

بررسی دقت کاربرد شرط مرزی سامرفیلد در تحلیل دینامیکی سدهای بتنی وزنی در حوزه فرکانس

سید علی اصغر ارجمندیⁱ، وحید لطفیⁱⁱ

چکیده

در تحلیل دینامیکی سدهای بتنی وزنی، چنانچه مخزن در جهت بالادست تا فواصل زیادی ادامه داشته باشد، مدل کردن کل مخزن با اجزای محدود به صرفه نیست. از این رو، در این موارد مخزن به دو ناحیه تقسیم می‌شود، ناحیه نزدیک بدنه سد؛ که به روش اجزای محدود مدل می‌شود و ناحیه دور از بدنه سد؛ که اثر آن روی پاسخ سد را می‌توان به صورت تقریبی با اعمال شرط سامرفیلد در مرز انتهای ناحیه نزدیک در نظر گرفت. در این مقاله سعی شده است میزان خطای این شرط تقریبی بررسی شود. در ضمن، نتایج نشان می‌دهد که اعمال شرط سامرفیلد دو تاثیر عمده در پاسخ سد خواهد داشت: اولاً؛ چنانچه نسبت طول به ارتفاع ناحیه نزدیک کوچک باشد، مقدار پاسخ در فرکانس طبیعی اول سیستم به طور قابل توجهی کمتر از مقدار دقیق به دست می‌آید و ثانیاً؛ اغتشاش‌هایی در پاسخ سد بالاخص برای حالاتی که کف مخزن یک مرز غیر جاذب فرض گردد، ایجاد می‌شود.

کلمات کلیدی

شرط مرزی سامرفیلد، تحلیل دینامیکی سد و مخزن، المان نیمه‌بینهایت سیال، اندرکنش آب و سازه.

An investigation on the Accuracy of the Sommerfeld B.C. in Dynamic Analysis of Concrete Gravity Dams

S.A. Arjmandi, V. Lotfi

ABSTRACT

In dynamic analysis of concrete gravity dams, it is computationally very expensive to model the entire reservoir with finite elements if the reservoir extends to a large distance in the upstream direction. Therefore, the reservoir is divided into two regions in that case; The near field region that is discretized with finite elements and far field region that its effects can be approximately accounted by applying Sommerfeld boundary condition to the upstream boundary of the near field region. In this article, the accuracy of this boundary condition is studied thoroughly. Moreover, results show that employing this condition has two significant effects on the response; Firstly, it is observed that for small values of L/H (ratio of reservoir length to water height), the response peak corresponding to the first natural frequency of the system is significantly lower than the exact value. The second effect is due to distortions induced in the response especially in the case of non-absorptive reservoir base condition.

KEYWORDS

Sommerfeld Boundary Condition, Dynamic Analysis of Dam-reservoir System, Fluid Hyper-element, Fluid-Structure Interaction.

ⁱ دانشجوی کارشناسی ارشد سازه؛ دانشگاه صنعتی امیرکبیر: arjmandi@aut.ac.ir
ⁱⁱ استاد دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست؛ دانشگاه صنعتی امیرکبیر: vahlotfi@aut.ac.ir

قسمت‌های بعد، ابتدا تئوری‌های مورد استفاده و معادلات به دست آمده برای هر حالت سد با مخزن محدود و سپس المان نیمه بینهایت سیال به طور خلاصه ارائه می‌شود. در بخش سوم مقاله نیز مدل‌های تحلیل شده و پارامترهای اصلی ذکر می‌شوند و در نهایت، نتایج به دست آمده ارزیابی خواهند شد.

۲- روش تحلیل

همان طور که اشاره شد دو حالت کلی برای مدل کردن مسأله سد و مخزن موجود است که اختلاف عمده این دو حالت در نحوه مدل کردن مخزن سد نمایان می‌شود. در این قسمت، معادلات مورد استفاده برای هر حالت خلاصه می‌گردد.

۲-۱- مدل سد با مخزن محدود (حالت A)

در این حالت از روش اجزای محدود برای مدل کردن هر دو ناحیه سد و مخزن استفاده می‌شود. المان‌های محدود جامد صفحه‌ای (دو بعدی) و المان‌های محدود سیال دو بعدی به ترتیب برای دو قسمت بدنه سد و آب مخزن استفاده می‌شوند. فرمولاسیون و معادلات مربوطه به صورت زیر مطرح است: ابتدا با جزء بندی بدنه سد به روش المان‌های محدود جامد صفحه‌ای می‌توان به معادلات حرکت زیر رسید [۱]:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K} \mathbf{r} = -\mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{a}_g + \mathbf{F} \quad (1)$$

\mathbf{M} ، \mathbf{K} و \mathbf{C} به ترتیب ماتریس‌های جرم، سختی و میرایی، بردار تغییر مکان‌های نسبی گرهی و \mathbf{F} بردار نیروهای هیدرودینامیک است. در ضمن \mathbf{a}_g و \mathbf{J} به ترتیب بردار در برگریخته مولفه‌های شتاب زمین و ماتریس مربوط به ایجاد حرکات صلب زمین در راستای افق و قائم هستند:

$$\mathbf{a}_g = \begin{bmatrix} a_g^x \\ a_g^y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \end{bmatrix}^T$$

اگر آب مخزن، یک سیال غیر ویسکوز، غیر چرخشی و تراکم پذیر در نظر گرفته شود، معادله دیفرانسیل زیر در محدوده سیال حاکم می‌باشد که به معادله موج معروف است:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

در رابطه فوق، p فشار هیدرودینامیک، t پارامتر زمان و c سرعت صوت در سیال است. اعمال روش تغییرات و جزء بندی ناحیه آب مخزن با استفاده از المان‌های محدود سیال دو بعدی به معادله ماتریسی زیر در محدوده هر المان منجر خواهد شد:

$$\mathbf{G}^e \ddot{\mathbf{P}}^e + \mathbf{H}^e \dot{\mathbf{P}}^e = \mathbf{R}^e \quad (3)$$

ماتریس‌های به کار رفته در رابطه فوق برای یک المان نمونه e

یکی از موضوعات اصلی در زمینه تحلیل دینامیکی سدهای بتنی؛ که توجه بسیاری از متخصصین را به خود معطوف داشته، مسأله مدل کردن صحیح مخزن است. پیچیدگی مسأله از آنجا نشأت می‌گیرد که اغلب اوقات هندسه مخزن تا فواصل زیادی از وجه بالادست بدنه سد ادامه می‌یابد و مدل کردن همه طول آن به روش اجزای محدود به صرفه نیست. هر چند که برای دقت محاسبات باید چنین مدلی در نظر گرفته شود، لکن در عمل بسیاری از مهندسین صرفاً قسمت محدودی از مخزن را با استفاده از المان‌های محدود سیال مدل کرده و سپس از شرط مرزی تقریبی جاذب امواج در وجه بالا دست مخزن استفاده می‌کند [۱۰].

یکی از این شرط‌های مرزی را شاران ارائه کرده است [۱۱]، [۱۲]. این شرط مرزی با استفاده از حل دقیق پاسخ مخزن برای وجه بالادست قائم سد به دست آمده است به طوری که رفتار سیال را در نقاط دور از مرز اندرکنش نشان می‌دهد. شرط مرزی دیگری که یانگ و همکارانش ارائه کرده‌اند نسبتاً پیچیده بوده و برنامه نویسی آن در یک برنامه اجزای محدود با مشکلاتی همراه است [۱۳]. ماییتی و همکارش نیز شرط مرزی دیگری پیشنهاد داده‌اند [۸] که حتی اگر در نزدیکی مرز اندرکنش قرار گیرد از دقت خوبی برخوردار است؛ ولی این شرط مرزی نیز نسبتاً پیچیده و برای برنامه نویسی مناسب نیست. رایج ترین شرط مرزی، که در بسیاری از کارهای تحقیقاتی به آن اشاره شده، شرط مرزی سامرفیلد است. هرچند تحقیق لی و همکارانش [۴] نشان می‌دهد که این شرط مرزی در فرکانس‌های کمتر از فرکانس طبیعی دوم مخزن از دقت کمتری برخوردار است؛ ولی استفاده از این شرط مرزی ضمن ساده بودن در کارهای عملی بسیار متداول است. تحقیقاتی نیز در زمینه ایجاد شرط‌های مرزی جدید در دست انجام است [۹].

در این مقاله سعی بر آن است که دقت استفاده از شرط مرزی سامرفیلد ارزیابی شود. ذکر این نکته لازم است که در صورتی که در کنار المان‌های محدود سیال معمول از یک المان نیمه بینهایت سیال در قسمت بالا دست مخزن استفاده شود، به جواب‌های دقیقی دست خواهیم یافت [۵] که خود می‌تواند ملاک خوبی برای ارزیابی دقت جواب‌های حالت تقریبی نخست باشد. در این مقاله دو روش مذکور برای مدل کردن مخزن سد، به ترتیب به نام‌های اختصاری مدل‌های A (بدون استفاده از المان نیمه‌بینهایت و با در نظر گرفتن شرط مرزی سامرفیلد) و B (با استفاده از المان نیمه‌بینهایت سیال) اشاره شده‌اند. در

به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{H}^e = \frac{1}{\rho} \int_A (\mathbf{N}_x \mathbf{N}_x^T + \mathbf{N}_y \mathbf{N}_y^T) dA \quad (4-الف)$$

$$\mathbf{G}^e = \frac{1}{\rho c^2} \int_A \mathbf{N} \mathbf{N}^T dA \quad (4-ب)$$

$$\mathbf{R}^e = \frac{1}{\rho} \int_s \mathbf{N} \frac{\partial p}{\partial n} ds \quad (4-ج)$$

برخورد کننده به مرز را مدل می‌کند [۲].

با استفاده از این روابط (جدول ۱) و جایگزینی آنها در (۴-ج) برای انواع شرایط مرزی ۱ الی ۳ به ترتیب خواهیم داشت:

$$\mathbf{R}^e = -\mathbf{B}^e (\ddot{\mathbf{r}}^e + \mathbf{J}^e \mathbf{a}_g) \quad (6-الف)$$

$$\mathbf{R}^e = -\mathbf{B}^e \mathbf{J}^e \mathbf{a}_g - \mathbf{L}^e \dot{\mathbf{P}}^e \quad (6-ب)$$

$$\mathbf{R}^e = -\mathbf{L}^e \dot{\mathbf{P}}^e \quad (6-ج)$$

ماتریس‌های \mathbf{B}^e و \mathbf{L}^e در روابط فوق به صورت ذیل تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{B}^e = \int_s \mathbf{N} \mathbf{n}^T \mathbf{Q}^T ds \quad (7-الف)$$

$$\mathbf{L}^e = \frac{q}{\rho} \int_s \mathbf{N} \mathbf{N}^T ds \quad (7-ب)$$

\mathbf{Q} در (۷-الف) ماتریس توابع شکل المان جامد صفحه‌ای است که در مجاورت المان سیال می‌باشد و \mathbf{n} برداری است که مؤلفه‌های یک بردار واحد عمود بر مرز به طرف بیرون المان را در بر می‌گیرد.

با استفاده از (۶) و جایگزینی آنها در (۳) و سپس اسمبل کردن ماتریس‌های مربوطه برای کل ناحیه آب مخزن نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{G} \ddot{\mathbf{P}} + \mathbf{L} \dot{\mathbf{P}} + \mathbf{H} \mathbf{P} = -\mathbf{B} \ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{B} \mathbf{J} \mathbf{a}_g \quad (۸)$$

ترکیب معادلات سد و مخزن (حالت A)

همان طور که در قسمت‌های قبل اشاره شد، روابط ماتریسی (۱) و (۸) به ترتیب برای دو ناحیه بدنه سد و آب مخزن مطرح است. در ضمن می‌توان براحتی نشان داد که بردار نیروهای هیدرودینامیک \mathbf{F} مورد استفاده در (۱) با بردار فشارهای هیدرودینامیک به صورت ذیل مرتبط است:

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (۹)$$

از جایگزینی (۹) در (۱) و در نظر داشتن (۸)، معادلات ماتریسی سد و مخزن محدود (مدل حالت A) به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{B}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{a}_g \\ -\mathbf{B} \mathbf{J} \mathbf{a}_g \end{bmatrix} \quad (۱۰)$$

حال اگر شتاب زمین یک تابع هارمونیک با فرکانس زاویه‌ای ω در نظر گرفته شود، $\mathbf{a}_g(t) = \mathbf{a}_g(\omega) e^{i\omega t}$ ، پاسخ نیز یک

ρ جرم مخصوص سیال، \mathbf{N} بردار در برگیرنده توابع شکل المان سیال و $\mathbf{N}_x, \mathbf{N}_y$ مشتقات آن به ترتیب نسبت به مختصه‌های x و y می‌باشند.

شرایط مرزی مخزن

با صرف نظر از امواج سطحی، فشار در سطح مخزن برابر صفر خواهد بود. در بقیه مرزها شرایط مرزی زیر می‌تواند وجود داشته باشد (جدول ۱)، [۷]:

شرط مرزی نوع ۱ برای مرزهایی است که سیال در تماس با المان‌های سازه‌ای است (مانند سطح مشترک سد و مخزن). شرط مرزی نوع ۲ که یک شرط تقریبی است، به سطح مشترک پی و مخزن اعمال می‌شود. ذکر این نکته است که در این شرط مرزی، q ثابت جذب امواج مربوط به کف مخزن است. در ضمن q را می‌توان بر حسب یک پارامتر ملموس‌تر α به صورت زیر نوشت:

$$q = \frac{1-\alpha}{c} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (۵)$$

که α نسبت دامنه موج منعکس شده به دامنه موج تابیده شده در جهت عمود بر مرز مربوطه است.

جدول (۱): انواع شرایط مرزی برای مخزن محدود [۷]

نوع	رابطه	ماتریس‌هایی که باید محاسبه شوند	
		\mathbf{L}^e	\mathbf{B}^e
۱	$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \ddot{u}_n$	خیر	بلی
۲	$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho a_g^n - q \frac{\partial p}{\partial t}$	بلی	بلی
۳	$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t}$	بلی	خیر

شرط سوم (Sommerfeld B.C.) برای در نظر گرفتن تقریبی اثرات مخزن با طول بینهایت است که به مرز بالادست مخزن اعمال می‌شود. این شرط مرزی شبیه شرط نوع ۲ با در نظر گرفتن $a_g^n = 0$ و $\alpha = 0$ است که جذب کامل امواج قائم

تابع هارمونیک با همان فرکانس زاویه‌ای خواهد بود و (۱۰) به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} (1 + 2\beta i) & -\mathbf{B}^T \\ -\omega^2 \mathbf{B} & -\omega^2 \mathbf{G} + i\omega \mathbf{L} + \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{a}_g \\ -\mathbf{B} \mathbf{J} \mathbf{a}_g \end{bmatrix} \quad (11)$$

در این معادلات، میرایی بدنه سد از نوع هیستریک فرض و بنابراین ماتریس \mathbf{C} به شکل زیر در نظر گرفته شده است:

$$\mathbf{C} = \frac{2\beta}{\omega} \mathbf{K}$$

معادلات (۱۱) متقارن نیستند؛ بنابراین برای استفاده از مزیت‌های حل‌گرهای خط آسمان (Skyline) متقارن، معادلات فوق باید به نحوی متقارن شوند. با ضرب بخش پایینی این معادلات در ω^{-2} به معادلات متقارن زیر خواهیم رسید:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} (1 + 2\beta i) & -\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{B} & \omega^{-2} (-\omega^2 \mathbf{G} + i\omega \mathbf{L} + \mathbf{H}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{a}_g \\ -\omega^{-2} \mathbf{B} \mathbf{J} \mathbf{a}_g \end{bmatrix} \quad (12)$$

۲-۲- مدل سد با مخزن نامحدود (حالت B)

در این حالت نیز همانند مدل سد با مخزن محدود، از روش اجزای محدود برای مدل کردن بدنه سد و قسمت محدودی از آب مخزن در مجاورت سد استفاده می‌شود. ولی، اختلاف عمده در این است که در عین حال از یک المان نیمه‌بینهایت سیال برای در نظر گرفتن مابقی مخزن؛ که تا بی نهایت ادامه دارد، استفاده می‌شود. در این قسمت، ابتدا روابط مربوط به المان نیمه‌بینهایت سیال ارائه می‌شود و سپس معادلات به دست آمده از ترکیب این المان و سایر المان‌ها، بررسی و بحث می‌شود.

المان نیمه بینهایت سیال

همان طور که قبلاً اشاره شد، معادله حاکم در محدوده آب مخزن معادله موج (۲) است که در حالت تحریک هارمونیک به صورت معادله هلمهولتز مطرح می‌شود:

$$\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad (13)$$

معادله فوق را می‌توان به روش جداسازی متغیرها به دو معادله دیفرانسیل مستقل تبدیل کرد. یکی از این معادلات جواب‌های به شکل e^{kx} دارد و برای معادله دیگر؛ که مستقل از x است، خواهیم داشت:

$$\lambda^2 p + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \quad (14)$$

که λ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda^2 = k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \quad (15)$$

با اعمال روش تغییرات و تقسیم بندی مخزن در راستای y به چندین لایه و استفاده از توابع درونیابی برای برآورد p در نقاط مختلف لایه‌ها نتیجه می‌شود:

$$[-\lambda^2 \mathbf{A}^e + \mathbf{C}^e] \mathbf{P}^e = \mathbf{R}^e \quad (16)$$

که \mathbf{P}^e بردار فشارهای گرهی برای هر لایه است و ماتریس‌های \mathbf{A}^e ، \mathbf{C}^e و بردار \mathbf{R}^e به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\mathbf{A}^e = \int_{y_{i-1}}^{y_{i+1}} \mathbf{N} \mathbf{N}^T dy \quad (17-الف)$$

$$\mathbf{C}^e = \int_{y_{i-1}}^{y_{i+1}} \mathbf{N}_y \mathbf{N}_y^T dy \quad (17-ب)$$

$$\mathbf{R}^e = \begin{bmatrix} -\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y_{i-1}} & 0 & \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y_{i+1}} \end{bmatrix}^T \quad (17-ج)$$

در معادلات فوق، \mathbf{N} بردار توابع شکل و \mathbf{N}_y مشتق آن نسبت به y است. با اسمبل کردن ماتریس‌های فوق برای هر یک از لایه‌ها به معادلات زیر برای کل المان نیمه بینهایت سیال می‌رسیم:

$$[-\lambda^2 \mathbf{A} + \mathbf{C}] \mathbf{P} = \mathbf{R} \quad (18)$$

بردار \mathbf{R} در این رابطه از اسمبل کردن بردارهای \mathbf{R}^e به دست آمده است، که به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0} & 0 & 0 & \dots & \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=H} \end{bmatrix}^T \quad (19)$$

در عین حال، با صرف نظر از امواج سطحی، فشار در سطح مخزن صفر خواهد بود؛ به این ترتیب می‌توان درجه آزادی آخر مرتبط با (۱۸) را حذف کرد؛ در ضمن شرط مرزی نوع دوم در کف مخزن به این شکل اعمال می‌شود:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho a_g^y(\omega) - i \omega q p \quad (20)$$

عبارت فوق در سطر اول بردار \mathbf{R} قرار می‌گیرد. به این ترتیب بردار \mathbf{R} به یک بردار مختلط تبدیل می‌شود؛ در صورتی که ماتریس‌های \mathbf{A} و \mathbf{C} مختلط نیستند. با انتقال قسمت موهومی

بردار \mathbf{R} به طرف چپ (۱۸) و ملحوظ کردن آن در ماتریس \mathbf{C} نتیجه می‌شود:

$$[-\lambda^2 \mathbf{A} + \bar{\mathbf{C}}] \mathbf{P} = \bar{\mathbf{R}} \quad (21)$$

بدین ترتیب، $\bar{\mathbf{R}}$ قسمت حقیقی بردار \mathbf{R} و $\bar{\mathbf{C}}$ ماتریسی است که با اضافه کردن ترم $i\omega q$ به المان قطری اول ماتریس \mathbf{C} ایجاد می‌شود. معادله (۲۱) یک جواب عمومی و یک جواب خصوصی دارد. جواب عمومی این معادله از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$[-\lambda^2 \mathbf{A} + \bar{\mathbf{C}}] \mathbf{P} = 0 \quad (22)$$

که در حالت کلی، یک مسأله مقدار ویژه خطی است که ماتریس $\bar{\mathbf{C}}$ مختلط می‌باشد. این مسأله باید به ازای هر فرکانس حل و مقادیر ویژه λ_i ها و بردارهای ویژه، \mathbf{X}_i ها محاسبه شود. به ازای هر λ_i با توجه به (۱۵) یک k_i به دست می‌آید. در ضمن می‌توان ماتریس‌هایی تعریف کرد که این مقادیر را در خود جای می‌دهند:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_h &= [\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2 \quad \dots \quad \mathbf{X}_m] \\ \mathbf{K}_h &= \text{Diag} [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_m] \end{aligned} \quad (23)$$

که m تعداد مدهایی است که در محاسبات در نظر گرفته می‌شود. جواب خصوصی (۲۱) از معادله زیر به دست می‌آید:

$$\left[-\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{A} + \bar{\mathbf{C}}\right] \mathbf{P}_p^y = \bar{\mathbf{R}} \quad (24)$$

نکته این مطلب لازم است از آنجا که جواب خصوصی (۲۱) پاسخ به تحریک یکنواخت قائم است، این جواب تابع x نیست و

در نتیجه، $k = 0$ و $\lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ در نظر گرفته شده است.

فشار در خط مرجع المان نیمه بینهایت سیال، (خط $x = 0$)، را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{P}_h = \mathbf{X}_h \Gamma + \mathbf{P}_p \mathbf{a}_g(\omega) \quad (25)$$

در رابطه فوق، بردار Γ ضرایب سهم مدهای مختلف را در بر می‌گیرد و ماتریس \mathbf{P}_p با استفاده از بردار \mathbf{P}_p^y تعریف شده است:

$$\Gamma = [\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \dots \quad \gamma_m]^T \quad (26\text{-الف})$$

$$\mathbf{P}_p = [0 \quad \mathbf{P}_p^y] \quad (26\text{-ب})$$

از طرف دیگر، بردار شتاب در راستای x برای یک خط اختیاری موازی خط مرجع، با استفاده از مشتق‌گیری از فشار به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\ddot{\mathbf{U}} = -\frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^m \gamma_j k_j \mathbf{X}_j e^{k_j x} \quad (27)$$

بدین ترتیب، برای خط مرجع المان نیمه بینهایت ($x = 0$) خواهیم داشت:

$$\ddot{\mathbf{U}}_h = -\frac{1}{\rho} \mathbf{X}_h \mathbf{K}_h \Gamma \quad (28)$$

حال اگر بردار سهم مدها را از (۲۵) به دست آوریم (با استفاده از شرط تعامد و واحد بودن ماتریس شکل مدها نسبت به ماتریس \mathbf{A}) و در (۲۸) جایگزین کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\ddot{\mathbf{U}}_h = -\frac{1}{\rho} \mathbf{X}_h \mathbf{K}_h \mathbf{X}_h^T \mathbf{A} (\mathbf{P}_h - \mathbf{P}_p \mathbf{a}_g) \quad (29)$$

در صورتی که طرفین رابطه فوق را در منفی ماتریس \mathbf{A} ضرب کنیم، رابطه‌ای به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$\mathbf{R}_h = \mathbf{H}_h \mathbf{P}_h - \mathbf{R}_p \mathbf{a}_g(\omega) \quad (30)$$

در این معادله از تعاریف زیر استفاده شده است:

$$\mathbf{R}_h = -\mathbf{A} \ddot{\mathbf{U}}_h \quad (31\text{-الف})$$

$$\mathbf{H}_h = \frac{1}{\rho} \mathbf{A} \mathbf{X}_h \mathbf{K}_h \mathbf{X}_h^T \mathbf{A} \quad (31\text{-ب})$$

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{H}_p \mathbf{P}_p \quad (31\text{-ج})$$

در رابطه (۳۰)، \mathbf{R}_h نشان دهنده بردار سازگار معادل با انتگرال شتاب عمودی به طرف داخل المان نیمه بینهایت (شتاب افقی در راستای منفی x) است و این بردار کمیت‌هایی مشابه ترم‌های بردار سمت راست المان‌های محدود سیال معمول (\mathbf{R}^e) در (۳) را در بر می‌گیرد. جزییات بیشتر در مورد المان نیمه بینهایت سیال در [۷] مطرح شده است.

ترکیب معادلات سد و مخزن (حالت B)

همان طور که قبلاً اشاره شد، در این حالت هم فرمولاسیون بدنه سد و قسمت محدودی از مخزن با به کارگیری روش اجزای محدود به شکلی که در حالت A توضیح داده شد، می‌تواند استفاده شود. لکن باید توجه داشت که در این حالت (B)، دیگر به اعمال شرط مرزی سامرفیلد نیازی نیست و از یک المان نیمه بینهایت سیال برای مدل کردن قسمت باقیمانده مخزن استفاده می‌شود. در قسمت قبل، روابط مربوط به المان نیمه بینهایت ارایه شد. حال اگر این المان نیز همراه سایر المان‌های اجزای محدود اسمبل شود، می‌توان براحتی نشان داد که معادله ماتریسی (۱۲) مربوط به سیستم سد و مخزن به صورت زیر تبدیل خواهد شد [۷]:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} (1+2\beta i) & -\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{B} & \omega^{-2} (-\omega^2 \mathbf{G} + i\omega \mathbf{L} + \mathbf{H} + \bar{\mathbf{H}}_h(\omega)) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{a}_g \\ \omega^{-2} (-\mathbf{B} \mathbf{J} \mathbf{a}_g + \bar{\mathbf{R}}_p(\omega) \mathbf{a}_g) \end{bmatrix} \quad (22)$$

در معادله فوق، $\bar{\mathbf{H}}_h(\omega)$ و $\bar{\mathbf{R}}_p(\omega)$ به ترتیب شکل‌های گسترش یافته \mathbf{H}_h و \mathbf{R}_p هستند که شامل تمام درجات آزادی فشار تعریف شده در محدوده آب مخزن می‌باشند. اگر فرض کنیم که کلیه درجات آزادی فشار مربوط به المان نیمه‌بینهایت سیال در بردار فشار ابتدا شماره‌گذاری شود، در این حالت این ماتریس‌ها را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\bar{\mathbf{H}}_h(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_h(\omega) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22\text{-الف})$$

$$\bar{\mathbf{R}}_p(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_p(\omega) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22\text{-ب})$$

۳- مدل‌های تحلیل شده و پارامترهای اصلی

یک برنامه کامپیوتری بر اساس تئوری ارایه شده در قسمت قبل و به زبان برنامه نویسی Delphi نوشته شد؛ ضمن اینکه برای المان‌های سیال درجه آزادی فشار در نظر گرفته شده است.

۳-۱- مدل‌های تحلیل شده

یک سد ایده‌آل مثلثی با وجه بالادست قائم و شیب پایین دست ۰/۸ : ۱ در نظر گرفته شد و با المان‌های جامد صفحه‌ای ۸ گرهی گسسته سازی گردید (شکل ۱). برای مخزن سد دو حالت فرض شده است که با نام‌های A و B شناخته می‌شوند. در حالت اول، مدل فاقد المان نیمه‌بینهایت سیال در مرز بالادست مخزن است و برای در نظر گرفتن اثرات مخزن نامحدود شرط مرزی سامرفیلد در این مرز اعمال شده است (شکل ۱- الف). برای گسسته سازی محدوده مخزن از المان‌های سیال صفحه‌ای ۸ گرهی استفاده شده است. نسبت طول به ارتفاع آب مخزن (L/H) از ۱ تا ۵ تغییر می‌کند که به ترتیب مدل‌های A1 تا A5 را به وجود می‌آورد (جدول ۲).

جدول (۲): مدل‌های تحلیل شده

مدل	نسبت طول به ارتفاع (L/H)	توضیحات
A5 تا A1	۱ تا ۵	شرط مرزی سامرفیلد در بالادست
B2 و B1	۱ و ۲	المان نیمه بینهایت در بالادست

در حالت دوم، مخزن به دو ناحیه تقسیم شده است (شکل ۱- ب). قسمت اول، ناحیه محدود مجاور بدنه سد؛ که در حالت کلی هندسه نامنظم دارد و به وسیله المان‌های سیال صفحه‌ای ۸ گرهی گسسته سازی شده است (این ناحیه همان مخزن در نظر گرفته شده در حالت A است). ناحیه دوم، بخش انتهایی مخزن است که ارتفاع ثابت دارد و در جهت بالادست تا بی نهایت ادامه می‌یابد. این ناحیه با استفاده از یک المان نیمه‌بینهایت سیال مدل شده است که از المان‌های زیر لایه ۲ گرهی تشکیل شده است. در این حالت با توجه به نسبت طول به ارتفاع ناحیه اول، مدل‌های B1 و B2 (به ترتیب L/H برابر ۱ و ۲) تعریف می‌شوند (جدول ۲).

برای در نظر گرفتن اندرکنش پی و مخزن به صورت تقریبی و همچنین اثرات جذب امواج به وسیله رسوبات، شرط مرزی نوع ۲ (طبق جدول ۱) به ازای مقادیر مختلف α در کف مخزن اعمال شده است.

۳-۲- پارامترهای اصلی

بتن بدنه سد به صورت یکنواخت، ایزوتروپ، با خاصیت ویسکو الاستیک خطی و با پارامترهای زیر فرض شده است:

مدول الاستیسیته E	۲۷/۵ GPa
نسبت پواسون	۰/۲
وزن مخصوص	۲۴/۸ kN/m ³
ضریب میرایی هیسترتیک β	۰/۰۵

آب مخزن نیز به صورت سیال غیر ویسکوز و تراکم پذیر با وزن واحد حجم برابر $9/81 \text{ kN/m}^3$ و سرعت موج فشاری 1440 m/s در نظر گرفته شده است.

۴- نتایج

همان طور که قبلاً نیز ذکر شد، مدل‌های A1 تا A5 دارای شرط مرزی سامرفیلد در مرز بالادست مخزن هستند. پاسخ این مدل‌ها به ازای $\alpha = 1$ در شکل (۲) نشان داده شده است. با توجه به این شکل، دو نکته مهم در این پاسخ‌ها مشاهده می‌شود؛ اولاً، مقدار پاسخ در فرکانس طبیعی اول سیستم سد و مخزن به ازای نسبت L/H (نسبت طول به ارتفاع مخزن) پای‌ین‌تر از ۲، در مقایسه با L/H برابر ۵ و ۴ به میزان قابل توجهی کمتر است. ثانیاً، اغتشاش‌هایی بالاخص برای فرکانس‌های بالا ایجاد می‌شود. با توجه به فرمول‌بندی ریاضی شرط سامرفیلد [۳] می‌توان دریافت که با اعمال این شرط به یک مرز مخزن، امواج قائم برخورد کننده به مرز جذب می‌شوند، لکن امواج مایل به طور کامل جذب نمی‌گردند؛ بلکه بخشی از آنها منعکس می‌شود. اغتشاش مورد بحث، ناشی از

این امواج منعکس شده است.

در مرحله بعدی مطالعه، تأثیر اندرکنش مخزن و پی بررسی شده است. همان طور که قبلاً اشاره شد، این مورد با استفاده از یک شرط مرزی ویژه در مرز مربوطه اعمال می‌شود [۲-۱-§]، که به ازای مقادیر مختلف α میزان جذب آن تغییر می‌کند. در ضمن، توضیح بایده داد که در این قسمت، نسبت طول به ارتفاع مخزن ثابت در نظر گرفته شده است (شکل ۳). با توجه به نتایج، مشاهده می‌شود که جذب مقداری از امواج به وسیله اعمال شرط مرزی کف مخزن، باعث کاهش اغتشاش در پاسخ سد می‌شود و هر چه قابلیت کف مخزن برای جذب امواج بیشتر باشد (α کوچکتر انتخاب شود)، اغتشاش حاصل شده از اعمال شرط مرزی سامرفیلد در مرز بالادست نیز کاهش می‌یابد.

در قسمت بعد، نتایج مدل B ارایه شده است (شکل ۴). همان طور که قبلاً اشاره شد، در مدل‌های B به جای شرط سامرفیلد، در مرز بالادست مخزن، المان نیمه بینهایت سیال قرار داده شده است. این المان معادل یک مخزن با ارتفاع ثابت است که در جهت بالادست تا بینهایت ادامه می‌یابد؛ بنابراین در این مدل‌ها، طول بخش محدود مخزن (مجاور بدنه سد) نباید در پاسخ تأثیر بگذارد. این بحث بخوبی در شکل (۴) مشهود است که نتیجه، مستقل از نسبت L/H است [۶]. این پاسخ می‌تواند به عنوان جواب دقیق سیستم سد و مخزن در نظر گرفته شود.

نهایتاً، ارزش دارد که میزان خطای ایجاد شده به علت اعمال شرط مرزی سامرفیلد در بالادست به طور کامل‌تر بررسی شود. بدین منظور مدل A با نسبت‌های مختلف L/H دوباره در نظر گرفته شد و نتایج برای مقادیر $\alpha = 0.75$ و 0.5 محاسبه و به ترتیب در شکل‌های (۵) و (۶) ارایه شده است. البته ذکر این نکته لازم است که نتایج مشابه برای $\alpha = 1.0$ قبلاً در شکل (۳) مطرح شده بود. همه پاسخ‌های نشان داده شده در شکل‌های فوق به تحریک افقی تکیه‌گاهی متعلق است و به علت محدودیت جا از آوردن نتایج مربوط به تحریک قائم تکیه‌گاهی اجتناب شد؛ ولی این نتایج را می‌توان در [۱] به طور مفصل یافت. در ضمن باید توجه داشت که نتیجه حالت B1 نیز در این شکل‌ها ترسیم شده است و به عنوان جواب دقیق سیستم می‌تواند استفاده شود. از مقایسه نتایج مدل A در حالات مختلف و مدل B، میزان خطای حاصله در فرکانس‌های مختلف مشهود می‌شود. درصد خطای پاسخ در فرکانس طبیعی اول سیستم سد و مخزن به ازای مقادیر مختلف α و L/H در جدول (۳) ارایه شده است. با توجه به این جدول، مقدار حداقل ازای α مورد نظر و میزان خطای مورد قبول، مقدار حداقل نسبت L/H لازم را در هر حالت به دست آورد. به عنوان مثال،

اگر میزان خطای کمتر از ۱۰٪ به عنوان معیار در نظر گرفته شود، ملاحظه می‌شود که برای تحریک افقی، حداقل نسبت L/H لازم برای حالاتی که α برابر مقادیر ۱/۰، ۰/۷۵ و ۰/۵ باشد، به ترتیب برابر ۲، ۳ و ۱ به دست می‌آید. به طور مشابه برای تحریک قائم و مقادیر α مذکور، این نسبت‌ها به ترتیب برابر ۵، ۴ و ۳ هستند.

جدول (۳): در صد خطا در فرکانس طبیعی اول سیستم سد و مخزن (مدل‌های A) حرکت افقی زمین

α	L/H				
	۱	۲	۳	۴	۵
۱/۰	۶۰	۲۹	۹	۳	۱
۰/۷۵	۱۶	۰	۰	۰	۰
۰/۵	۰	۰	۰	۰	۰

حرکت قائم زمین

α	L/H				
	۱	۲	۳	۴	۵
۱/۰	۸۵	۶۵	۲۹	۱۴	۷
۰/۷۵	۶۵	۳۴	۱۶	۷	۲
۰/۵	۴۵	۱۵	۲	۰	۰

۵- نتیجه گیری

دو نوع مدل با عنوان‌های A و B؛ که اولی دارای شرط مرزی سامرفیلد در مرز بالادست مخزن، و دیگری دارای المان نیمه‌بینهایت سیال است، با توجه به فرمولبندی ارایه شده تحلیل و نتایج آنها با یکدیگر مقایسه شد. با توجه به اینکه پاسخ دقیق برای سیستم سد و مخزن از مدل B حاصل می‌شود، می‌توان نتایج زیر را عنوان کرد:

- اعمال شرط مرزی سامرفیلد دو تأثیر مهم در پاسخ سد ایجاد می‌کند؛ اولاً، مقدار پاسخ در فرکانس طبیعی اول سیستم سد و مخزن کمتر از مقدار واقعی به دست می‌آید. ثانیاً، اغتشاش‌هایی در پاسخ بالادست برای فرکانس‌های بالا را باعث می‌شود. در عین حال مشاهده شد که در صورتی که کف مخزن را یک مرز غیر جاذب در نظر بگیریم ($\alpha = 1.0$)، میزان برآورد پای‌ین پاسخ در فرکانس طبیعی اول سیستم به طور عمده به نسبت L/H وابسته خواهد بود؛ ضمن این که در این حالت با افزایش نسبت L/H از شدت اغتشاش‌های ایجاد شده در فرکانس‌های بالا کاسته نمی‌شود.

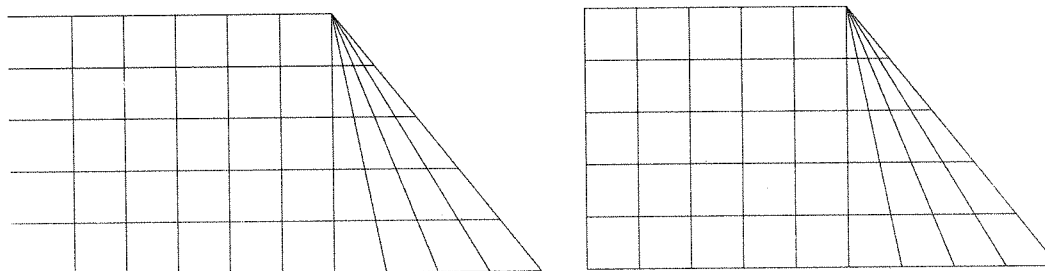
- مطابق انتظار، ملاحظه شد استفاده از المان نیمه بینهایت سیال برای مدل کردن قسمت بالادست مخزن روش

- Fenves, G. and Chopra, A. K., "Earthquake analysis of concrete gravity dams including reservoir bottom absorption and dam-water-foundation rock interaction", Earthq Eng. Struct. Dyn. 12, 663-680, 1984.
- Hall, J.F. and Chopra, A.K., "Two-dimensional dynamic analysis of concrete gravity and embankment dams including hydrodynamics effects", Earthquake Eng. Struct. Dyn. 10, 305-332, 1982.
- Li, X., Romo, M.P.O. and Aviles, J.L., "Finite element analysis of dam-reservoir systems using an exact far-boundary condition", Comp. & Struct., 60,751-762, 1996
- Lotfi, V. and Sharghi, M. R., "Direct frequency domain analysis of concrete gravity dams based on FE-BE procedure", J. of Dam Eng, 11, 273-291, 2001
- Lotfi, V., "Frequency domain analysis of concrete gravity dams including hydrodynamic effects", Journal of Dam Engineering, Vol. XII, Issue 1, 2001.
- Lotfi, V., "Direct frequency domain analysis of concrete arch dams based on FE-(FE-HE)-BE technique", Journal of Computers and Concrete, Vol. I, Issue 3, 2004.
- Maity, D. and Bhattacharyya, S.K., "Time-domain analysis of infinite reservoir by finite element method using a novel far-boundary condition", Finite Elements in Analysis and Design, 32, 85-96, 1999.
- Parrinello, F. and Borino, G., "Lagrangian finite element modelling of dam-fluid interaction: Accurate absorbing boundary conditions", Comput. Struct, in press, 2007.
- Pavarino, L. F. and Zampieri, E., "Preconditioners for spectral discretizations of Helmholtz's equation with Sommerfeld boundary conditions", Comput. Methods App. Mech. Engrg, 190, 5341-5356, 2001.
- Sharan, S., "Time domain analysis of infinite fluid vibration", Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 24,945-958, 1987
- Sharan, S., "Finite element analysis of unbounded and incompressible fluid domains", Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 21, pp. 1659-1669, 1985.
- Yang, R., Tsai, C. S. and Lee, G. C., "Explicit time-domain transmitting boundary for dam-reservoir interaction analysis", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 36, 1789-1804, 1993.
- [۲] ایده‌آلی است. در این حالت هیچ گونه اغتشاشی در پاسخ سیستم مشاهده نمی‌شود؛ در صورتی که ارتفاع آب در طول مخزن ثابت باشد (مشابه مثال تعریف شده)، این پاسخ مستقل از نسبت L/H خواهد بود. به عبارتی هر چقدر تمایل داشته باشیم می‌توان المان نیمه‌بینهایت سیال را به وجه بالادست بدنه سد نزدیک‌تر در نظر گرفت و از تعداد المان‌های محدود سیال مورد استفاده در ناحیه محدود اول کاست.
- [۳] میزان خطای ایجاد شده به علت اعمال شرط مرزی سامرفیلد به دو پارامتر اصلی α (ضریب جذب امواج در کف مخزن) و نسبت L/H وابسته است. به عنوان مثال، اگر مقدار خطای پاسخ در فرکانس طبیعی اول سیستم سد و مخزن کمتر از ۱۰٪ مد نظر باشد، ملاحظه می‌شود که برای تحریک افقی، حداقل نسبت L/H لازم برای حالاتی که α برابر مقادیر ۰/۱۰، ۰/۷۵ و ۰/۵ انتخاب شده، به ترتیب برابر ۳، ۲ و ۱ به دست می‌آید. به طور مشابه برای تحریک قائم و مقادیر α مذکور این نسبت‌ها به ترتیب برابر ۵، ۴ و ۳ برداشت می‌شود.
- [۴] در عین حال، مشاهده شد که با افزایش میزان جذب امواج در کف مخزن (کمتر شدن α) از میزان اغتشاش‌های ایجاد شده کاسته می‌شود. به طوری که اگر حداقل نسبت L/H لازم ذکر شده رعایت شود، می‌توان نتیجه گرفت که در حالت تحریک افقی این اغتشاش‌ها برای مقادیر $\alpha \leq 0.75$ به طور کامل از بین می‌رود. در حالت تحریک قائم، برای $\alpha = 0.75$ هنوز اندکی اغتشاش مشاهده می‌شود؛ لکن در این حالت نیز برای $\alpha \leq 0.5$ ، اغتشاش‌های ایجاد شده ناچیز خواهد بود.

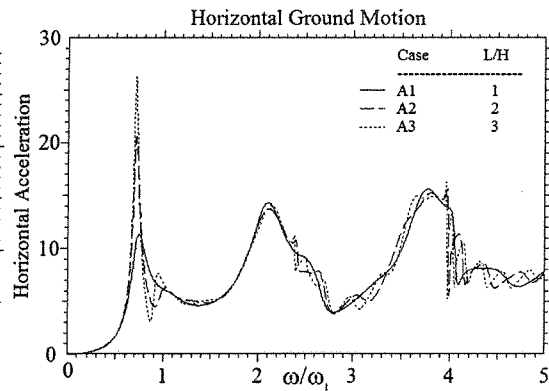
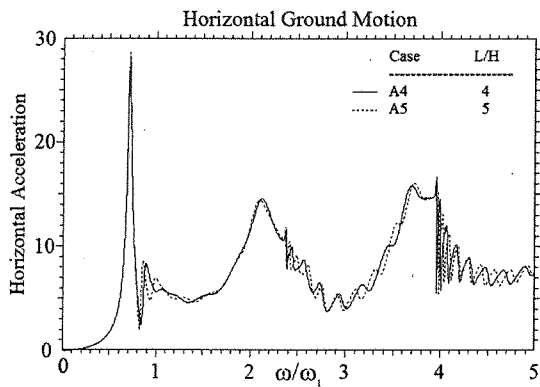
۶- مراجع

- [۱] ارجمندی، س. ا.، "تحلیل دینامیکی سدهای بتنی وزنی در حوزه فرکانس به روش مودال غیروابسته، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، زیر نظر لطفی، و.، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ۱۳۸۳.

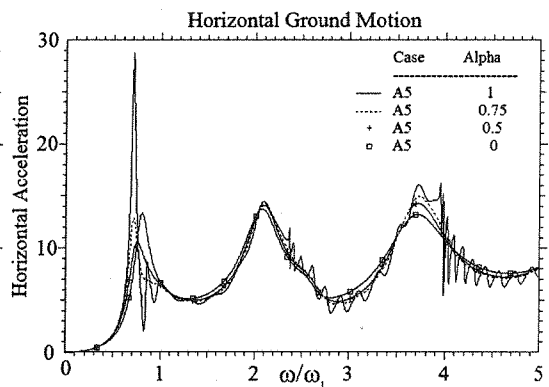
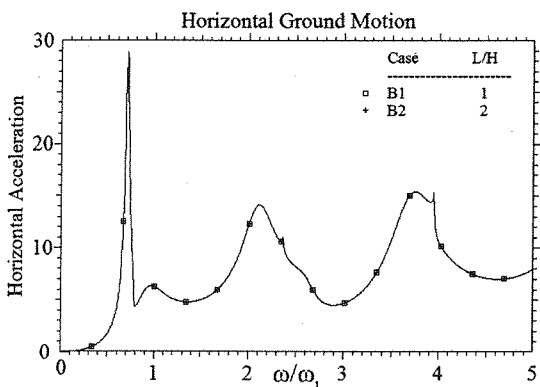
۷- شکل‌ها



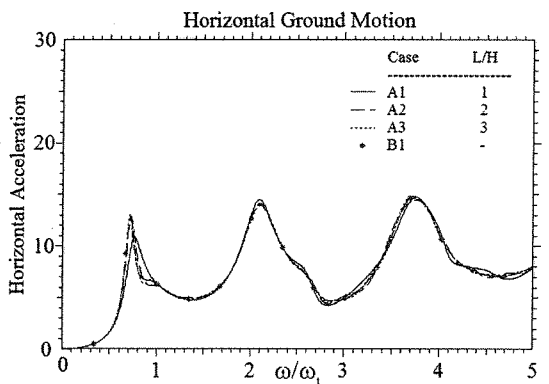
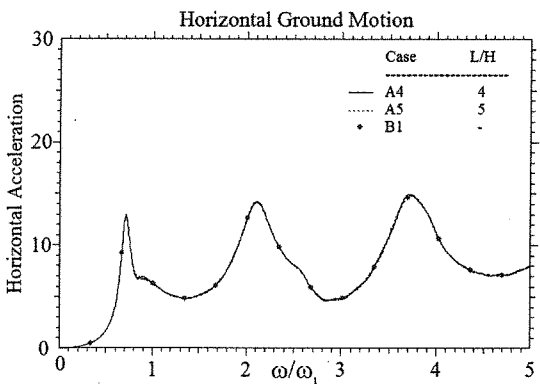
شکل (۱): الف- مدل A1؛ ب- مدل B1، نسبت طول به ارتفاع مخزن ۱ ($L/H=1$)



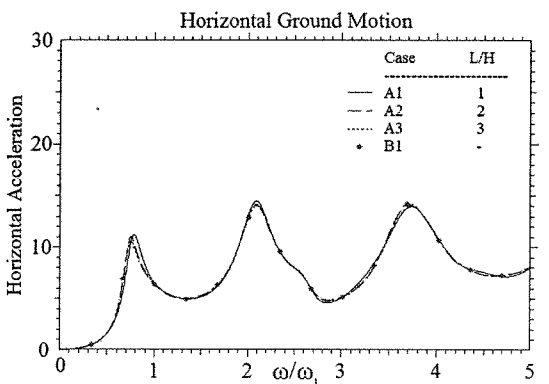
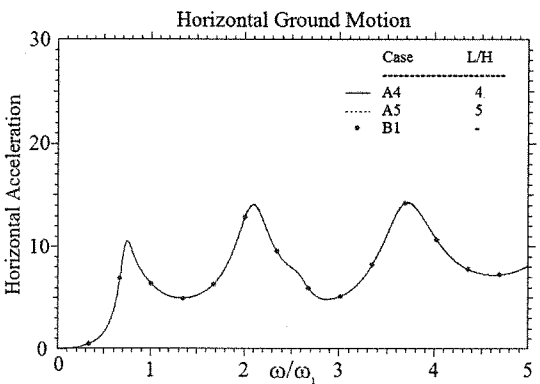
شکل (۲): شتاب تاج سد برای مدل‌های A، تحریک افقی ($\alpha = 1$)



شکل (۳): شتاب تاج سد در مدل A5 به ازای مقادیر مختلف α / شکل (۴): مقایسه پاسخ مدل‌های B2 و B1، تحریک افقی ($\alpha = 1$)



شکل (۵): شتاب تاج سد برای مدل‌های A، تحریک افقی ($\alpha = 0.75$)



شکل (۶): شتاب تاج سد برای مدل‌های A، تحریک افقی ($\alpha = 0.5$)

