

آنالیز سیستم‌های یک درجه آزادی با استفاده از تبدیل موجک در برابر ارتعاش ناشی از زلزله

حسن یوسفیⁱ؛ اسد الله نورزادⁱⁱ

چکیده

در این مقاله، ابتدا تئوری موجک به اختصار توضیح داده شده است، که از مزایای آن می‌توان به توانایی در اختیار داشتن اطلاعات در حوزه زمان و فرکانس به صورت همزمان، تشخیص و حذف اغتشاشات (noise) تصادفی از اطلاعات، اطلاع از وضعیت توزیع انرژی حرکت زلزله در فضای دو بعدی فرکانس - زمان برای تحلیل سریع و در عین حال نسبتاً دقیق سازه را نام برد. در ادامه مقاله، رابطه‌ای بین ضرایب تبدیل موجک ورودی و پاسخ برای یک سیستم یک درجه آزادی ارائه شده است که در تحلیل سریع سازه قابل استفاده است. لذا با داشتن ضرایب تبدیل موجک ورودی می‌توان قبل از محاسبه دقیق، پاسخ سیستم یا به عبارتی مدهای تحریک شده در سیستم‌های چند درجه آزادی را پیش بینی کرده و از امکاناتی که تئوری تبدیل موجک در اختیار می‌گذارد، پاسخ سیستم را با حذف اغتشاشات همراه با ذخیره کمتر اطلاعات با توجه به نحوه تمرکز انرژی حول مقیاس‌های خاص بطور سریع محاسبه کرد. در انتهای مقاله، با تشریح چند مثال، صحت و دقت روش نشان داده شده است. این روش برای سیستم‌های چند درجه آزادی قابل بیان است.

کلمات کلیدی

تبدیل موجک، موجک پیوسته، ارتعاش، سیستم‌های SDOF.

Vibration Aanalysis of SDOF Systems by Wavelet Transform Against Earthquake Excitation

H.Yosefi, M.S.- A. Nourzad, Ph.D.

ABSTRACT

In this article at first the wavelet theory is described that it's advantages are informations about the location of frequencies content in the time domain, determining noises and denoising them from raw data or process, knowing about distributaries of energy of signal at time-frequency space,... which can be used for fast computation and relatively exact analysis of structures. In following for a SDOF system of vibration a relationship between input wavelet coefficient and output (response) wavelet coefficient is provided. So with input wavelet coefficient before exact analysis the response or excited modes of vibration of MDOF systems can be determinated and by facilities of wavelet transform, the response of system with denoising that cause lower memory occupation or how energy of process is distributed around specific scales, fast computation can be done. At the end, for demonstration of the true and accuracy of this method some examples are solved. It is nicely recommend that this method can be provided and adapted for MDOF system of vibration.

KEYWORDS

Wavelet Transform, Continues Wavelets, Vibration, SDOF systems.

ⁱ دانشجوی دکتری، دانشکده فنی دانشگاه تهران

ⁱⁱ عضو هیات علمی گروه عمران، دانشکده فنی، دانشگاه تهران: noorzad@ut.ac.ir

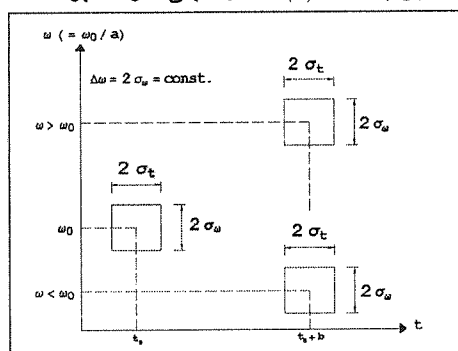
برای کسب اطلاعات در مورد زمان-فرکانس، روش WFT توسعه داده شده است که در آن تبدیل فوریه حاصل از حاصلضرب تابع $f(t)$ در یک تابع $g(t-t_0)$ که مانند یک پنجره کوچک فقط قطعه‌ای از سیگنال در اطراف t_0 را نگاه می‌کند، گرفته می‌شود. در نتیجه، مشخصات فرکانسی سیگنال در اطراف t_0 به دست می‌آید. در این تبدیل با ثابت نگاه داشتن عرض پنجره به ازای تمامی w ها (فرکانس) و t ها و حرکت پیوسته پنجره روی محور زمان به ازای هر w ثابت در نهایت، تابع $f(t)$ به فضای زمانی - فرکانسی نگاشت می‌یابد؛ و در نتیجه می‌توان اطلاعات زمانی و فرکانسی را هم زمان داشت. تبدیل WFT مطابق با رابطه (۱) تعریف می‌شود:

$$WFT(b, w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-b)e^{-iwt} dt \quad (1)$$

در صورتی که تابع پنجره g در رابطه فوق از نوع گوسی باشد، رابطه فوق به تبدیل Gabor تبدیل می‌شود. از طرفی طبق اصل عدم قطعیت هایزنبرگ نمی‌توان همزمان در بازه زمان و فرکانس حداکثر دقت و تفکیک پذیری مورد نظر را انتظار داشت؛ بلکه ضرب عدم قطعیت‌های بازه زمانی و فرکانس مقداری ثابت است و چنانچه عدم قطعیت‌ها را با واریانس آنها تعریف کنیم؛ یعنی برای بازه زمان واریانس σ_t و برای فرکانس واریانس σ_w را تعریف کنیم، آنگاه حاصلضرب آنها مقداری ثابت مخالف صفر است؛ یعنی:

$$\sigma_t^2 \cdot \sigma_w^2 = c \quad (2)$$

و چون در تبدیل فوریه به کمک پنجره، عرض پنجره همواره در زمان برای فرکانس‌های مختلف ثابت است؛ یعنی σ_t همواره ثابت می‌باشد، در نتیجه σ_w نیز ثابت است. بنابراین به ازای هر $(w_0$ و $t_0)$ دلخواه تفکیک پذیری در صفحه زمان - فرکانس مطابق با شکل (۱) مقدار ثابتی خواهد بود.



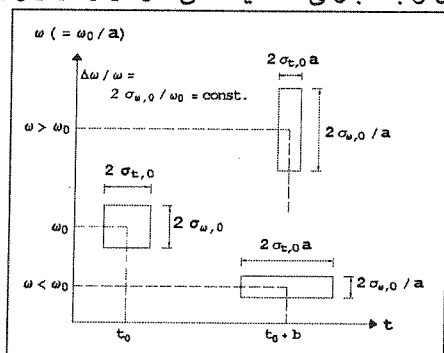
شکل (۱): نحوه تفکیک پذیری در بازه زمانی و فرکانس در تبدیل فوریه به کمک پنجره [۲]

پردازش سیگنال‌ها بر اساس تئوری موجک به منظور کسب اطلاعاتی از قبیل تعیین فرکانس غالب همزمان با زمان وقوع آن، مشخص کردن محتوی فرکانسی با اطلاع از زمان وقوع آنها، تشخیص و حذف اغتشاشات تصادفی از فرآیند، که همواره هر داده اندازه گیری شده دارای آن می‌باشد، نحوه توزیع انرژی فرایند در فرکانس‌های مختلف بر حسب زمان و ... انجام می‌پذیرد؛ ولی پردازش سیگنال به روش مرسوم، یعنی استفاده از تبدیل فوریه، می‌تواند اطلاعاتی مربوط به محتوی فرکانسی و فرکانس غالب را در فضای فرکانسی بدون اطلاع از زمان وقوع ارائه دهد که در تحلیل در حوزه زمان کارایی ندارد. تئوری های ریاضی گوناگونی برای کسب این اطلاعات به طور همزمان در فرکانس و زمان توسعه داده شده- اند که معروفترین آنها تبدیل فوریه به کمک پنجره WFT است [۱]. در سال‌های اخیر نیز تئوری موجک WT بسط و گسترش یافته است [۱] و [۲] که از آن علاوه بر استفاده در پردازش اطلاعات سیگنال ورودی و یا خروجی از سیستم و شناسایی رفتار آن [۵] همچنین می‌توان معادلات حاکم را به فضای موجک برده و در مقیاس‌های مختلف حل کرد [۶]؛ لیکن در [۶] مطالعات فقط در فضای موجک برای ارتعاشات تصادفی انجام پذیرفته و شرط لازم برای بازگشت از فضای موجک به فضای اولیه ارائه نشده است و لذا جوابها برای ارزیابی و تحلیل آنها در فضای واقعی در دسترس نیست. در این مقاله در ترکیب تئوری پردازش سیگنال‌ها [۵] با گسسته سازی معادلات حاکم در فضای موجک [۶] با ارائه شرط بازگشت پذیری [۱] برای مشخص کردن جواب در فضای واقعی سعی شده است. هر یک از تبدیل‌های فوق با توجه به مشخصات سیگنال و نیاز می‌تواند مفید باشد. چنانچه با فرآیندهای ایستا روبرو باشیم، یعنی فرآیندی که فرکانس آن تابع زمان نیست، در این صورت تبدیل فوریه به تنهایی برای به دست آوردن اطلاعات فرکانس فرآیند کفایت می‌کند؛ ولی در مورد فرآیندهای غیر ایستا (مثل زلزله) با توجه به تغییر فرکانس آنها با زمان، فقط اطلاع داشتن از محتوی فرکانسی بدون اطلاع از زمان وقوع آنها کافی نیست یا به عبارت دیگر، در این صورت استفاده از تبدیل فوریه، کارآ و قابل اعتماد نیست. بنابراین، روش‌های دیگری؛ که در ادامه توضیح داده می‌شود، گسترش داده شده‌اند. همچنین یکتایی جواب در فرآیندهای غیر ایستا محل تردید است.

۱- تبدیل فوریه به کمک پنجره

(Window Fourier Transform)

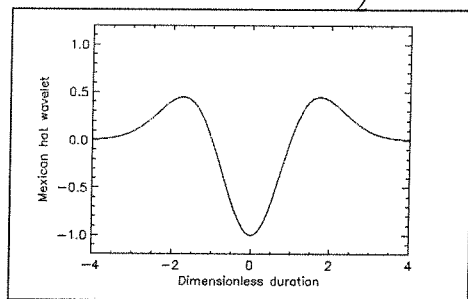
پیوسته محاسبه شوند در این صورت به این تبدیل، تبدیل پیوسته موجک گفته می‌شود؛ لیکن به دلایل محاسباتی ضرایب تبدیل موجک به ازای مقادیر گسسته a و b که می‌تواند به صورت $a = a_0^m$ و $b = nb_0 a_0^m$ که در آن m یک عدد صحیح مثبت بزرگتر از صفر و a_0 عدد ثابت بزرگ تر از یک است، محاسبه گردد، به این تبدیل، تبدیل گسسته موجک گفته می‌شود. از آنجایی که عرض پنجره تابع مقیاس است و با توجه به اصل عدم قطعیت هایزنبرگ می‌توان ثابت کرد که تفکیک پذیری برای هر (t_0, w_0) در صفحه فرکانس (یا مقیاس) و زمان مطابق با شکل (۲) است؛ یعنی فرکانس‌های پایین در پنجره با عرض بیشتر و فرکانس‌های بالا با عرض کمتر پنجره، درجه تفکیک پذیری و به عبارتی دقت یکسانی دارد [۱]، [۲] و [۴].



شکل (۲): نحوه تفکیک پذیری در بازه زمانی و فرکانس در تبدیل موجک [۴]

یکی از خاصیت‌های مهم تبدیل موجک، ثابت بودن تغییرات نسبی فرکانس؛ یعنی $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ است. این خاصیت نشان می‌دهد که تبدیل موجک برای مطالعه سیگنال‌های با تغییرات زیاد فرکانس نسبت به سیگنال‌ها با تغییرات کمتر فرکانس خواص یکسانی دارد [۴]. در ادامه با مثال‌هایی با تئوری موجک بیشتر آشنا می‌شویم. در شکل (۳) موجک مادر (یعنی $a=1$ و $b=0$) از خانواده "Mexican hat" نمایش داده شده است که با رابطه زیر بیان می‌شود [۷]:

$$\int \psi(x) dx = 0; \psi(x) = (x^2 - 1) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (6)$$



شکل (۳): شکل موجک مادر "Mexican hat" [۷]

حال یک سیگنال ایستا از نوع کسینوسی را در نظر

به عبارتی، عرض پنجره بزرگ، دقت کم تفکیک پذیری در فرکانس‌های پایین و پنجره کوچک، دقت کم در زمان را ایجاد می‌کند [۴].

۲- تبدیل موجک (Wavelet Transform)

در این تبدیل نیز از مفهوم پنجره استفاده می‌شود؛ لیکن عرض پنجره برای فرکانس‌های مختلف تغییر می‌کند؛ یعنی عرض پنجره در فرکانس‌های بالا کوچک و در فرکانس‌های پایین بزرگتر می‌شود؛ لذا این نوع پنجره خاص را موجک نامیده و با ψ نشان می‌دهند. بایستی توجه کرد که این پنجره هم در حوزه زمان و هم در حوزه فرکانس حول زمان و فرکانس مشخص متمرکز است و بر خلاف تبدیل فوری؛ که در فضای فرکانس، متمرکز و در حوزه زمان، گسترده است، این نوع پنجره محل (support) فشرده در زمان و فرکانس دارد؛ بنابراین به این پنجره، موجک؛ یعنی موج کوچک و به تبدیل مربوطه تبدیل موجک گفته می‌شود. تبدیل موجک طبق رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$W_{\psi} f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (3)$$

علامت * نشان دهنده مزدوج مختلط تابع است و:

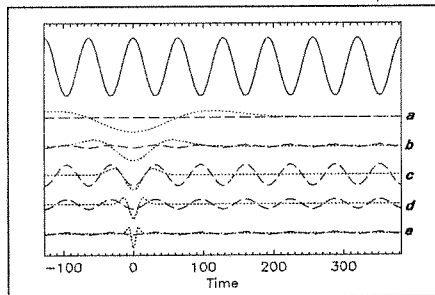
$$\psi_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right); a, b \in \mathfrak{R} \quad (4)$$

$\psi_{a,b}$ موجک انتقال یافته ψ به اندازه b و مقیاس شده به اندازه a است. تابع $\psi(t)$ تابع موجک مادر است که با استفاده از آن، طبق رابطه (۴) تابع‌های موجک برای مقیاس‌ها و انتقال‌های مختلف به دست می‌آید. بایستی انتخاب تابع $\psi(t)$ همراه با ارضای تعدادی از روابط ریاضی باشد. یکی از آنها؛ که لازمه وجود تبدیل معکوس موجک و برقراری تساوی پارسوال است، به قرار زیر است:

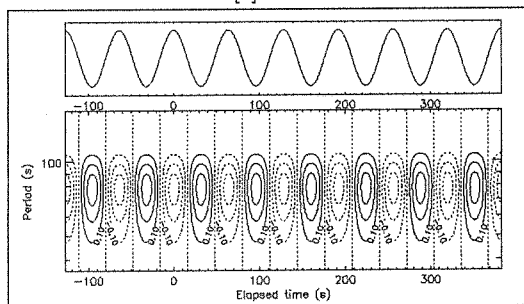
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (5)$$

در این تبدیل به ازای هر a ثابت (عرض موجک ثابت)، موجک روی محور زمان به صورت پیوسته با افزایش b که به صورت معکوس با فرکانس ارتباط دارد، انتقال می‌یابد و $W_{\psi} f(a, b)$ برای b محاسبه می‌شود، سپس دوباره a تغییر کرده و عملیات انتقال موجک برای موجک با مقیاس جدید همراه با محاسبه ضرایب تبدیل انجام پذیرفته و در نهایت، تابع $f(t)$ به فضای سه بعدی $(b, a, W_{\psi} f(a, b))$ نگاشت داده می‌شود و مشخصات زمانی-فرکانسی می‌تواند همزمان در دسترس قرار گیرد. چنانچه ضرایب تبدیل موجک به ازای b ها و a های

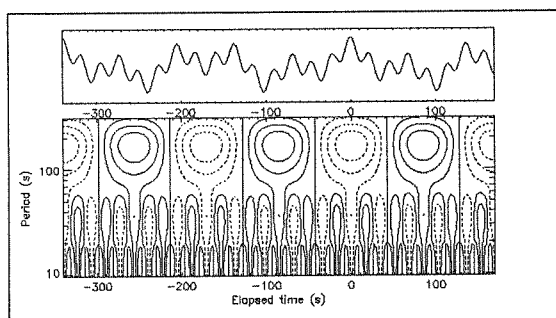
خود تابع نشان داده شده است. همان طور که از شکل مشخص است زمان های وقوع قله و مقیاس مربوطه کاملاً گویا است؛ زیرا در حول یک مقیاس خاص با پریود تقریبی ۸۰ ضرایب حداکثر یا حداقل شده اند، و زمان وقوع قله ها با زمان آن در تبدیل موجک یکسان است. در نمودار بالایی شکل (۸) تابع ایستا شامل چندین فرکانس و در زیر آن صفحه تبدیل موجک مربوطه نشان داده شده است. یکی از فرکانس ها ی تابع کوچک و دو تای دیگر آن بزرگ است. ملاحظه می شود که با استفاده از تبدیل موجک می توان این پریودها و زمان وقوع قله ها را به طور هم زمان به دست آورد.



شکل (۶): خط پر سیگنال ایستا از نوع کسینوسی و خط چین تبدیل موجک مربوط به مقیاسی که موجک مربوطه با نقطه چین نشان داده شده است [۷]



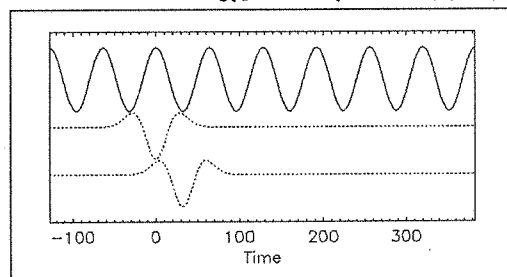
شکل (۷): شکل بالا سیگنال ایستا از نوع کسینوسی و شکل پایین تبدیل موجک مربوطه است [۷]



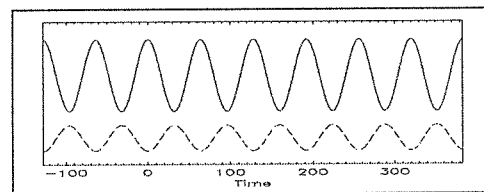
شکل (۸): سیگنال ایستا شامل چندین فرکانس و تبدیل موجک [۷]

در شکل (۹) یک فرآیند غیر ایستا با رابطه $\sin(x^2)$ همراه با تبدیل موجک پیوسته آن نشان داده شده است. با توجه به منحنی های هم تراز تبدیل موجک دیده می شود که فاصله قله ها با افزایش زمان کاهش یافته و مقیاس مربوط به قله ها نیز کاهش یافته است؛ یعنی پریود فرآیند اصلی در طی زمان کاهش

می گیریم. در این صورت مطابق با شکل (۴) برای یک مقیاس ثابت با حرکت پیوسته موجک روی محور زمان می توان تبدیل موجک مربوط به این مقیاس در زمان های مختلف (یعنی b های مختلف) را محاسبه کرد. در واقع، مقیاس از تقسیم پریود موجک در مقیاس مورد نظر بر پریود موجک مادر به دست می آید. در شکل (۵)، تبدیل موجک همان سیگنال کسینوسی برای مقیاس نشان داده شده در شکل (۴) با پریود تقریبی ۸۰ یا مقیاس (۸۰/۸) نمایش داده شده است. در شکل (۶) تبدیل موجک به ازای تعدادی از مقیاس ها رسم شده است. محدوده مقیاس ها از مقیاس های بزرگ در منحنی a تا مقیاس های کوچک در منحنی e است. در این شکل نمودار بالایی تابع f، منحنی های با خط چین بزرگ به تبدیل موجک و منحنی های با خط چین کوچک به موجک محاسبه شده مربوط است.



شکل (۴): خط پر سیگنال ایستا از نوع کسینوسی و نقطه چین موجک مربوط به مقیاس خاص که به صورت پیوسته روی محور زمان با تغییر b حرکت می کند [۷]



شکل (۵): خط پر سیگنال ایستا از نوع کسینوسی و نقطه چین تبدیل موجک مربوط به پریود ۸۰ می باشد [۷]

همان طور که ملاحظه می شود در مقیاس های بزرگ مطابق منحنی a مقدار تبدیل ناچیز است. با کوچک تر شدن مقیاس در منحنی b مقدار تبدیل افزایش می یابد و با کوچک تر شدن مقیاس در منحنی c با مقیاس تقریبی برابر با ۸ ضرایب تبدیل به حداکثر خود می رسد و با ادامه روند کوچک کردن مقیاس ها به ترتیب در منحنی های d و e مقدار تبدیل کاهش می یابد. به عبارت دیگر، پریود موجک در منحنی c تقریباً برابر پریود تابع است و به علت تطابق منحنی ها با یکدیگر مقدار تبدیل در حول این مقیاس به حداکثر خود می رسد و بدین ترتیب، با استفاده از تبدیل موجک پریود تابع ایستا را به همراه زمان وقوع آن می توان به دست آورد.

در شکل (۷) نمایش پیوسته تبدیل موجک تابع فوق در زیر

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} W_\psi f(a,b) \psi_{a,b}(t) da db \quad (7)$$

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{(|\hat{\psi}(w)|)^2}{w} dw < +\infty$$

همان گونه که در شکل میانی (۱۱) ملاحظه می‌شود مناطق آلوده به اغتشاشات تصادفی خود را به صورت قله‌های کوچک و نزدیک به هم در محدوده فرکانس بالا یا پریود کم نشان می‌دهند. یکی از مهم‌ترین کاربردهای تئوری موجک بازسازی اطلاعات با حداقل حافظه با حذف اغتشاشات است. در شکل پایینی (۱۱) فرآیند ابتدایی تنها برای محدوده‌ای از فرکانس‌ها؛ که شامل آلودگی نیست بازسازی شده است؛ یعنی با ذخیره کمتر اطلاعات با تقریب مناسب فرآیند اولیه را در همان زمان که اغتشاشات تصادفی را حذف کرده‌ایم؛ بازسازی نموده ایم.

۳- حل معادله ارتعاش سیستم یک درجه آزادی با استفاده از تبدیل موجک

معادله ارتعاش سیستم یک درجه آزادی با فرکانس طبیعی ω_n و نسبت میرایی ξ_n را در نظر می‌گیریم که تحت شتاب پایه g قرار گرفته است و طبق معادله (۸) بیان می‌شود:

$$\ddot{x} + 2\xi_n \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = -\ddot{u}_g \quad (8)$$

با اعمال تبدیل موجک به دو سمت رابطه (۸) داریم:

$$W_\psi \ddot{x}(a,b) + 2\xi_n \omega_n W_\psi \dot{x}(a,b) + \omega_n^2 W_\psi x(a,b) = -W_\psi \ddot{u}_g(a,b) \quad (9)$$

که در آن $W_\psi \ddot{x}$, $W_\psi \dot{x}$, $W_\psi x$ و $W_\psi \ddot{u}_g$ به ترتیب تبدیل موجک \ddot{x} , \dot{x} , x و \ddot{u}_g است. با دو بار انتگرال گیری از عبارت $W_\psi \ddot{x}(a,b)$ و این حقیقت که موجک و مشتقات آن زوال سریع دارند، می‌توان نتیجه گرفت:

$$W_\psi \ddot{x}(a,b) = \frac{1}{a^2} W_\psi x(a,b) \quad (10)$$

همچنین مشتق مرتبه دوم $W_\psi x(a,b)$ نسبت به b را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

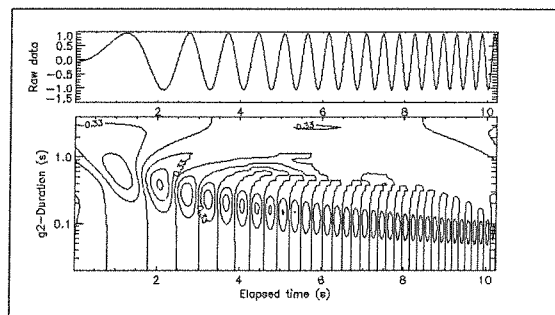
$$\frac{\partial^2}{\partial b^2} W_\psi x(a,b) = \frac{\partial^2}{\partial b^2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (11)$$

با ۲ بار مشتق گیری از سمت راست رابطه (۱۱) و استفاده از قانون زنجیره ای در مشتق داریم:

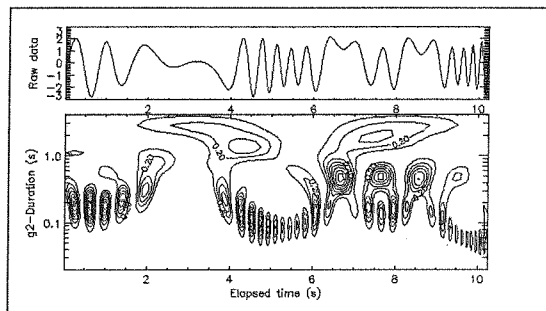
$$\frac{\partial^2}{\partial b^2} W_\psi x(a,b) = \frac{1}{a^2} W_\psi x(a,b) \quad (12)$$

از (۱۰) و (۱۲) داریم:

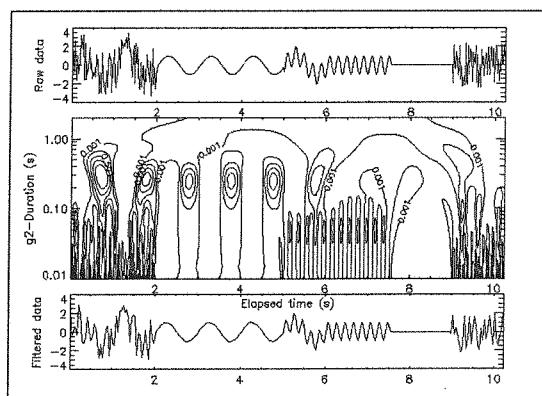
می‌یابد. ملاحظه می‌شود که این خصوصیات کاملاً با مشخصات خود فرآیند منطبق است. در شکل (۱۰) فرآیندی غیر ایستا با تغییرات زیاد محتوای فرکانسی به همراه تبدیل موجک آن نمایش داده شده است و ملاحظه می‌شود تبدیل موجک توانسته فرکانس‌ها را بر حسب زمان وقوع تفکیک کند. در شکل (۱۱) فرآیند غیر ایستا با تغییرات زیاد محتوای فرکانسی؛ که در محدوده‌ای از زمان آلوده به اغتشاش است، همراه با تبدیل موجک و عکس تبدیل موجک نمایش داده شده است. تبدیل معکوس موجک مطابق رابطه (۷) بیان می‌شود:



شکل (۹): شکل بالا سیگنال مربوط به فرآیند غیر ایستا و شکل پایین تبدیل موجک مربوطه است [۷]



شکل (۱۰): شکل بالا سیگنال مربوط به فرآیند غیر ایستا با تغییرات شدید فرکانسی و شکل پایین تبدیل موجک مربوطه است [۷]



شکل (۱۱): شکل بالا سیگنال مربوط به فرآیند غیر ایستا و شکل میانی تبدیل موجک مربوطه و شکل پایین تبدیل معکوس موجک با حذف اغتشاشات تصادفی فرآیند است [۷]

در روابط بالا نمادهای زیر برقرار است:

$$\psi^* = \bar{\psi}; \bar{\psi}_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^* \left(-\frac{t}{a}\right)$$

$$W_\psi f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a}\right) dt = f^* \bar{\psi}_a(b)$$

با توجه به رابطه (۱۵)، مشخص می‌شود که توانسته‌ایم بین ضرایب تبدیل موجک ورودی و پاسخ، رابطه‌ای برقرار سازیم؛ بنابراین می‌توان پاسخ را با توجه به ضرایب تبدیل ورودی حدس زد. در ادامه، چند نمونه از تفسیر پاسخ قبل از حل، با توجه به ضرایب تبدیل ورودی با مشخصات سیستم و موجک به شرح زیر ارائه می‌شود:

- مشخصات سیستم یک درجه آزادی:

$$\chi_n = 0.5 \quad T_n = \frac{1}{2} \text{ sec}$$

- نوع موجک: در محاسبات از موجک از خانواده "Morlet" استفاده شده است.

- سیگنال‌های ورودی در محاسبات g_n فرض شده‌اند.

مثال الف) در شکل (الف-۱۲)، ورودی سیستم؛ که از نوع تناوبی حاصل از کنار هم گذاشتن دو سیگنال با پریودهای مختلف است، نشان داده شده است. همان‌گونه که در شکل (ب-۱۲) ملاحظه می‌شود ضرایب تبدیل موجک حول دو مقیاس منطبق بر زمان وقوع، حداکثر مطلق خود را به دست آورده‌اند. با توجه به ضرایب تبدیل ورودی، انتظار داریم که ضرایب تبدیل پاسخ نیز در همان مقیاس‌ها تحریک شوند. بنابراین برای نشان دادن صحت این قضیه، ضرایب تبدیل ورودی بین این مقیاس‌های غالب را برابر صفر قرار می‌دهیم و در محاسبه ضرایب تبدیل موجک پاسخ، از ضرایب تبدیل ورودی حول دو مقیاس غالب استفاده می‌کنیم. در شکل (پ-۱۲)، ضرایب پاسخ و باندهایی که در آن ضرایب صفر می‌باشند، نشان داده شده است. در شکل (ت)، پاسخ با استفاده از تبدیل معکوس موجک به دست آمده و در شکل (ج) پاسخ که با یکی از روش‌های عددی مرسوم، روش صریح گام به گام زمانی رنگ کوتاه محاسبه و در شکل (ح) مقایسه آنها با یکدیگر نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود با اینکه فقط از دسته‌ای از ضرایب برای محاسبه پاسخ استفاده کرده‌ایم؛ لیکن جواب‌ها با تقریب خوبی منطبق بر پاسخ واقعی است. حال با استفاده از این مفهوم در مثال بعدی، اغتشاشات تصادفی مربوط به یک فرآیند غیر ایستا را حذف کرده و پاسخ را به دست می‌آوریم.

$$\frac{\partial^2}{\partial b^2} W_\psi x(a, b) = W_\psi \ddot{x}(a, b) \quad (13)$$

و با عملیات مشابه برای $W_\psi \dot{x}(a, b)$ داریم:

$$\frac{\partial}{\partial b} W_\psi x(a, b) = W_\psi \dot{x}(a, b) \quad (14)$$

با جاگذاری معادلات (۱۳) و (۱۴) در (۹) داریم:

$$\frac{\partial^2}{\partial b^2} W_\psi x(a, b) + 2 \cdot \xi_n \cdot \omega_n \cdot \frac{\partial}{\partial b} W_\psi x(a, b) + \omega_n^2 \cdot W_\psi x(a, b) = -W_\psi \ddot{u}_g(a, b) \quad a, b \in \mathcal{R}$$

خروجی رابطه (۱۵) به ازای هر a ثابت، ضرایب تبدیل موجک پاسخ x در مقیاس a است؛ زیرا $W_\psi \ddot{u}_g(a, b)$ و ω_n جزء و معکوس موجک طبق رابطه (۷) می‌توان $x(t)$ را محاسبه کرد [۶]. در حالت کلی چنانچه $W_\psi f(a, b)$ فقط برای $a < a_0$ موجود باشند برای بازسازی $f(t)$ به اطلاعات مکمل برای $a > a_0$ نیاز داریم [۱].

این امر با معرفی تابع مقیاس ϕ (scaling function) برای a های بزرگ تر از a_0 امکان پذیر است. مدول تبدیل فوریه آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} (|\hat{\phi}(w)|)^2 &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (|\hat{\psi}(a \cdot w)|)^2 da}{1} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(|\hat{\psi}(\zeta)|)^2}{\zeta} d\zeta \end{aligned} \quad (16)$$

که قسمتی موهومی تابع $\hat{\phi}$ می‌تواند به صورت دلخواه انتخاب می‌شود. می‌توان ثابت کرد که $\|\phi\| = 1$ است و با توجه به تعریف C_ψ در (۷) داریم:

$$\lim_{w \rightarrow 0} (|\hat{\phi}(w)|)^2 = C_\psi \quad (17)$$

اگر $\phi_a(t)$ را به شکل زیر نشان دهیم:

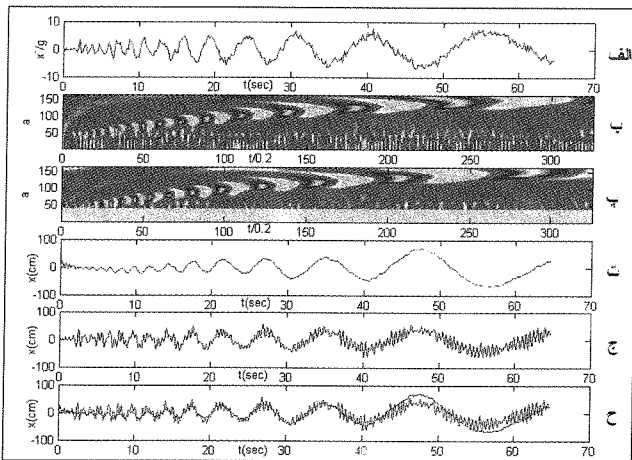
$$\phi_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \phi\left(\frac{t}{a}\right), \bar{\phi}_a(t) = \phi_a^*(-t) \quad (18)$$

می‌توان نشان داد که تعریف تابع f در محدوده فرکانس‌های پایین برابر است با:

$$Lf(a, b) = \langle f(t), \frac{1}{\sqrt{a}} \phi\left(\frac{t-b}{a}\right) \rangle = f^* \bar{\phi}_a(b) \quad (19)$$

بنابراین رابطه (۷) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم [۱]:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{C_\psi} \int_0^{a_0} W_\psi f(a, \cdot) * \psi_a(t) \frac{da}{a^2} + \\ &\quad \frac{1}{C_\psi \cdot a_0} Lf(a_0, \cdot) * \phi_{a_0}(t) \end{aligned} \quad (20)$$



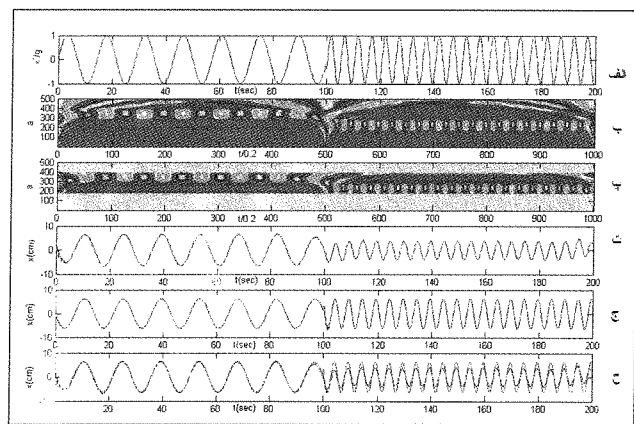
شکل (۱۳): الف) ورودی سیستم به صورت غیر ایستا همراه با

اغتشاشات تصادفی؛ ب) ضرایب تبدیل موجک ورودی؛ پ) ضرایب تبدیل موجک پاسخ و باندهایی که در آن ضرایب صفر می باشند؛ ت) پاسخ با استفاده از تبدیل معکوس موجک؛ ج) پاسخ که به روشهای عددی مرسوم محاسبه شده؛ ح) مقایسه پاسخها با یکدیگر

مثال ج) در این مثال [۳]، ورودی، شتاب نگاشت ال سنترو

است. در شکل (الف-۱۴)، شتاب نگاشت ورودی؛ در شکل (ب) ضرایب تبدیل موجک آن و در شکل (پ)، ضرایب تبدیل پاسخ با استفاده از ضرایب پاسخ ورودی محاسبه و نشان داده شده است. در شکل (ت) با استفاده از تبدیل معکوس موجک پاسخ محاسبه شده و در شکل (ج) پاسخ با روش صریح گام به گام زمانی رنگ کوتاه محاسبه و در شکل (ح) مقایسه دو پاسخ آورده شده است. برای فهم مناسبتر ارتباط ضرایب تبدیل موجک ورودی و پاسخ مفهوم انرژی را؛ که به صورت مربع ضرایب تبدیل موجک تعریف می شود، ارائه می کنیم.

در شکل (الف-۱۵)، که انرژی ورودی در برابر زمان و مقیاس رسم شده است، ملاحظه می شود که انرژی آن در حول مقیاس خاصی متمرکز شده است. بنابراین، انتظار داریم که انرژی پاسخ در فضای تبدیل یافته موجک نیز چنین رفتاری از خود نشان بدهد. انرژی پاسخ در برابر زمان و مقیاس در شکل (ب-۱۵) نشان داده شده است که نشانگر تمرکز انرژی تقریباً در حول همان مقیاسهای مورد نظر است و همچنین ملاحظه می شود که شدت تمرکز در پاسخ بیشتر از ورودی می باشد. در نتیجه، انتظار داریم پاسخ، رفتار منظم تر و یا به عبارتی تناوبی وار از خود نشان دهد که این موضوع با توجه به شکل (ت-۱۴) تایید می شود.



شکل (۱۴): الف) ورودی سیستم؛ ب) ضرایب تبدیل موجک ورودی؛ پ)

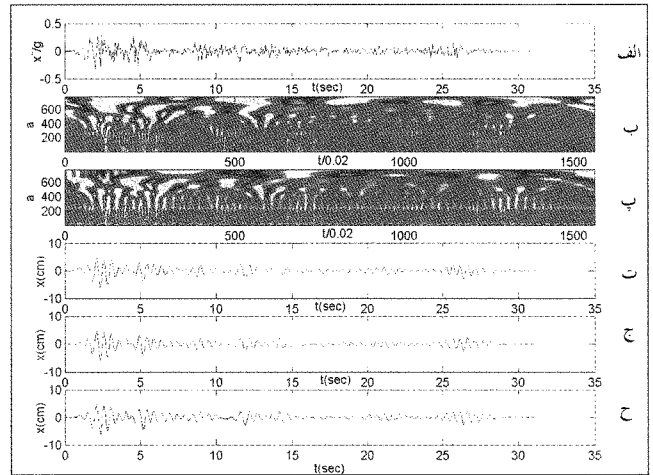
ضرایب تبدیل موجک پاسخ و باندهایی که در آن ضرایب صفر است؛ ت) پاسخ با استفاده از تبدیل معکوس موجک؛ ج) پاسخ که به روشهای عددی محاسبه شده است؛ ح) مقایسه پاسخها با یکدیگر

مثال ب) در شکل (الف-۱۳)، یک فرآیند غیر ایستا همراه با

اغتشاشات تصادفی و در شکل (ب-۱۳)، ضرایب تبدیل تابع موجک آن نشان داده شده است. همان گونه که ملاحظه می شود از آنجایی که اغتشاشات، از نوع فرآیندهای با محتوای فرکانسی بالا می باشند در تصویر تبدیل موجک، خود را در مقیاس های کوچک نشان می دهند، درحالی که در مقیاس های بزرگ تر، به صورت صعودی در برابر زمان، محل وقوع قله های خود فرآیند اتفاق می افتد. بنابراین، با تبدیل موجک بخوبی زمان و مقیاس وقوع قله ها را می توان همزمان در اختیار داشت. با توجه به شکل (ب) انتظار داریم که ضرایب پاسخ نیز در همان محدوده حداکثر شدن ضرایب ورودی، حداکثر شوند. حال چنانچه بخواهیم اغتشاشات تصادفی را حذف کنیم، فقط کافی است از ضرایب موجک با مقیاس پایین؛ که به اغتشاشات مربوط است، در ادامه محاسبات صرف نظر کنیم. در شکل (پ) ضرایب محاسبه شده پاسخ از روی ضرایب تبدیل موجک ورودی که از مقیاسهای پایین آن صرف نظر شده و در محاسبات برابر با صفر مد نظر گرفته شده اند، همراه با باندی که ضرایب صفر می باشند، آورده شده است و از روی این ضرایب تبدیل مطابق با شکل (ت) پاسخ سیستم با تبدیل معکوس موجک محاسبه شده است. در شکل (ج)، پاسخ سیستم بدون حذف اغتشاشات تصادفی سیگنال ورودی با روش صریح گام به گام زمانی رنگ کوتاه آورده شده و در شکل (ح) پاسخ محاسبه شده از دو روش مقایسه شده است. ملاحظه می شود که توانسته ایم از روی ضرایب تبدیل ورودی، به صورت کیفی ضرایب تبدیل پاسخ را حدس بزنیم که می توان این نتیجه را از مقایسه شکل های (ب، پ-۱۳) به دست آورد. همچنین توانسته ایم در محاسبه پاسخ، اثر اغتشاشات تصادفی را حذف کنیم.

۲- با استفاده از تبدیل موجک با دقت مناسب می‌توان در فضای زمانی- فرکانسی اطلاعات را زمان و فرکانس در اختیارداشت [۱]، [۲] و [۴].

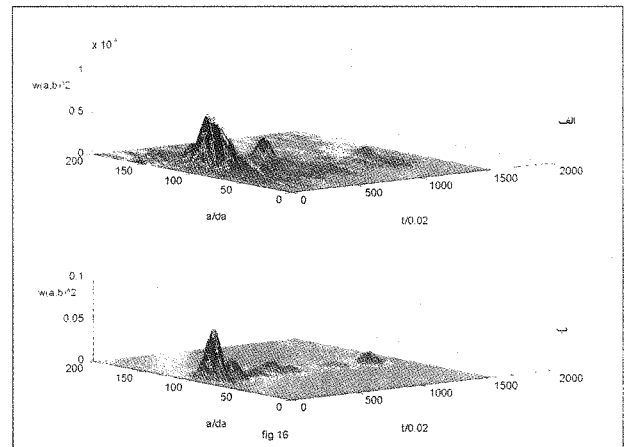
۳- همان گونه که ملاحظه شد با استفاده از ضرایب انرژی تبدیل موجک می‌توان محدوده فرکانس هایی را که انرژی ورودی حول آنها متمرکز است، شناسایی کرد و با استفاده از آن فرکانس‌های تحریک شده و کیفیت پاسخ را قبل از محاسبات دقیق به دست آورد؛ همچنین می‌توان در حین محاسبات آلودگی‌های مربوط به اغتشاشات تصادفی را از داده‌های اولیه حذف کرد که این خود به حذف اثر آنها در پاسخ منجر خواهد شد.



شکل (۱۴): الف) ورودی سیستم؛ ب) ضرایب تبدیل موجک ورودی؛ پ) ضرایب تبدیل موجک پاسخ؛ ت) پاسخ با استفاده از تبدیل معکوس موجک؛ ج) پاسخ که به روش های عددی مرسوم محاسبه شده است؛ ح) مقایسه پاسخ ها با یکدیگر

۵- مراجع

- [۱] STEPHANE MALLET. "A WAVELET TOUR OF SIGNAL PROCESSING", ACADEMIC PRESS, 1998
- [۲] C.SIDNEY BURRUS, RAMESH A.GOPINATH, AND HAITAO GAO "INTRODUCTION TO WAVELETS AND WAVELET TRANSFORM", PRENTICE HALL, 1998
- [۳] ANIL K. CHOPRA, "DYNAMICS OF STRUCTURES", PRENTICE HALL INTERNATIONAL
- [۴] M.I. TODOROVSKA, "ESTIMATION OF INSTANTANEOUS FREQUENCY OF SIGNALS USING THE CONTINUOUS WAVELET TRANSFORM", REPORT CEOL07, UNIVERSITY OF SEUTHERN CALIFORNIA, 2001.
- [۵] T.Kijewski & A.Kareem, "Wavelet Transform and System Identification in Civil Engineering", Computer Aided Civil and Infrastructure Engineering 18 (2003) 339-355.
- [۶] BISWAJIT BASU, VINAY K. GUPTA, "STOCHASTIC SEISMIC RESPONSE OF SINGLE - DEGREE - OF - FREEDOM SYSTEMS THROUGH WAVELETS", ENGINEERING STRUCTURES 22 (2000) 1714 - 1722
- [۷] JACQUES LCWALLE, SYRACUSE UNIVERSITY, "TUTORIAL ON CONTINUOUS WAVLET ANALYSIS OF EXPERIMENTAL DATA". APRIL 1995



شکل (۱۵): الف) توزیع انرژی ورودی سیستم در فضای تبدیل موجک؛ ب) توزیع انرژی خروجی سیستم در فضای تبدیل موجک

۴- نتیجه گیری

استفاده از تئوری موجک ابزاری کارا برای تحلیل و آنالیز بسیاری از فرآیندها و سیگنال‌ها است زیرا:

۱- ضرایب موجک به سرعت برای دسته وسیعی از فرآیندها و سیگنال‌ها در محدوده زیادی از مقیاس‌ها (a) و زمان (b) زوال پیدا می‌کند؛ بنابراین، تبدیل موجک روشی کارا در ذخیره اطلاعات از بین بردن، آلودگی‌ها تصادفی و ... است [۶].