$$F_A=K(\frac{\partial E}{\partial X})_A \qquad (۷)$$

واگر F درجهت X ثابت باشد حالت مخصوصی بوجود میآید که.

$$F=F(t)$$

وبرای طول انتگرال گرفته خواهیم داشت

$$\int_o^{X_e} F(t)\partial X = \int_o^{E_e} K\partial E \qquad (۸)$$

که K مقدارثابتی درحلقه میباشد

$$X_eF(t)=KE_e$$

و یا

$$F(t)=K\frac{E_e}{X_e}=(\frac{K}{X_e})E_e=(\frac{K}{X})E \qquad (۹)$$

که مقدار E_e تغییرمکان انتهای فنرمیباشد

ب ـ معادله دیفرانسیل حرکت المان فنر:

اگرالمان AB را درشکل 5 درنظربگیریم. مادرقسمت قبل دیدیم که نیرو درفنرتابعی است ازمحل نقطه در فنر که بوسیله X و زمان t معلوم میشود. تغییرمکان E نیزهمچنین تابعی‌است از X و t. وشتاب AB رابوسیله نیروی وارده بر AB میتوان تعین نمود. که نیرو در A برابر است با.

بطرف پائین

$$F_A=K(\frac{\partial E}{\partial X})_A \qquad (۱۰)$$

ازرابطه (7) نیرو در B بدست میآید

بطرف بالا

$$F_B=F_A+(\frac{\partial F_A}{\partial X})_A\Delta X+\dots \qquad (۱۱)$$

مقدار استهلاك متناسب است بانرخ تغییر در تغییر مکان نسبت به زمان (که بستگی به داخل جسم یا بستگی به ساختمان آن خواهدداشت)

از رابطه (4a) تغییرمکان AB میشود.

$$\Delta x\left[\frac{\partial E}{\partial X}+\dots\right]$$

ونرخ تغییر این‌مقدار میشود:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\partial X(\frac{\partial E}{\partial X}+\dots)\right]=\Delta X\,(\frac{\partial^2 E}{\partial X\partial t}+\dots$$

واگر ضریب استهلاك را بنام μ بنامیم خواهیم داشت .

$$\mu\left(\frac{\partial^2 E}{\partial X\partial t}+\cdots\cdot\right)\Delta X \quad \text{نیروی استهلاکی} \qquad (۱۲)$$

این نیروی همان نیروی استهلاکی است که در جهت مخالف نیروی فنر اثرمینماید یعنی درجهت $\left(-\frac{\partial E}{\partial X}\right)$.

تغییرمکان جرم فنر (شکل ۵) بین μ و $y+\Delta y$ خواهد بود که مقدار متوسط آن $y+\frac{\Delta y}{2}$ خواهد شد. با درنظر گرفتن قانون دوم نیوتون خواهیم داشت .

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)M\Delta X=\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_A\Delta X+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)(\Delta X)^2+\cdots\cdot$$

$$-\mu\left(\frac{\partial^2 E}{\partial X\partial t}+\cdots\cdot\right)\Delta X \qquad (۱۳)$$

و چون

$$y\equiv x+E$$

و X هم تابعی از زمان نمیباشد ، میتوان گفت :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(E+\frac{\Delta y}{2}\right)\right]M\Delta X=\frac{\partial F}{\partial X}\Delta X+\cdots\cdot-\mu\left(\frac{\partial^2 E}{\partial X\partial t}+\cdots\cdot\right)\Delta X \qquad (۱۴)$$

حال اگر $\Delta x\to o$ مقدار Δy نیزمیل بصفرمینماید $(\Delta y\to o)$ وبقیه حالت فنررا برای نقطه A (یعنی هرنقطه). وباید متذکرشد که $\Delta x\neq o$ خواهد بود.

$$M\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial X}\left[K\frac{\partial F}{\partial X}\right]-\mu\frac{\partial^2 E}{\partial X\partial t} \qquad (۱۵)$$

که برای فنری که مقدار K آن نیزمتغیرباشد صادق خواهد بود.

واگر K برای تمام طول فنریکسان باشد که معمولا اینطور فرض میشود رابطه (15) چنین‌خواهد شد و درآن :

$$\boxed{M\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=K\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}-\mu\frac{\partial^2 E}{\partial x\partial t}}$$

که این رابطه معادله موجی میباشد که باحل‌آن مشخصات فنررانسبت به زمان درهرسرعتی بدرستی میدهد . ودرآن :

M = جرم برواحد طول فنر آزاد .

E = تغییرمکان هرذره فنرازمبدأ آزاد آن

K = ضریب فنریت .