روش محاسبه تیرهای سرتاسری روی تکیه گاههای ارتجاعی

از : ابراهیم چینی‌فروش

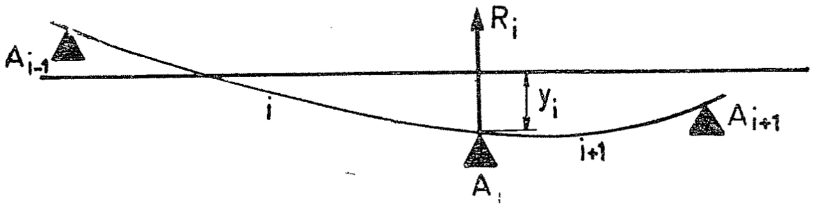
مقدمه

تیر های سرتاسری روی تکیه گاههای ارتجاعی موارد استعمال بسیاری دارند، ازآن جمله درمحاسبه تیرهای پل‌های بتن‌مسلح ، فلزی وبتن پیش فشرده وهمچنین‌سقف هائی که ازتیرهای متقاطع تشکیل میشوند (Poutres Croisees) وشبکه ها (Grillage) و دال‌هائی که شکل‌هندسی منظمی نداشته توسط این متد به تیرهای فرضی در دوجهت تبدیل نموده وعکس‌العمل‌ها را حساب می کنند .

تعریف ـ تکیه گاه ارتجاعی به تکیه گاههائی گفته میشود که عکس‌العمل در آن نقطه متناسب باتغییر مکان در آن محل باشد ، این ضریب تناسب را ضریب سختی مشخصه تکیه گاه می‌نامند . یا بعبارت دیگر $y_i = -K_i R_i$ (۱) می‌باشد .

در این رابطه y_i تغییر محل نقطه i (تکیه گاه A_i) . و R_i عکس‌العمل در آن تکیه گاه و K_i ضریب تناسب می‌باشد .

معادلات پنج لنگری ـ تیر سرتاسری شکل زیررا درنظر می گیریم :



دراثر نیروی خارجی عکس‌العمل درتکیه گاه A_i برابر است با :

$$R_i = R'_i + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_{i+1}} - \frac{M_i - M_{i-1}}{l} \qquad (2)$$

که دراین‌رابطه R'_i عکس‌العمل‌درحالت تیرروی دوتکیه گاه‌آزاد است.

M_{i-1} ، M_i و M_{i+1} به ترتیب ممانها درنقاط A_{i-1} ، A_i و A_{i+1} می‌باشد .

و l_i دهانه تیر بین‌نقاط A_i و A_{i-1} و l_{i+1} دهانه تیربین A_i و A_{i+1} است .

تغییر محل حاصله از این عکس العمل در تکیه گاه i از رابطه(۱) برابر است با :

$$(3)\quad \begin{cases} y_i=-K_i\cdot R_i=-K_i(R'_i+\frac{M_{i+1}-M_i}{l_{i+1}}-\frac{M_i-M_{i-1}}{l_i}) \\ y_{i-1}=-K_{i-1}R_{i-1}=-K_{i-1}(R'_{i-1}+\frac{M_i-M_{i-1}}{l_i}-\frac{M_{i-1}-M_{i-2}}{l_{i-1}}) \\ y_{i+1}=-K_{i+1}R_{i+1}=-K_{i+1}(R'_{i+1}+\frac{M_{i+2}-M_{i+1}}{l_{i+2}}-\frac{M_{i+1}-M_i}{l_{i+1}}) \end{cases}$$

باقراردادن مقادیر y_i ، y_{i-1} و y_{i+1} درمعادله کلاسیك سه لنگری زیر :

$$b_i\cdot M_{i-1}+(c_i+a_{i+1})M_i+b_{i+1}\cdot M_{i+1}=\omega'_{i+1}-\omega''_i+\frac{y_{i+1}-y_i}{l_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-1}}{l_i}\ ☆$$

خواهیم داشت :

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{K_{i-1}}{l_{i-1}l_i}M_{i-2}+\left[b_i-\frac{K_{i-1}}{l_i}(\frac{1}{l_{i-1}}+\frac{1}{l_i})-\frac{K_i}{l_i}(\frac{1}{l_i}+\frac{1}{l_{i+1}})\right]M_{i-1} \\ +\left[c_i+a_{i+1}+\frac{K_{i-1}}{l_i^2}+K_i(\frac{1}{l_i}+\frac{1}{l_{i+1}})^2+\frac{K_{i+1}}{l^2_{i+1}}\right]M_i \\ +\left[b_{i+1}-\frac{K_i}{l_{i+1}}(\frac{1}{l_i}+\frac{1}{l_{i+1}})-\frac{K_{i+1}}{l_{i+1}}(\frac{1}{l_{i+1}}+\frac{1}{l_{i+2}})\right]M_{i+1}+\frac{K_{i+1}}{l_{i+1}\,l_{i+2}}\cdot M_{i+2}= \\ \omega'_{i+1}-\omega''_i-\frac{K_{i-1}}{l_i}R'_{i-1}+K_i(\frac{1}{l_i}+\frac{1}{l_{i+1}})R'_i-\frac{K_{i+1}}{l_{i+1}}R'_{i+1} \end{cases}$$

برای خلاصه کردن معادله بالا پارامترهای زیررا درنظرمیگیریم :

$$(6)\quad \begin{cases} \alpha_i=c_i+a_{i+1}+\frac{K_{i-1}}{l_i^2}+K_i(\frac{1}{l_i}+\frac{1}{l_{i+1}})^2+\frac{K_{i+1}}{l^2_{i+1}} \\ \beta_i=b_i-\frac{K_{i-1}}{l_i}(\frac{1}{l_{i-1}}+\frac{1}{l_i})-\frac{K_i}{l_i}(\frac{1}{l_i}+\frac{1}{l_{i+1}}) \\ \gamma_i=\frac{K_i}{l_i\cdot l_{i+1}} \\ \Delta_i=\omega'_{i+1}-\omega''_i-\frac{K_{i-1}}{l_i}R'_{i-1}+K_i(\frac{1}{l_i}+\frac{1}{l_{i+1}})R'_i-\frac{K_{i+1}}{l_{i+1}}R'_{i+1} \end{cases}$$

با درنظر گرفتن روابط (6) معادله (5) بصورت زیر درمیآید :

$$\underline{\gamma_{i-1}M_{i-2}+\beta_i M_{i-1}+\alpha_i M_i+\beta_{i+1}M_{i+1}+\gamma_{i+1}M_{i+2}=\Delta_i}\qquad (7)$$

رابطه فوق معادله پنج ممان نامیده میشود.

☆ دراین رابطه a و b و c ضرائب مشخصه ثابت تیر میباشند . ω'_{i+1} و ω''_i زوایای دوران تیر در نقطه i بوده ونیز $\frac{y_{i+1}-y_i}{l_{i+1}}$ و $\frac{y_i-y_{i-1}}{l_i}$ زوایای حاصله ازتغییرمحل تکیه گاهای i-1 و i و i+1 میباشند.

درحالت کلی ضرائب a و b و c عبارتند از :

$$a=\int_0^l(1-\frac{x}{l})^2\frac{dx}{EI}\qquad b=\int_0^l\frac{x}{l}(1-\frac{x}{l})\frac{dx}{EI}\qquad c=\int_0^l(\frac{y}{l})^2\frac{dx}{EI}$$

درحالت تیر با ممان اینرسی ثابت ضرائب فوق بصورت ساده زیردرمیآیند:

$$a=2b=c=\frac{l}{3EI}$$

اگر در رابطه فوق بجای i مقدار عددی آنرا قراردهیم خواهیم داشت :

$$
(8)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\alpha_o M_o + \beta_1 M_1 + \gamma_2 M_2 = \Delta_o & \text{تکیه گاه } A_o \\
\beta_1 M_o + \alpha_1 M_1 + \beta_2 M_2 + \gamma_2 M_3 = \Delta_1 & \text{« } A_1 \\
\gamma_1 M_o + \beta_2 M_1 + \alpha_2 M_2 + \beta_3 M_3 + \gamma_3 M_4 = \Delta_2 & \text{« } A_2
\end{array}
\right.
$$

همچنین برای دهانه های آخری داریم :

$$
(9)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\gamma_{n-3} M_{n-4} + \beta_{n-2} M_{n-3} + \alpha_{n-2} M_{n-2} + \beta_{n-1} M_{n-1} + \gamma_{n-1} M_n = \Delta_{n-2} & \text{تکیه گاه } A_{n-2} \\
\gamma_{n-2} M_{n-3} + \beta_{n-1} M_{n-2} + \alpha_{n-1} M_{n-1} + \beta_n M_n = \Delta_{n-1} & \text{« } A_{n-1} \\
\gamma_{n-1} M_{n-2} + \beta_n M_{n-1} + \alpha_n M_n = \Delta_n & \text{» } A_n
\end{array}
\right.
$$

با درنظر گرفتن معادلات (8) و (9) ملاحظه میشود به تعداد مجهولات معادله وجود دارد.

ضرائب α و β و γ و Δ در روابط فوق بادرنظر گرفتن‌ضرائب گیرداری ارتجاعی تکیه گاههای کناری (h_o و h_n) بصورت زیر درمیآیند : (مراجعه شود به روابط (6))

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\alpha_o = h_o + a_1 + \dfrac{K_o + K_1}{l^2_1} \\
\alpha_1 = c_1 + a_2 + \dfrac{K_o}{l^2_1} + K_1 \left(\dfrac{1}{l_1} + \dfrac{1}{l_2} \right)^2 + \dfrac{K_2}{l^2_2} \\
-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\
\alpha_{n-1} = c_{n-1} + a_n + \dfrac{K_{n-2}}{l^2_{n-1}} + K_{n-1} \left(\dfrac{1}{l_{n-1}} + \dfrac{1}{l_n} \right)^2 + \dfrac{K_n}{l^2_n} \\
\alpha_n = c_n + h_n + \dfrac{K_{n-1} + K_n}{l^2_n}
\end{array}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\beta_1 = b_1 - \dfrac{K_o}{l^2_1} - \dfrac{K_1}{l_1} \left(\dfrac{1}{l_1} + \dfrac{1}{l_2} \right) \\
\beta_2 = b_2 - \dfrac{K_1}{l_2} \left(\dfrac{1}{l_1} + \dfrac{1}{l_2} \right) - \dfrac{K_2}{l_2} \left(\dfrac{1}{l_2} + \dfrac{1}{l_3} \right) \\
-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\
\beta_{n-1} = b_{n-1} - \dfrac{K_{n-2}}{l_{n-1}} \left(\dfrac{1}{l_{n-2}} + \dfrac{1}{l_{n-1}} \right) - \dfrac{K_{n-1}}{l_{n-1}} \left(\dfrac{1}{l_{n-1}} + \dfrac{1}{l_n} \right) \\
\beta_n = b_n - \dfrac{K_{n-1}}{l_n} \left(\dfrac{1}{l_{n-1}} + \dfrac{1}{l_n} \right) - \dfrac{K_n}{l^2_n}
\end{array}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\gamma_1 = \dfrac{K_1}{l_1 l_2} \\
\gamma_2 = \dfrac{K_2}{l_2 l_3} \\
-\,-\,-\,- \\
\gamma_{n-2} = \dfrac{K_{n-2}}{l_{n-2} l_{n-1}} \\
\gamma_{n-1} = \dfrac{K_{n-1}}{l_{n-1} l_n}
\end{array}
\right.
$$

$$\begin{cases} \Delta_o = \omega'_1 + \frac{K_o}{l_1} R'_o - \frac{K_1}{l_1} R'_1 \\ \Delta_1 = \omega'_2 - \omega''_1 - \frac{K_o}{l_1} R'_o + K_1\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) R'_1 - \frac{K_2}{l_2} R'_2 \\ -------------------------- \\ \Delta_{n-1} = \omega'_n - \omega''_{n-1} - \frac{K_{n-2}}{l_{n-1}} R'_{n-2} + K_{n-1}\left(\frac{1}{l_{n-1}} + \frac{1}{l_n}\right) R'_{n-1} - \frac{K_n}{l_n} R'_n \\ \Delta_n = -\omega''_n - \frac{K_{n-1}}{l_n} R'_{n-1} + \frac{K_n}{l_n} R'_n \end{cases}$$

حالت خاص ـ در این حالت تیر سرتاسری با ممان اینرسی ثابت و دهانه های مساوی و تکیه گاههای یکسان‌فرض میشوند . ضرائب ثابت a و b و c مستقل‌از دهانه مورد نظر بوده ومساوی مقادیرزیر می‌باشند :

$$(10)\quad a = 2b = c = \frac{l}{3EI}$$

دراین‌صورت داریم :

$$(11)\quad \begin{cases} \alpha = 4b + \frac{6K}{l^2} \\ \beta = b - \frac{4K}{l^2} \\ \gamma = \frac{K}{l^2} \end{cases}$$

$$(12)\quad \delta = \frac{K}{bl^2} = \frac{6EIK}{l^3}$$

بادرنظر گرفتن روابط 10 و 11 و 12 معادلات پنج لنگری بصورت زیردرمیایند.

$$(13)\quad \delta M_{i-2} + (1-4\delta)\, M_{i-1} + (4+6\delta) M_i + (1-4\delta)\, M_{i+1} + \delta M_{i+2} = \frac{6EI}{l} \Delta_i$$

دراین‌حالت مقدار Δ_i را میتوان از رابطه زیر حساب کرد :

$$(14)\quad \Delta_i = -\frac{1}{EI}\int_0^l \xi_i \frac{x}{l} dx - \frac{1}{EI}\int_0^l \xi_{i+1}\left(1-\frac{x}{l}\right) dx - \frac{K}{l}\left(R'_{i-1} - 2R'_i + R'_{i+1}\right)$$

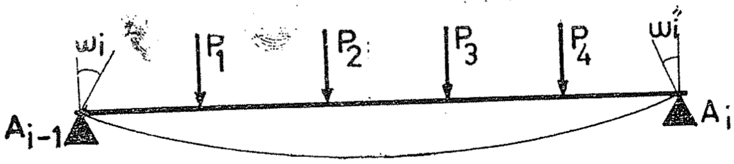
در رابطه فوق ξ_i ممان تیر در روی تکیه گاه ساده می‌باشد .

درشرائط فوق معادله 13 بصورت زیر درمیآید :

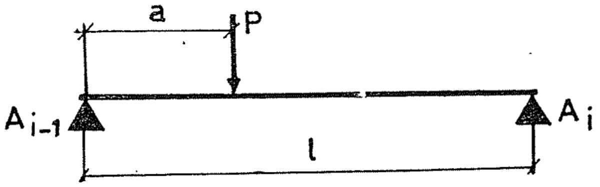
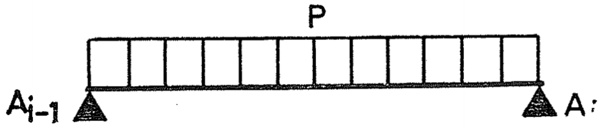
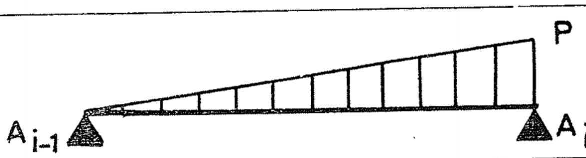
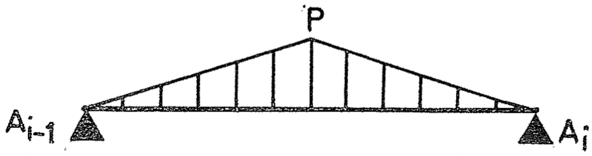
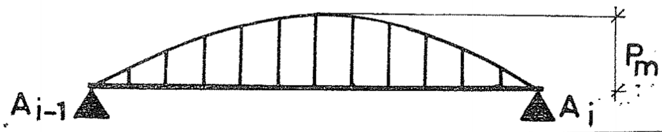
$$\delta M_{i-2} + (1-4\delta) M_{i-1} + (4+6\delta) M_i + (1-4\delta) M_{i+1} + \delta M_{i+2} =$$
$$-\frac{6}{l}\int_0^l \xi_i \frac{x}{l} dx - \frac{6}{l}\int_0^l \xi_{i+1}\left(1-\frac{x}{l}\right) dx - \delta l\left(R'_{i-1} - 2R'_i + R'_{i+1}\right)$$

ضمیمه

1ـ ω'_i و ω''_i زوایای حاصله از بارهای وارده درتیر روی دوتکیه گاه ساده می‌باشند .



۲ـ مقادیر $\int_{0}^{l} \xi_i \frac{x}{l} dx$ و $\int_{0}^{l} \xi_i \left(1-\frac{x}{l}\right) dx$ برای بار های کلاسیك در جدول زیر خلاصه میشوند :

	ω'_i	ω''_i
	$\frac{Pa}{6EIl}(l-a)(2l-a)$	$-\frac{Pa}{6EIl}(l^2-a^2)$
	$\frac{Pl^3}{24EI}$	$-\frac{Pl^3}{24EI}$
	$\frac{7Pl^3}{360EI}$	$-\frac{8Pl^3}{360EI}$
	$\frac{5Pl^3}{96EI}$	$-\frac{5Pl^3}{96EI}$
	$\frac{P_m l^3}{30EI}$	$-\frac{P_m l^3}{30EI}$

برای تنظیم این‌مقاله از کتابهای مقاومت مصالح :

M. Professeur J. Courbon
MM. P. Lebelle et M. Albiges

استفاده شده است .