

خمش ورق‌های لایه ای با شرایط مرزی مختلف بر مبنای

تئوری برش مرتبه بالا

حسین رجایی^۱؛ مژگان یعقوب شاهی^۲؛

چکیده

در این مقاله خمش ورق‌های اورتوتروپیک بر مبنای تئوری تغییر شکل‌های برشی عرضی مرتبه بالا (Higher Order Transverse Shear Deformation Theory) بررسی می‌شود. با استفاده از روش کار مجازی هفت معادله حاکم و شرایط مرزی متناظر و هجده معادله ساختاری بدست آورده می‌شود. مجموع این معادلات، تشکیل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه اول خطی را می‌دهند. برای حل عددی این معادلات از روش دیفرانسیل کوادرچر تعمیم یافته (General Differential Quadrature) یا GDQ استفاده می‌شود. برای بررسی صحت روش معرفی شده نتایج عددی ورق اورتوتروپ با تکیه گاه ساده و لبه آزاد آورده شده است.

کلمات کلیدی

ورق‌های لایه ای، تئوری تغییر شکل‌های برشی عرضی مرتبه بالا، روش دیفرانسیل کوادرچر تعمیم یافته

Bending of the Laminated Plates with Various Boundary Conditions Based on Higher Order Shear Deformation Theory (HSDT)

H. Rajaie; M. Yaghoobshahi

ABSTRACT

Bending of the orthotropic plates based on higher order transverse shear deformation theory (HSDT) is considered. The principle of virtual work method is used to derive seven governing equations and corresponding boundary conditions. These equations and eighteen relationships between resultant stress and displacement components comprise a "first order partial differential equations". The equations are solved by General Differential Quadrature (GDQ) method. Numerical results are obtained for plates with simply supported boundary conditions and free edges to verify the proposed method.

KEYWORDS

Laminated plates, Higher order transverse Shear Deformation Theory (HSDT), General Differential Quadrature method (GDQ).

این مواد به خاطر برخی خواص ویژه خود از جمله نسبت مقاومت به وزن بالا، عمر خستگی طولانی، و مقاومت بالا در برابر خوردگی بسیار مفید هستند. مطالعات زیادی بر روی ورق‌های کامپوزیت انجام شده و در این زمینه تئوری‌های مختلفی وجود دارد. یکی از این تئوری‌ها، تئوری کلاسیک

۱- مقدمه

امروزه مواد لایه‌ای مرکب در رشته‌های مختلف مهندسی نظیر عمران، هوافضا، مکانیک، مهندسی هسته‌ای، بطور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرند.

^۱ دانشیار دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست دانشگاه صنعتی امیرکبیر rajaie@aut.ac.ir

^۲ مژگان یعقوب شاهی دانشجوی کارشناسی ارشد سازه دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست دانشگاه صنعتی امیرکبیر

moyaeng@gmail.com

ورق‌ها (CLT^1) بر مبنای فرضیات کیرشهف است. که بیان می‌کند خطوط عمود بر سطح میانی ورق قبل و بعد از تغییرشکل، عمود بر این سطح هستند و هیچ گونه تغییر طولی نیز ندارند. بدلیل حذف اثر تنش‌های برشی عرضی، این تئوری، خطای غیرقابل قبولی را حتی در ورق‌های نازک لایه‌ای ایجاد می‌کند. بررسی و مروری بر کارهای انجام شده در زمینه تئوری کلاسیک را می‌توان در کارهای نقدی (Naghdi) و برت (Bert) یافت [۵-۶-۱۲].

توسعه در زمینه تئوری ورق‌ها با در نظر گرفتن اثر تنش برشی عرضی تا حد زیادی دقت نتایج را افزایش داد. رایزنر (Reissner) اولین کسی بود که اثر تغییرشکل‌های برشی عرضی را در تحلیل استاتیکی ورق‌ها لحاظ کرد [۱۵]. بعد از رایزنر، مندلین (Mindlin) تئوری وی را برای آنالیز دینامیکی ورق‌ها توسعه داد [۱۱]. هر دو تئوری، بر مبنای تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول (FSDT) هستند. تئوری رایزنر بر مبنای تنش و تئوری مندلین بر مبنای تغییر مکان است. به طور کلی تئورهای (FSDT) شرط صفر بودن تنش برشی در سطوح بالا و پایین ورق را ارضا نمی‌کنند و یک تنش برشی عرضی یکنواخت را در ضخامت ورق در نظر می‌گیرند. بنابراین برای کم کردن خطای ناشی از این فرض در این تئوری‌ها، از ضریب اصلاح برش استفاده می‌شود.

بعد از تئوری‌های (FSDT) رایزنر و مندلین، گروه جدیدی از تئوری‌ها به نام تئوری تغییرشکل‌های برشی مرتبه بالا (HSDT) توسط تعدادی از محققین پیشنهاد شد. به نظر می‌رسد بست (Basset) [۳] اولین کسی بود که برای اولین بار پیشنهاد کرد که میدان جابجایی می‌تواند به صورت سری‌های توانی برحسب پارامتر ضخامت بسط داده شود. تئوری برشی موجود در کار ردی (Reddy) یک تئوری مرتبه بالاست که در آن جابجایی‌ها در پوسته به صورت یک تابع مرتبه سه برحسب مختصه ضخامت بسط داده شده است [۱۴]. تئوری (HSDT) بسیار پیچیده بوده و برای حل آنها محاسبات ریاضی، بسیار طولانی لازم است. بکارگیری این تئوری‌ها اغلب منجر به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای می‌شود [۱۴]. این معادلات معمولاً با روش‌های عددی حل می‌شوند. تاکنون مطالعات زیادی در زمینه حل عددی این معادلات انجام شده است. یکی از روش‌های بکار گرفته شده روش دیفرانسیل کوادرچر (DQ) می‌باشد. مزیت این روش آن است که نتایج با تعداد نقطه کمتری از روش‌های دیگر همگرا می‌شوند.

این روش ابتدا، توسط بلمن (Bellman) در سال ۱۹۷۲ مطرح شد [۴]. روش DQ مفهوم انتگرال کلاسیک کوادرچر را

در بر می‌گیرد. بلمن دو روش را برای تعیین ضرایب وزنی از مشتق مرتبه اول بکار گرفت. استفاده از حل دستگاه معادله جبری، یکی از راه‌های پیشنهادی بلمن است که برای بدست آوردن ضرایب وزنی برای تعداد زیاد نقاط شبکه مشکل ساز است، از اینرو کوآن (Quan) و چانگ (Chang) از چند جمله‌ای‌های درون یابی لاگرانژ استفاده کردند. بطور کلی‌تر، شو (Shu) و ریچارد (Richards) و شو دیفرانسیل کوادرچر تعمیم یافته (GDQ) را ارائه کردند [۱۸-۱۷-۱۳].

اولین کاربرد روش DQM در مسائل مکانیک سازه، توسط برت (Bert) و همکارانش [۷] به انجام رسید. پس از آن مسائل مختلف مکانیک سازه توسط محققین [۱۹] و [۱۶]، [۸] انجام شد. در اکثر مطالعات یاد شده تحلیل‌های انجام شده مربوط به تئوری ورق‌های نازک می‌باشد [۱۹] و [۱۶]، [۸]، [۷]. هان (Han) و لیو (Liew) در سال ۱۹۹۷ تحقیقی در خصوص تحلیل خمش ورق ایزوتروپیک دایره ای ضخیم با بارگذاری و شرایط مرزی مختلف انجام دادند [۹]. امروزه این روش در حل مسائل مربوط به ورق‌ها و پوسته‌ها به صورت گسترده ای مورد استفاده قرار می‌گیرد. در یک کار کلی، هانگ (Huang) و لی (Li) خمش و کمانش ورق بر مبنای تئوری (FSDT) را با استفاده از روش دیفرانسیل کوادرچر بررسی نموده‌اند [۱۰]. همچنین اقدم (Aghdam) و همکاران نیز این روش را برای بررسی خمش در ورق با شرایط مرزی مختلف، استفاده نموده‌اند [۲].

در مطالعه حاضر، برای تحلیل خمش در ورق‌های لایه ای از تئوری تغییرشکل‌های برشی عرضی مرتبه بالا (HSDT) استفاده می‌شود. در روند استخراج فرمول‌ها، دو متغیر مستقل علاوه بر مولفه‌های جابجایی مورد بررسی در کارهای قبل، معرفی می‌شود و در ساختار معادلات بکار گرفته می‌شود. این تکنیک باعث می‌شود کل معادلات حاکم بر ورق، تبدیل به معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول شوند در صورتی که در کارهای قبلی در زمینه تئوری برش مرتبه بالا، تعدادی از معادلات دیفرانسیل مرتبه دو هستند، همچنین بکارگیری این تکنیک اعمال شرط مرزی لبه آزاد را در تئوری (HSDT) ساده‌تر می‌کند.

۲- روابط تعادل و ساختاری

یک ورق مربعی با مرزهایی در راستای محورهای مختصات α_1 و α_2 در نظر گرفته می‌شود. اصل کار مجازی برای تعادل یک جسم با مرزهای S و حجم V ایجاب می‌کند که رابطه (۱) برقرار شود:

$$\varepsilon_{ii} = \varepsilon_i^0 + \zeta \kappa_i^0 + \zeta^2 \kappa_i^2,$$

$$\varepsilon_{nn} = \frac{\partial w}{\partial \zeta},$$

$$\gamma_{in} = \lambda_i^0 + \zeta^2 \eta_i^2,$$

$$\gamma_{ij} = \gamma_i^0 + \zeta \mu_i^0 + \zeta^2 \mu_i^2 + \gamma_j^0 + \zeta \mu_j^0 + \zeta^2 \mu_j^2. \quad (8)$$

که توابع سمت راست معادله (8) به شکل زیر هستند:

$$\varepsilon_i^0 = \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i}, \quad \kappa_i^0 = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_i},$$

$$\kappa_i^2 = -R' \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (w_i + \varphi_i), \quad \lambda_i^0 = \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + \varphi_i,$$

$$\eta_i^1 = -rR' (w_i + \varphi_i), \quad \gamma_i^0 = \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i},$$

$$\mu_i^0 = \frac{\partial \varphi_j}{\partial \alpha_i}, \quad \mu_i^2 = -R' \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (w_j + \varphi_j). \quad (9)$$

شایان ذکر است که در معادله (9) دو تابع مجهول $w_i = \partial w / \partial \alpha_i$ معرفی شده است. مولفه های برابند تنش به

شکل رابطه (10) تعریف می شود:

$$\begin{aligned} & [N_i \quad N_{ij} \quad N_{in} \quad M_i \quad M_{ij} \quad M_{in} \quad P_i \quad P_{ij} \quad P_{in} \quad S_i \quad S_{ij}]^T \\ & = \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_i \quad \tau_{ij} \quad \tau_{in} \quad \zeta \sigma_i \quad \zeta \tau_{ij} \quad \zeta \tau_{in} \quad \zeta^2 \sigma_i \\ & \quad \zeta^2 \tau_{ij} \quad \zeta^2 \tau_{in}]^T d\zeta. \end{aligned} \quad (10)$$

که T علامت ترانواده یک ماتریس می باشد. بار اعمال شده بر سطح میانی ورق به صورت رابطه (4) تعریف می شود:

$$q = q_1 e_1 + q_2 e_2 - q_n e_n \quad (11)$$

که e_1 و e_2 و e_n به ترتیب بردارهای یکه در راستای محورهای اصلی و محور نرمال ورق می باشند.

فرض می شود $\bar{\sigma}_i$ ، $\bar{\tau}_{ij}$ و $\bar{\tau}_{in}$ مولفه های بردار تنش بر لبه $\alpha_i = \text{ثابت}$ ، باشد. کار انجام شده توسط بارهای خارجی برابر است با:

$$\begin{aligned} \delta w_{ext} = & \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} (q_1 \delta u_1 + q_2 \delta u_2 - q_n \delta w) d\alpha_1 d\alpha_2 \\ & + \int_{\alpha_j} \int_{-h/2}^{h/2} (\bar{\sigma}_i \delta U_i + \bar{\tau}_{ij} \delta U_j + \bar{\tau}_{in} \delta W) d\zeta d\alpha_j \end{aligned} \quad (12)$$

که در این رابطه، انتگرال دوم باید در امتداد مرزهای ورق انجام شود. با جایگزینی معادله (7) در (12) و نیز جایگزینی (9) در (8) و حاصل آن در رابطه (1) و با استفاده از تعریف (10)، همچنین در نظر گرفتن $\sigma_{nn} = 0$ ، هفت معادله تعادل و هفت شرط مرزی متناظر با آنها بدست می آید:

$$\int_V \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_S \delta W_{ext} ds = 0 \quad (1)$$

که در آن σ_{ij} مولفه های تنش، $\delta \varepsilon_{ij}$ تغییرات مولفه های کرنش مجازی ایجاد شده توسط جابجایی مجازی و δW_{ext} تغییرات کار مجازی نیروهای خارجی می باشد. با بکار گرفتن تئوری تغییرشکل های عرضی مرتبه بالا، مولفه های جابجایی بر حسب توابعی که تغییرشکل سطح میانی ورق را بیان می کنند به صورت رابطه (2) بیان می شود [7]:

$$\begin{aligned} U_i(\alpha_1, \alpha_2, \zeta) = & u_i(\alpha_1, \alpha_2) + \zeta \varphi_i(\alpha_1, \alpha_2) + \\ & \zeta^2 \psi_i(\alpha_1, \alpha_2) + \zeta^2 \theta_i(\alpha_1, \alpha_2), \quad i = 1, 2 \quad (2) \\ W(\alpha_1, \alpha_2, \zeta) = & w(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned}$$

که در این رابطه، $-h/2 < \zeta < h/2$ متغیر راستای ضخامت می باشد. اندیس های i و j ، مگر در مواردیکه ذکر شود، مقادیر 1 و 2 را اختیار می کنند به شرطی که $i \neq j$ و $n=3$. شرط صفر بودن تنش برشی عرضی در بالا و پایین ورق اعمال می شود بنابراین:

$$\tau_{in}(\alpha_1, \alpha_2, \pm \frac{h}{2}) = 0. \quad (3)$$

برای یک ورق لایه ای تشکیل شده از لایه های اورتوتروپیک شرط بالا معادل است با رابطه (4):

$$\gamma_{in}(\alpha_1, \alpha_2, \pm \frac{h}{2}) = 0. \quad (4)$$

روابط کرنش-جابجایی در مختصات اصلی ورق به شکل روابط (5) بیان می شود:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} = & \frac{\partial U_i}{\partial \alpha_i}, \quad \varepsilon_{nn} = \frac{\partial W}{\partial \zeta}, \\ \gamma_{in} = & \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial U_i}{\partial \zeta}, \quad \gamma_{ij} = \frac{\partial U_j}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial U_i}{\partial \alpha_j}. \end{aligned} \quad (5)$$

از روابط (2)، (4) و (5) بدست می آید:

$$\psi_i = 0, \quad \theta_i = -\frac{r}{2h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + \varphi_i \right). \quad (6)$$

با جایگذاری (6) در (2)، مولفه های جابجایی در راستای ضخامت بر حسب مولفه های جابجایی سطح میانی و مولفه راستای ضخامت ورق، رابطه (7) را ایجاد می کند:

$$\begin{aligned} U_i(\alpha_1, \alpha_2, \zeta) = & u_i + \zeta \varphi_i - \zeta^2 \frac{r}{2h^2} \left(\frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + \varphi_i \right), \\ W(\alpha_1, \alpha_2, \zeta) = & w(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned} \quad (7)$$

معادلات کرنش-جابجایی از جایگذاری (7) در (5) به شکل زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{r0} &= (Q_{00} - Q_{rr})mn \\ \bar{Q}_{1r} &= (Q_{11} - Q_{1r} - 2Q_{rr})m^2n \\ &\quad + (Q_{1r} - Q_{rr} + 2Q_{rr})mn^2 \\ \bar{Q}_{r1} &= (Q_{11} - Q_{1r} - 2Q_{rr})mn^2 \\ &\quad + (Q_{1r} - Q_{rr} + 2Q_{rr})m^2n \\ \bar{Q}_{rr} &= Q_{rr}m^2 + Q_{00}n^2 \\ \bar{Q}_{00} &= Q_{rr}n^2 + Q_{00}m^2\end{aligned}$$

در رابطه (۱۵)، $m = \cos \chi$ ، $n = \sin \chi$ می‌باشد که در آنها χ زاویه بین محورهای اصلی ماده اورتوتروپ و محور α_1 است. ثابت‌های معرفی شده در رابطه (۱۵) بر حسب ثابت‌های مهندسی از روابط زیر بدست می‌آیند

$$\begin{aligned}Q_{11} &= E_{11}/\Delta, & Q_{1r} &= E_{11}\nu_{r1}/\Delta, & Q_{rr} &= E_{rr}/\Delta, \\ Q_{rr} &= G_{rr}, & Q_{00} &= G_{1r}, & Q_{rr} &= G_{1r}.\end{aligned}\quad (16)$$

که در آنها $\Delta = 1 - \nu_{1r}\nu_{r1}$ می‌باشد. جایگزین نمودن (۸) در (۱۴) و نتیجه آنها در (۱۰) و انجام انتگرال موجود در راستای ضخامت، به معادلاتی منجر می‌شود که مبین رابطه بین مولفه‌های برآیند تنش و مولفه‌های کرنش می‌باشند. حال اگر در این معادلات مقادیر مولفه‌های کرنش بر حسب مولفه‌های جابجایی از روابط (۹) جایگزین شوند، معادلات مربوط به مولفه‌های برآیند تنش بر حسب مولفه‌های جابجایی بدست می‌آیند. این معادلات و معادلات (۱۳) یک دستگاه شامل ۲۵ معادله دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه اول را برای جابجایی‌ها و مولفه‌های تغییرشکل تشکیل می‌دهند.

$$\begin{aligned}[K]\{u_1, u_r, w, \phi_1, \phi_r, w_1, w_r, N_1, N_{1r}, \\ M_1, M_{1r}, M_r, P_1, P_r, P_{1r}, S_1, S_{1r}, S_r, \\ N_r, N_{1n}, N_{rn}, M_{1n}, M_{rn}, P_{1n}, P_{rn}\}^T \\ = \{-q_1, -q_r, q_n, 0, \dots, 0\}^T\end{aligned}\quad (17)$$

حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل رابطه (۱۷) با روش دیفرانسیل کوارچر تعمیم یافته (GDQ) انجام می‌شود. در این روش (GDQ) مشتق یک تابع در هر نقطه از دامنه آن نسبت به یک جهت خاص، به صورت جمع وزنی مقادیر تابع در همه نقاط دامنه در آن جهت تقریب زده می‌شود:

$$\frac{dF(x_k)}{dx} = \sum_{l=1}^N C_{kl} F(x_l), \quad k \in \{1, 2, \dots, N\}\quad (18)$$

که در آن N تعداد نقاط انتخاب شده در جهت x و C_{kl} ضرایب وزنی GDQ در مشتق اول نسبت به x می‌باشد. با در نظر گرفتن چندجمله‌ای‌های درونیابی لاگرانژ، ضرایب وزنی C_{kl} در رابطه (۱۷) به شکل زیر بدست می‌آید:

$$C_{kl} = \frac{M(x_k)}{(x_k - x_l)M(x_l)}, \quad k, l = 1, 2, \dots, N, k \neq l\quad (19)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial N_{ij}}{\partial \alpha_j} + q_i &= 0 \\ \frac{\partial N_{in}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial N_{jn}}{\partial \alpha_j} - q_n &= 0 \\ \frac{\partial M_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial M_{ij}}{\partial \alpha_j} - N_{in} &= 0 \\ \frac{r}{rh^2} \frac{\partial S_i}{\partial \alpha_j} + \frac{r}{rh^2} \frac{\partial S_{ij}}{\partial \alpha_j} - \frac{r}{h^2} P_{in} &= 0\end{aligned}\quad (13)$$

و شرط مرزی بر لبه $\alpha_1 = \text{ثابت}$ ، در جدول (۱) داده شده است.

جدول (۱): شرط مرزی بر لبه $\alpha_1 = \text{ثابت}$

$N_i = \text{known}$	$u_i = \text{known}$
$M_i - \frac{r}{rh^2} S_i = \text{known}$	$\phi_i = \text{known}$
$S_i = \text{known}$	$w_i = \text{known}$
$N_{ij} = \text{known}$	$u_j = \text{known}$
$M_{ij} - \frac{r}{rh^2} S_{ij} = \text{known}$	$\phi_j = \text{known}$
$S_{ij} = \text{known}$	$w_j = \text{known}$
$N_{in} = \text{know}$	$w = \text{known}$

با توجه به اینکه شرط مرزی ساده باشد یا لبه آزاد، در هر ردیف یکی از دو عدد جدول (۱) استفاده می‌شود.

روابط تنش-کرنش برای یک لایه اورتوتروپ در ورق‌ها به

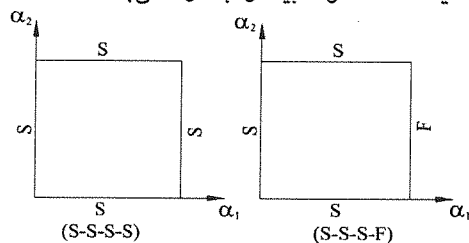
شکل ماتریسی (۱۴) است:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{rr} \\ \tau_{rn} \\ \tau_{1n} \\ \tau_{1r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{1r} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{1r} & \bar{Q}_{rr} & 0 & 0 & \bar{Q}_{r6} \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{rr} & \bar{Q}_{r0} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{r0} & \bar{Q}_{00} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{r6} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{rr} \\ \gamma_{rn} \\ \gamma_{1n} \\ \gamma_{1r} \end{Bmatrix}\quad (14)$$

درایه‌های ماتریس خصوصیات ماده اورتوتروپ بالا بر حسب ضرایب سختی در جهت محورهای اصلی ماده اورتوتروپ به شکل رابطه (۱۵) می‌باشد:

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{11} &= Q_{11}m^2 + 2(Q_{1r} + 2Q_{rr})m^2n^2 + Q_{rr}n^4 \\ \bar{Q}_{1r} &= (Q_{11} + Q_{rr} - 4Q_{rr})m^2n^2 + Q_{1r}(m^2 + n^2) \\ \bar{Q}_{rr} &= Q_{11}n^4 + 2(Q_{1r} + 2Q_{rr})m^2n^2 + Q_{rr}m^4\end{aligned}\quad (15)$$

با شرایط مرزی چهار سرساده و مدل دوم مدلی دارای سه تکیه گاه ساده و لبه متناظر با $\alpha_1 = a$ به عنوان لبه آزاد، در نظر گرفته می شود. این دو مدل در شکل (۱) نشان داده شده اند. مدل اول و دوم به ترتیب (SSSS) و (SSSF) نامیده می شوند. S معرف تکیه گاه ساده و F بیانگر لبه آزاد می باشد.



شکل (۱): مدل های (SSSS) و (SSSF) به ترتیب از راست به چپ

شرط مرزی ساده و لبه آزاد بر لبه $\alpha_1 = 0$ ثابت، به ترتیب به شکل زیر تعریف می شوند.

تکیه گاه ساده (S):

$$\begin{aligned} u_i = 0, \quad M_i = 0, \quad S_i = 0, \\ N_{ij} = 0, \quad \varphi_j = 0, \quad w_j = 0, \quad w = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

لبه آزاد (F):

$$\begin{aligned} N_i = 0, \quad M_i = 0, \quad S_i = 0, \\ N_{ij} = 0, \quad M_{ij} = 0, \quad S_{ij} = 0, \quad N_{in} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

در هر دو مدل، مقدار خیز نرمالیزه در نقطه میانی اندازه گیری شده و نمودارها و جداول بر آن اساس رسم شده اند. بدلیل اندک بودن مطالعاتی که صفحات با لبه آزاد را تحلیل نموده باشند، مقایسه کل نتایج با نرم افزار اجزاء محدود ABAQUS انجام شده است [۱].

شکل های (۲) و (۳) روند همگرایی خیز نرمالیزه نقطه میانی با لایه چینی متقارن (۰/۹۰/۰) با نسبت ضخامت $100 = a/h$ از ماده نوع (۱) را به ترتیب برای مدل های SSSF و SSSS نشان می دهند. n تعداد نقاط در راستای α_1 و α_2 طوریکه $n_1 = n_2 = n$ در نظر گرفته می شود. همانطور که ملاحظه می شود مدل SSSS سریع تر و با تعداد نقاط کمتر همگرا می شود در حالیکه مدل SSSF نقاط بیشتری را برای همگرایی نیاز دارد.

$$C_{kk} = - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N C_{kl} \quad k = 1, 2, \dots, N$$

افزون بر آن، رابطه (۱۹) نیز برقرار می باشد:

$$M(x_k) = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N (x_k - x_l) \quad (20)$$

تقسیم بندی نقاط دامنه از رابطه زیر بدست می آید:

$$x_k = \frac{a}{\gamma} \left[1 - \cos\left(\frac{k-1}{N-1}\pi\right) \right], \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (21)$$

که در آن a طول دامنه در راستای x است. با اعمال برابری (۱۸) نسبت به متغیرهای α_1 و α_2 بر دستگاه معادلات (۱۷) و در نظر گرفتن شرایط مرزی جدول (۱)، دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱۷) تبدیل به یک دستگاه معادلات جبری برای جابجایی ها و مولفه های برآیند تنش می شود که تعداد معادلات در این دستگاه معادلات جبری از مجهولات آن بیشتر است. این دستگاه معادلات با روش حداقل مربعات (Least-Squares) حل می شود.

۳- نتایج عددی

به منظور بررسی صحت روش حل بکار رفته در این مقاله، خمش ورق های با الیاف عمود برهم (Cross-Ply) متقارن (۰/۹۰/۰) و پادمتقارن (۰/۹۰) تحت بار عرضی یکنواخت در نظر گرفته می شود. ورق ها از دو ماده مرکب با خصوصیات زیر ساخته می شود:

$$\begin{aligned} E_{11}/E_{22} = 25 \quad G_{12}/E_{22} = G_{13}/E_{22} = 0.5 \\ G_{23}/E_{22} = 0.2 \quad \nu_{12} = 0.25 \end{aligned}$$

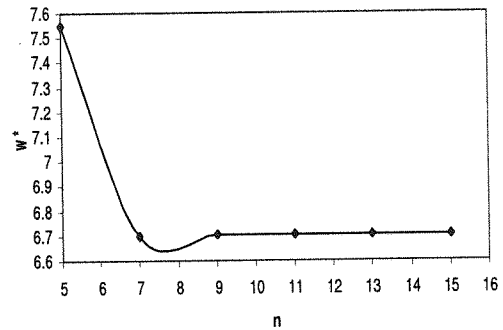
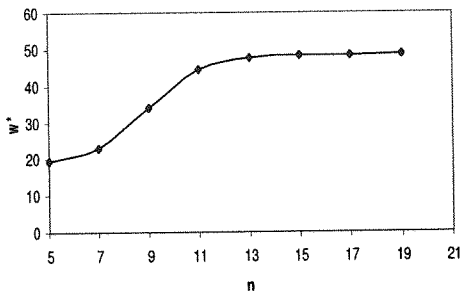
ماده نوع (۲):

$$\begin{aligned} E_{11}/E_{22} = 15 \quad G_{12}/E_{22} = G_{13}/E_{22} = 0.42 \\ G_{23}/E_{22} = 0.24 \quad \nu_{12} = 0.4 \end{aligned}$$

که در آنها E_1 و E_2 مدول میان صفحه ای یانگ در دو راستای اصلی ماده اورتوتروپ می باشند. G_{12} مدول برشی میان صفحه ای، G_{13} و G_{23} مدول های برشی عرضی به ترتیب در صفحه $\alpha_1 - n$ و $\alpha_2 - n$ هستند. ν_{12} ضریب پواسون اصلی در صفحه $\alpha_1 - \alpha_2$ است. مقدار w^* خیز نرمالیزه صفحه است که مقدار آن از رابطه (۲۲) بدست می آید:

$$w^* = - \frac{10^7 E_2 h^2}{q_n a^2} w \quad (22)$$

a طول یک ضلع مربع و q_n بار عرضی یکنواخت می باشد. در این مطالعه دو مدل مدنظر قرار گرفته است. مدل اول، یک ورق



شکل (۳): همگرایی خیز نرمالیزه، w^* ، ورق با الیاف عمودبرهم

مقارن (۰/۹۰/۰) ماده نوع (۱) با نسبت $a/h=100$ در مدل SSSF

جدول (۲) و (۳) مقایسه ای بین خیز نرمالیزه نقطه میانی با نرم افزار ABAQUS برای لایه چینی مقارن (۰/۹۰/۰)، (۹۰/۰/۹۰) و پادمقارن (۰/۹۰) برای چهار نسبت مختلف a/h از ماده نوع (۱) به ترتیب برای مدل های SSSF و SSSS می باشد.

شکل (۲): همگرایی خیز نرمالیزه، w^* ، ورق با الیاف عمودبرهم

مقارن (۰/۹۰/۰) ماده نوع (۱) با نسبت $a/h=100$ در مدل SSSS

جدول (۲): مقایسه خیز نرمالیزه نقطه میانی ورق مربعی با لایه چینی (۰/۹۰) و (۰/۹۰/۰)

از ماده (۱) برای چهار نسبت مختلف a/h مدل SSSS

SSSS	(۰/۹۰)		(۰/۹۰/۰)	
	ABAQUS	present	ABAQUS	present
a/h				
10	11.700	10.980	11.630	11.727
20	7.959	7.785	9.719	9.818
50	6.860	6.842	9.184	9.234
100	6.733	6.706	9.107	9.135

جدول (۳): مقایسه خیز نرمالیزه نقطه میانی ورق مربعی با لایه چینی (۰/۹۰) و (۰/۹۰/۰) و (۹۰/۰/۹۰)

از ماده (۱) برای چهار نسبت مختلف a/h مدل SSSF

SSSF	(۰/۹۰)		(۰/۹۰/۰)		(۹۰/۰/۹۰)	
	present	ABAQUS	present	ABAQUS	present	ABAQUS
a/h						
10	17.875	17.733	52.795	53.443	10.970	11.730
20	15.118	14.976	49.541	49.637	7.669	7.845
50	14.270	14.202	48.543	48.509	6.716	6.735
100	14.102	14.091	48.396	48.552	6.579	6.606

(FSDT) تحلیل ورق و پوسته ها را انجام می دهد حال آنکه

مطالعه حاضر بر مبنای (HSDT) می باشد.

شکل های (۴) و (۵) مقایسه تغییرات w^* بر حسب a/h از

ماده نوع (۱) برای سه لایه چینی (۰/۹۰)، (۰/۹۰/۰) و (۹۰/۰/۹۰)

را به ترتیب برای مدل های SSSF و SSSS نشان می دهد.

آشکال (۶) و (۷) بیانگر همین نتایج برای ماده نوع (۲) می باشند.

ماکزیم مقدار اختلاف مربوط به مدل SSSF است. در لایه چینی (۹۰/۰/۹۰) و نسبت ضخامت $a/h=10$ ، که مقدار آن برابر ۶/۴۸ درصد می باشد. مقدار خطا از رابطه زیر بدست می آید:

$$Error = \left| \frac{\text{present} - \text{ABAQUS}}{\text{ABAQUS}} \right| \times 100 \quad (25)$$

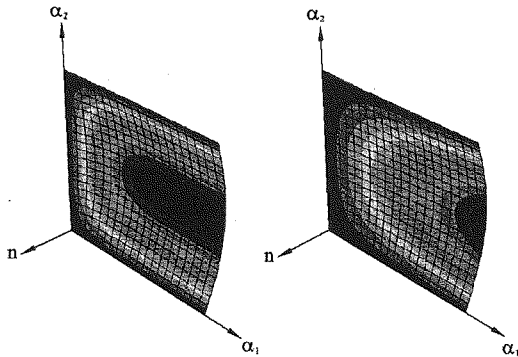
این اختلاف می تواند به این واقعیت نسبت داده شود که

ABAQUS بر مبنای تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول

همانطور که در شکل‌های (۴) و (۶) مشاهده می‌شود چون در مدل SSSS شرایط مرزی لبه‌ها یکنواخت است منحنی‌های مربوط به لایه چینی (۰/۹۰/۰) و (۹۰/۰/۹۰) بر هم منطبق هستند ولی در شکل‌های (۵) و (۷) که مربوط به مدل SSSF هستند اختلاف به چشم می‌خورد.

در مدل SSSS خیز نرمالیزه حالت پاد متقارن به طور قابل ملاحظه‌ای بیشتر از حالت متقارن است و هر چه نسبت a/h از حالت ورق نازک به نیمه ضخیم کاهش می‌یابد این اختلاف خصوصاً در بازه $(10 < a/h < 20)$ به طور فزاینده‌ای کاهش می‌یابد. این پدیده به اسم اثر ستون-تیر (beam-column/tie bar) معروف است که به دلیل کوپل کشش-خمش در لمینیت پاد متقارن ایجاد می‌شود.

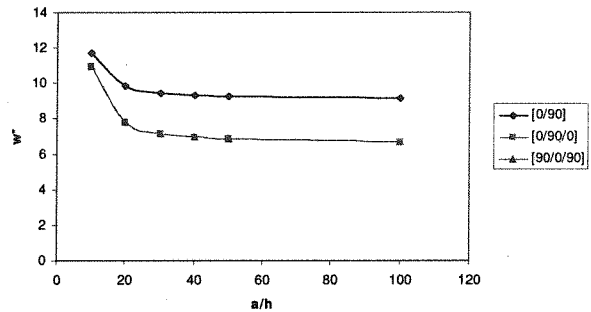
در مدل SSSF بین چیدمان (۰/۹۰/۰) و (۹۰/۰/۹۰) اختلاف وجود دارد زیرا شرایط مرزی در دو لبه $\alpha_1 = 0$ و $\alpha_2 = a$ با هم متفاوت هستند. در لایه چینی (۰/۹۰/۰) حجم بیشتری از الیاف در جهت عمود بر لبه آزاد مدل قرار می‌گیرد، این امر باعث می‌شود میزان خیز در این حالت بیشتر از حالت (۹۰/۰/۹۰) شود. تغییر شکل ناشی از بار عرضی یکنواخت برای دو لایه چینی مختلف (۰/۹۰/۰) و (۹۰/۰/۹۰) در شکل (۸) به وضوح دیده می‌شود.



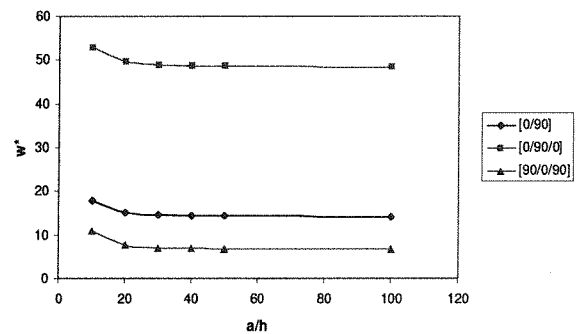
شکل (۸): مقایسه توزیع خیز تیر تحت بارهای عرضی در لایه چینی (۰/۹۰/۰) و (۹۰/۰/۹۰) به ترتیب از راست به چپ

اشکال (۹) و (۱۰) مقایسه تغییرات M_1^* (ممان خمشی نرمالیزه در نقطه میانی) ورق بر حسب a/h از ماده نوع (۱) برای سه لایه چینی (۰/۹۰/۰)، (۰/۹۰/۰) و (۹۰/۰/۹۰) را به ترتیب برای مدل‌های SSSF و SSSS نشان می‌دهد. اشکال (۱۰) و (۱۱) مبین همین نتایج برای ماده نوع (۲) می‌باشند. مقدار نرمالیزه M_1^* مطابق با رابطه (۲۶) بدست می‌آید:

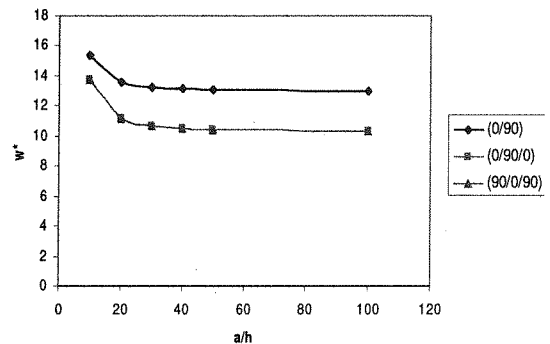
$$M_1^* = -\frac{10^7 M_1}{a^2} \quad (26)$$



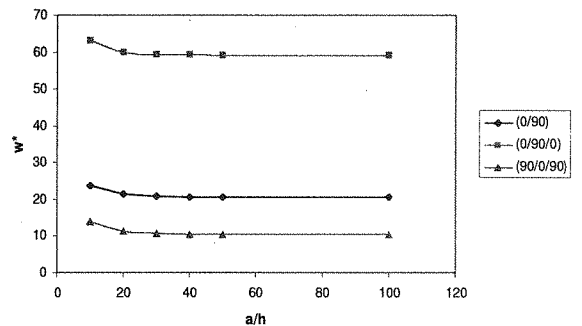
شکل (۴): تغییرات w^* بر حسب a/h از ماده نوع (۱) برای سه لایه چینی (۰/۹۰/۰)، (۰/۹۰/۰) و (۹۰/۰/۹۰) در SSSS



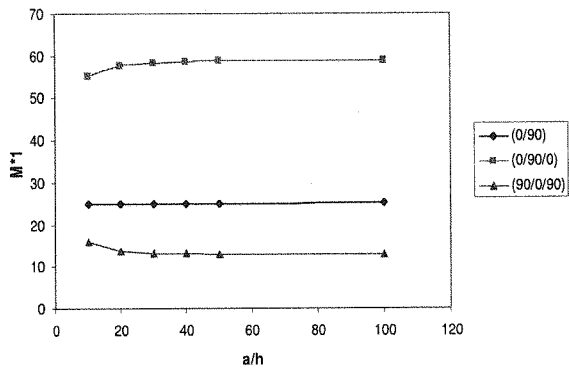
شکل (۵): تغییرات w^* بر حسب a/h از ماده نوع (۱) برای سه لایه چینی (۰/۹۰/۰)، (۰/۹۰/۰) و (۹۰/۰/۹۰) در SSSF



شکل (۶): تغییرات w^* بر حسب a/h از ماده نوع (۲) برای سه لایه چینی (۰/۹۰/۰)، (۰/۹۰/۰) و (۹۰/۰/۹۰) در SSSS



شکل (۷): تغییرات w^* بر حسب a/h از ماده نوع (۲) برای سه لایه چینی (۰/۹۰/۰)، (۰/۹۰/۰) و (۹۰/۰/۹۰) در SSSF



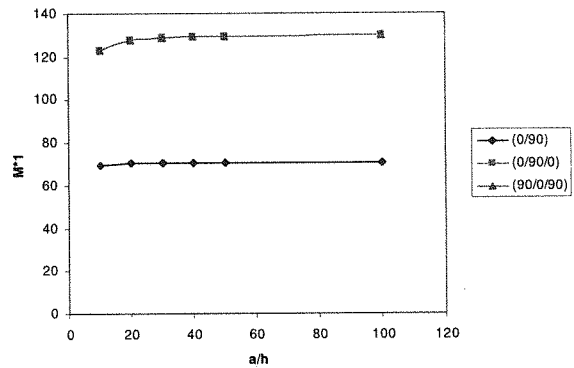
شکل (۱۲): تغییرات M_1^* بر حسب a/h از ماده نوع (۲) برای سه لایه چینی (۰/۹۰)، (۰/۹۰/۰)، (۹۰/۰/۹۰) در SSSF

همانطور که در شکل های (۹) تا (۱۲) دیده می شود در لایه چینی (۰/۹۰) تغییر در ضخامت، اثر محسوسی بر ممان ندارد. در مدل SSSS در هر دو لایه چینی متقارن نمودار حالت صعودی داشته یعنی با کاهش ضخامت ممان در نقطه مرکزی افزایش می یابد اما در مدل SSSF در لایه چینی متقارن (۰/۹۰/۰) نمودار روند صعودی داشته و در لایه چینی (۹۰/۰/۹۰) نمودار نزولی است.

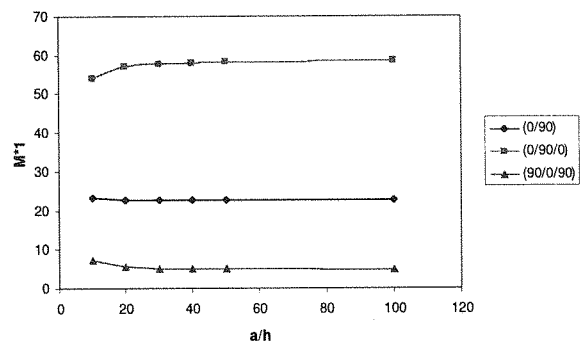
ع- نتیجه

در این مقاله خمش صفحات اورتوتروپیک بر مبنای تئوری تغییرشکل های برشی مرتبه بالا برای دو نوع شرط مرزی ساده و لبه آزاد محاسبه گردید. همانطور که در متن مقاله دیده می شود فرمولاسیون نوشته شده برای تحلیل خمش صفحات لایه ای کاملاً جدید هستند اما به هر صورت انطباق خوبی بین نتایج مطالعه حاضر و نرم افزار اجزاء محدود ABAQUS دیده می شود. نرم افزار ABAQUS تئوری برش مرتبه اول را برای حل پوسته و ورق ها استفاده می کند. با توجه به نتایج عددی در مجموع نمی توان پیش بینی کرد که کدام تئوری مقدار خیز را بیشتر از دیگری می دهد که این مساله تنها به نوع لایه چینی و ضخامت ورق بستگی دارد.

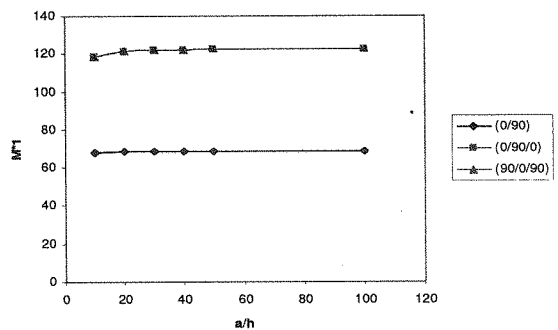
به طوری کلی می توان گفت که در مدل چهار لبه تکیه گاه ساده، مقدار خیز همواره در لایه چینی پادمتقارن بیشتر از حالت متقارن می باشد. این نتیجه برای مدل سه لبه ساده و یک لبه آزاد SSSF برقرار نمی باشد. برای این مدل مقدار خیز در لایه چینی متقارن (۰/۹۰/۰) از لایه چینی پادمتقارن (۰/۹۰) بیشتر است و لایه چینی پادمتقارن (۰/۹۰) از حالت متقارن (۹۰/۰/۹۰) مقدار خیز بیشتری می دهد.



شکل (۹): تغییرات M_1^* بر حسب a/h از ماده نوع (۱) برای سه لایه چینی (۰/۹۰)، (۰/۹۰/۰) و (۹۰/۰/۹۰) در SSSS



شکل (۱۰): تغییرات M_1^* بر حسب a/h از ماده نوع (۱) برای سه لایه چینی (۰/۹۰)، (۰/۹۰/۰) و (۹۰/۰/۹۰) در SSSF



شکل (۱۱): تغییرات M_1^* بر حسب a/h از ماده نوع (۲) برای سه لایه چینی (۰/۹۰)، (۰/۹۰/۰) و (۹۰/۰/۹۰) به ترتیب در SSSS

Sherbourne, A. N.; Pandey, M. D. "Differential quadrature method is in the buckling analysis of beams and composite plates", Computers and Structures, vol.40, p.p.903-913, 1991. [۱۶]

Shu, C. "Generalized differential quadrature integral quadrature and application to the simulation of incompressible viscous flows including parallel computation", PhD Thesis, University of Glasgow, 1991. [۱۷]

Shu, C.; Richards, B. E. "High resolution of natural convection in square cavity by generalized differential quadrature" In proceedings of 3rd Int. conf. on Advances in Numer. Methods in Engineering: Theory and Application, vol.2, p.p.978-985, 1990. [۱۸]

Striz, A. G.; Jang, S.; Bert, C. W. "Nonlinear bending analysis of thin circular plates by differential quadrature", Thin-Walled Structures, vol.6, p.p.51-62, 1988. [۱۹]

۶- زیر نویس ها

- 1 Classical Theory
- 2 Simply-supported
- 3 Free

ABAQUS v.6.4 PDF documentation (Analysis user's manual and ABAQUS/CAE user's manual) [۱]

Aghdam, M. M.; Farahani, M. R. N.; Dashti, M.; Rezaei Niya, S. M. "Application of Generalized differential quadrature method to the bending of thick laminated plates with various boundary condition", J. of Applied Mechanics and Materials, vols.5-6, p.p.407-414, 2006. [۲]

Basset, A. B. "On the extension and flexure of cylindrical and spherical thin elastic shells", Philos Trans Royal Soc London Ser, vol.181, p.p.433-480, 1890. [۳]

Bellman, R.; Kashef, B. G.; Casti, J. "Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations", J of Computer Physics, vol.10, p.p.40-52, 1972. [۴]

Bert, C. W.; Chen, T. L. C. "Effect of shear deformation on vibration of antisymmetric angle-ply laminated rectangular plates", Int. J. of solids and structures, vol. 14, p.p. 465-437, 1978. [۵]

Bert, C. W.; Francis, P. H. "Composite material mechanics: structural mechanics", AIAA Journal, vol.12, No.9, p.p.1173-1186, 1974. [۶]

Bert, C. W.; Jang, S. K.; Striz, A. G. "Two new approximate methods for analyzing free vibration of structural components", AIAA Journal, vol.26, p.p.612-618, 1988. [۷]

Bert, C. W.; Jang, S. K.; Striz, A. G. "Nonlinear bending analysis of orthotropic rectangular plates by the method of differential quadrature", Computational Mechanics, vol.5, p.p.217-226, 1989. [۸]

Han, J. B.; Liew, K. M. "an eight-node curvilinear differential quadrature method for straight-side quadrilateral Reissner/Mindlin plates", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol.141, p.p.265-280, 1997. [۹]

Huang, Y. Q.; Li, Q. S. "Bending and buckling analysis of antisymmetric laminates using the moving least square differential quadrature method", J. of Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, vol.193, p.p.3471-3492, 2004. [۱۰]

Mindlin, R. D., "Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates", J. of Appl. Mech, vol.18, 31-38 1951. [۱۱]

Naghdi, P. M.; "A survey of recent progress in theory of elastic shells" Applied Mechanics Reviews, vol. 9, p.p. 365-388, 1956. [۱۲]

Quan, J. R.; Chang, C. T. "New insights in solving distributed system of equations by the quadrature methods", Computers and Chemical Engineering, vol.13, p.p.779-788, 1989. [۱۳]

Reddy, J. N.; Liu, C. F. "A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells", Int. J. of Engineering Science, vol.23, p.p.319-330, 1985. [۱۴]

Reissner, E. "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", J. of Appl. Mech., Vol.12, p.p. 69-77, 1945. [۱۵]