

گام زمانی بهینه در روش رهایی پویا

جواد علامتیانⁱ؛ مهران کدخدایانⁱⁱ

چکیده

روش رهایی پویا راهکار تکراری حل سامانه معادله‌ها است. در این مقاله، گام زمانی نوینی برای روش رهایی پویا رابطه سازی خواهد شد. روش پیشنهادی با کمینه کردن نیروی نامیزان هر تکرار، گام زمانی را در دسترس قرار می‌دهد. کارایی این رابطه سازی با نگره‌های ریاضی و نمونه‌های عددی بررسی می‌شود. ثابت می‌شود که استفاده از گام زمانی بهینه مرتبه همگرایی روش رهایی پویا را در تحلیل‌های خطی و ناخطی به ترتیب، به بی‌نهایت و دو افزایش می‌دهد. برای سنجش عددی روش پیشنهادی نیز سازه‌های صفحه‌ای همگن و قاب خمشی با رفتارهای خطی و ناخطی هندسی تحلیل می‌شوند. نمونه‌های عددی نشان می‌دهند که استفاده از گام زمانی بهینه شمار تکرارهای همگرایی روش رهایی پویا را کاهش می‌دهد؛ به سخن دیگر، هزینه و زمان تحلیل کاهش می‌یابد. در نتیجه، رابطه سازی پیشنهادی برای گام زمانی بهینه کارایی ریاضی و عددی بالاتری نسبت به دیگر روش‌های متداول (گام زمانی ثابت) دارد؛ به گونه‌ای که سبب افزایش قابل توجه نرخ همگرایی روش رهایی پویا می‌شود.

کلمات کلیدی

رهایی پویا، گام زمانی، نیروی نامیزان، تحلیل خطی و ناخطی هندسی

Optimum Time Step for Dynamic Relaxation Method

J. Alamatian; M. Kadkhodayan

ABSTRACT

Dynamic Relaxation is an iterative technique, which is used as an equation solver. In this paper, a new time step will be formulated for Dynamic Relaxation method. The suggested technique is based on the minimization of residual force in each iteration. Mathematical theories and numerical examples are used to verify efficiency of the formulation. By using optimum time step, mathematical convergence rank of DR algorithm will be infinite and two in linear and nonlinear analyses, respectively. To investigate the capability of the proposed formulation, isotropic plates and frame structure by linear and geometrical nonlinear behaviors are analyzed. This study shows that optimum time step reduces number of convergence iterations. Therefore, the cost and the computational time will be reduced. As a result, the suggested formulation for optimum time step has higher mathematical and numerical efficiency than other common methods, such as constant time step. Therefore, the convergence rate of DR iterations will considerably improve.

KEYWORDS

Dynamic Relaxation, Time step, Residual force, Linear and geometrical nonlinear analysis

ⁱ دانشجوی دکتری عمران، دانشگاه فردوسی مشهد و عضو هیأت علمی گروه عمران دانشگاه آزاد اسلامی مشهد؛ مشهد، دانشگاه فردوسی، گروه عمران، صندوق پستی ۹۱۷۷۵-۱۱۱۱: alamatian@yahoo.com
ⁱⁱ دانشیار گروه مکانیک؛ دانشگاه فردوسی مشهد؛ m_kadkhodayan@yahoo.com

گام انتهایی تحلیل هر سازه، حل سامانه معادله‌های حاکم بر رفتار آن است. راهکارهای گوناگونی برای حل چنین سامانه‌ای وجود دارد. در این میان، روش‌های تکراری از کارآمدترین فرآیندها می‌باشند. فن‌رهای پویا در دسته‌بندی این راهکارها قرار دارد [۱]. تعبیر فیزیکی فرآیند رهایی پویا، به دست آوردن پاسخ حالت پایدار دستگاه دینامیکی است. برای انجام این کار، دستگاه معادله‌های ایستا به یک محیط دینامیکی ساختگی منتقل می‌شود و با استفاده از روش‌های عددی، پاسخ حالت پایدار آن به دست می‌آید.

اتر، نخستین بار واژه رهایی پویا را به کار برد. این روش از قانون دوم ریچاردسون به دست می‌آید. فرانکل روش مزبور را گسترش داد و آن را در مسأله‌های انتقال حرارت به کاربرد [۲]. ولش و کسل با معرفی نگره جرم ساختگی، راه را برای بهبود تکرارهای رهایی پویا، با بهره‌جستن از روش‌های عددی دینامیک سازه‌ها هموار کردند. برو و برتن رابطه‌های روش رهایی پویا را با کاهش مرتبه معادله تعادل دینامیکی به یک، به دست آوردند و بانوشتن شرط‌های پایداری عددی برای جرم و میرایی، آن را در مسأله‌های خطی و ناخطی قابها به کار بردند [۳]. همزمان، وود نشان داد نرخ همگرایی روش رهایی پویا در مسأله‌های خطی بیشتر از راهکارهای نیمه تکراری است [۴]. بونس، میرایی بحرانی را در تکرارهای رهایی پویا تخمین زد [۵]. آلوار نیز تخمین پاسخ پایدار را با پنداشتن یک تابع کاهش توانی به دست آورد [۶]. نخستین شرط‌های پایداری نیز به وسیله کسل و هوبس پیشنهاد شد [۷]. فرایز از روش رهایی پویا برای تحلیل ناخطی صفحه‌ها (هندسی و مواد) استفاده کرد و کمیت‌های جرم و میرایی را بهبود داد [۸].

نخستین تحلیل خطا در روش رهایی پویا را پایادراکاکیس انجام داد. وی شیوه‌ای خودکار برای تعیین کمیت‌های ساختگی پیشنهاد کرد [۹]. با وجود این، متداول‌ترین رابطه‌سازی صریح رهایی پویا را آندروود پیشنهاد کرد [۱۰]. گونه دیگر رابطه‌سازی رهایی پویا را فلیپا انجام داد. این راهکار در دسته‌بندی روش‌های ضمنی جا دارد و کمیت‌های جرم و میرایی، از تغییر سختی سازه در زمان ساختگی حساب می‌شوند [۱۱].

در ادامه، زینکوئیز یک راهکار شتاب‌دهنده همگرایی پیشنهاد کرد [۱۲]. شایو و ماردیرسون نیز با وزن‌دار کردن جرم و میرایی هر درجه‌ی آزادی، روش رهایی پویا را برای حل اجزای محدود صفحه‌های خمشی استفاده کردند [۱۳]. سپس، کانگ و زانگ، به ترتیب، رابطه‌هایی برای گام زمانی و

میرایی و حدس نخستین پاسخ پایدار یافتند [۱۴]، [۱۵]. با بهره‌جستن همزمان از روش تفاوت‌های محدود و فن‌رهایی پویا، تروی صفحه‌های قطاعی زیر اثر بار یکنواخت را تحلیل کرد [۱۶]. باردت نیز روش رهایی پویا را برای سنجش ایستایی مواد دانه‌ریز به کار برد [۱۷]. رامش و کریشنامورتی روش رهایی پویا را با راهکار طول قوس ترکیب کردند و مسیره‌های ایستایی خرپاهای کشسان و مومسان را به دست آوردند [۱۸]. [۱۹]. از سوی دیگر، کدخدایان و همکارانش، حدس نخستین پاسخ پایدار را تصحیح کردند و الگوی میرایی گرهی را پیشنهاد دادند [۲۰]. ترکیب فن‌رهایی پویا با روش‌های تابع اولیه‌گیری عددی مومسانی را نیز این پژوهشگران بررسی کردند [۲۱]. آنها تحلیل کماتشی و پس کماتشی صفحه‌ها را با بهره‌جستن همزمان از معیارهای دینامیکی پایداری و روش رهایی پویا انجام دادند [۲۲]. مونجیزا نگره‌های گوناگون میرایی را در رابطه‌سازی رهایی پویا بررسی کرد [۲۳]. پاسکوالینو و استفان تحلیل ناخطی گسترش کماتش در خطوط لوله را با فن‌رهایی پویا انجام دادند [۲۴]. همزمان، وود و هان راهکار رهایی پویا را برای شکل‌یابی و پایداری سازه‌ها به کار بردند [۲۵]. [۲۶]. در آخرین پژوهش‌ها، از روش رهایی پویا برای تحلیل خطی و ناخطی صفحه‌های مرکب استفاده شده است [۲۷].

۲- رابطه سازی روش رهایی پویا

در روش رهایی پویا سامانه معادله‌های ایستا به محیط دینامیکی ساختگی منتقل می‌شود [۲۰]:

$$\{f\}^n = \{P\}^n \Rightarrow [M]\{\ddot{D}\}^n + [C]\{\dot{D}\}^n + \{f\}^n \quad \{P\}^n \quad (1)$$

در این رابطه، $[M]$ و $[C]$ ، به ترتیب، ماتریس‌های جرم و میرایی ساختگی هستند. همچنین، $\{\ddot{D}\}^n$ ، $\{\dot{D}\}^n$ ، $\{f\}^n$ و $\{P\}^n$ ، به ترتیب بردارهای شتاب، سرعت، نیروی داخلی و بار خارجی را در گام زمانی ساختگی n ام مشخص می‌کنند. با فرض ماتریس جرم و میرایی قطری و استفاده از تفاوت‌های محدود مرکزی، نتیجه زیر به دست می‌آید [۲۰]:

$$\{\ddot{D}\}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2 - \tau^n c^n}{2 + \tau^n c^n} \{\ddot{D}\}^{n-\frac{1}{2}} + \quad (2)$$

$$\frac{2\tau^n}{2 + \tau^n c^n} \left\{ \frac{r_i}{m_{ii}} \right\}^n$$

$$\{D\}^{n+1} = \{D\}^n + \tau^{n+1} \{\ddot{D}\}^{n+\frac{1}{2}} \quad (3)$$

در اینجا، τ^n ، r_i^n و m_{ii}^n ، به ترتیب، گام زمانی، درایه‌های i ام نیروی نامیزان و جرم قطری را در مرحله n ام مشخص می‌کنند. نیروی نامیزان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_R \geq \frac{\sum_{i=1}^q (p_i - f_i^{n+1})^2}{\sum_{i=1}^q (r_i^n)^2} \quad (10)$$

عامل f_i^{n+1} نیروی داخلی درجه آزادی i در گام $n+1$ ام و p_i بار گرهی وارد به درجه آزادی مزبور می‌باشند. در رابطه کنونی، کمیت f_i^{n+1} مجهول است. با استفاده از تفاوت‌های محدود مرکزی، رابطه زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \tau^{n+1} \dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \quad (11)$$

در اینجا، $\dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}}$ نمو زمانی نیروی داخلی درجه آزادی i ام است. با جایگذاری (۱۱) در (۱۰) نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$Z_R \geq 1 + \frac{\left[\sum_{i=1}^q \left(\dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \right] (\tau^{n+1})^2 - 2 \left[\sum_{i=1}^q \left(r_i^n \dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right) \right] \tau^{n+1}}{\sum_{i=1}^q (r_i^n)^2} \quad (12)$$

چنانچه، مشتق یکم Z_R نسبت به τ^{n+1} صفر شود، گام زمانی بهینه نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial Z_R}{\partial \tau^{n+1}} = 0 \Rightarrow \tau_{opt}^{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^q \left(r_i^n \dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)}{\sum_{i=1}^q \left(\dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^2} \quad (13)$$

گام زمانی (۱۳) عامل کاهنده نیروی نامیزان را فرین می‌کند. از سوی دیگر، مشتق دوم Z_R نسبت به τ^{n+1} به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 Z_R}{\partial (\tau^{n+1})^2} = 2 \frac{\sum_{i=1}^q \left(\dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^2}{\sum_{i=1}^q (r_i^n)^2} \geq 0 \quad (14)$$

رابطه (۱۴) همواره بزرگتر از صفر است. بر اساس آزمون مشتق مرتبه دوم، گام زمانی (۱۳)، Z_R و در نتیجه، نیروی نامیزان تکرار $n+1$ ام را کمینه می‌کند. ضریب کاهنده نیروی نامیزان نیز با جایگذاری (۱۳) در (۱۲) به دست می‌آید:

$$Z_R = 1 - \frac{\left[\sum_{i=1}^q \left(r_i^n \dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right) \right]^2}{\left[\sum_{i=1}^q (r_i^n)^2 \right] \left[\sum_{i=1}^q \left(\dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \right]} \leq 1 \quad (15)$$

باید افزود، کمیت Z_R در (۱۵) همواره کوچکتر از یک می‌باشد؛ بنابراین، گام زمانی پیشنهادی پایداری عددی روش را

$$\{R\}^n = \{P\}^n - \{f\}^n = [M]\{\dot{D}\}^n + [C]\{\dot{D}\}^n \quad (4)$$

همچنین، c^n عامل میرایی گام n ام است [۱۰]:

$$[C] = c^n [M] \quad (5)$$

در رابطه‌های تکراری روش رهایی پویا، مقدارهای جرم قطری، عامل میرایی و گام زمانی مجهول می‌باشند. متداول‌ترین راهکار برای تعیین درایه‌های قطری ماتریس جرم، استفاده از نگره دایره گرشگورین است. این نگره، مقدارهای جرم را برای تضمین پایداری عددی روش رهایی پویا ارائه می‌کند [۱۰]:

$$m_{ii}^n \geq \frac{(\tau^n)^2}{4} \sum_{j=1}^q |S_{ij,T}^n| \quad (6)$$

شمار درجه‌های آزادی سازه q و درایه ij از ماتریس سختی مماسی در گام n ام است:

$$S_{ij,T}^n = \frac{\partial f_i^n}{\partial D_j} \quad (7)$$

از سوی دیگر، متداول‌ترین راهکار تعیین عامل میرایی، استفاده از اصل ریلی است [۲۰]:

$$c^n = 2 \left\{ \frac{\left(\{D^n\}^T \{f^n\} \right)}{\left(\{D^n\}^T [M] \{D^n\} \right)^n} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

در متداول‌ترین الگوریتم‌های رهایی پویا گام زمانی ثابت و برابر یک فرض می‌شود. با وجود این، راهکارهایی برای تعیین عامل مزبور، بر اساس اصل ریلی پیشنهاد شده است [۱۴]. در این مقاله، راهکار نوینی برای تعیین گام زمانی پیشنهاد می‌شود.

۳- رابطه سازی گام زمانی بهینه

در روش رهایی پویا، همگرایی به پاسخ با نیروی نامیزان و کارمایه جنبشی سامانه سنجیده می‌شود؛ بنابراین، کمینه شدن نیروی نامیزان، سبب بهبود فرآیند حل خواهد شد. رابطه زیر برای تغییرات نیروی نامیزان، بین دو گام در نظر گرفته می‌شود:

$$\left(\{R\}^{n+1} \right)^T \cdot \{R\}^{n+1} - Z_R \left(\{R\}^n \right)^T \cdot \{R\}^n \quad (9)$$

در اینجا $\{R\}^n$ و $\{R\}^{n+1}$ ، به ترتیب، بردارهای نیروی نامیزان در گام n و $n+1$ ام می‌باشند. عامل Z_R ، سنجش فرآیند حل را به عهده دارد و ضریب کاهنده نیروی نامیزان نامیده می‌شود. روشن است، با کمینه کردن Z_R ، نیروی نامیزان در گام $n+1$ ام کمینه می‌شود. با استفاده از ضرب داخلی و تعریف نیروی نامیزان، Z_R به دست می‌آید:

تضمین می‌کند. برای سازه یک درجه آزادی، گام زمانی بهینه به شکل ساده زیر تبدیل می‌شود:

$$\tau^{n+1} = \frac{r^n}{\dot{f}^{n+\frac{1}{2}}} \quad (16)$$

در این حالت، عامل کاهنده نیروی نامیزان صفر می‌گردد ($Z_R = 0$). به سخن دیگر، پاسخ در نخستین تکرار به دست می‌آید. در رابطه‌های بالا، عاملی با نام نمو زمانی نیروی داخلی ($\dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}}$) وجود دارد. کمیت مزبور با بهره‌جویی از قانون مشتق زنجیره‌ای، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^q S_{ij,T}^{n+\frac{1}{2}} \dot{D}_j^{n+\frac{1}{2}} \quad (17)$$

از آنجا که محاسبه ماتریس سختی مماسی در میان گام دشوار است، از مقدارهای گام پیشین در (۱۷) استفاده می‌شود. در این صورت، رابطه تقریبی زیر در دسترس قرار می‌گیرد:

$$\dot{f}_i^{n+\frac{1}{2}} \approx \sum_{j=1}^q S_{ij,T}^n \dot{D}_j^{n+\frac{1}{2}} \quad (18)$$

ع- مرتبه همگرایی

معیار کارایی روش‌های تکراری، بالا بودن مرتبه همگرایی ریاضی آنهاست. یکی از روش‌های تعیین مرتبه همگرایی، استفاده از دنباله تیلور است. در این شیوه، درجه نخستین مشتق مخالف صفر رابطه تکراری روش را مرتبه همگرایی آن در نظر می‌گیرند. رابطه زیر این مفهوم را می‌رساند [۲۸]:

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n g'(\alpha) + \frac{(\varepsilon^n)^2}{2!} g''(\alpha) + \dots + \frac{(\varepsilon^n)^m}{m!} g^{(m)}(\alpha) + \dots \quad (19)$$

کمیت α ، پاسخ حقیقی سامانه و ε^n خطای گام n ام می‌باشد ($D^n = \alpha + \varepsilon^n$). تابع g به مشخصه‌های فرایند حل وابسته است [۲۸]. این کار برای سازه یک درجه آزادی در دو حالت گام زمانی ثابت و بهینه انجام می‌شود. با جایگذاری (۲) در (۳)، تابع g به دست می‌آید:

$$g(D) = D + \tau^{n+1} \left[\frac{2 - c^n \tau^n}{2 + c^n \tau^n} \dot{D}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{2\tau^n}{(2 + c^n \tau^n) m^n} R^n \right] \quad (20)$$

در اینجا، مقدارهای جرم از (۶) و عامل میرایی توسط (۸) جایگزین می‌شود. نخست، گام زمانی برای تمام تکرارها ثابت و برابر یک فرض می‌شود. تابع g_1 این حالت را نشان می‌دهد:

$$g_1(D) = D + \frac{\left(2 - 4 \sqrt{\frac{S_G}{S_T}} \right) \dot{D}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{8R^n}{S_T}}{2 + 4 \sqrt{\frac{S_G}{S_T}}} \quad (21)$$

کمیت S_G سختی وتری است. سرعت گرهی گام پیشین ($\dot{D}^{n-\frac{1}{2}}$) نیز ثابت است. از سوی دیگر، استفاده از گام زمانی بهینه، به تابع g_2 منجر می‌شود:

$$g_2(D) = D \frac{R^n}{S_T} \quad (22)$$

مشتق‌های یک تابع‌های g_1 و g_2 ، به صورت زیر است:

$$g_1'(\alpha) = 1 + \frac{8}{2 + 4 \sqrt{\frac{S_G}{S_T}}} \quad (23)$$

$$\left[1 - \frac{\left(S_T \frac{\partial S_G}{\partial D} - S_G \frac{\partial S_T}{\partial D} \right) \sqrt{\frac{S_T}{S_G}} \dot{D}^{n-\frac{1}{2}}}{(S_T)^2 \left(2 + 4 \sqrt{\frac{S_G}{S_T}} \right)} \right]_{\alpha} \neq 0$$

$$g_2'(D) = - \frac{R^n \frac{\partial S_T}{\partial D}}{(S_T)^2} \Big|_{\alpha} = 0 \quad (24)$$

باتوجه به مخالف صفر شدن مشتق یک تابع g_1 ، مرتبه همگرایی روش‌هایی پویا با گام زمانی ثابت یک است. از سوی دیگر، مشتق دوم تابع g_2 ، به صورت زیر است:

$$g_2''(D) = \frac{\partial S_T}{\partial D} \Big|_{\alpha} \quad (25)$$

در حالت کلی، (۲۵) مخالف صفر است؛ بنابراین، مرتبه همگرایی روش‌هایی پویا با گام زمانی بهینه، در رفتار ناخطی دو می‌باشد. اگر رفتار سازه خطی فرض شود؛ سختی مماسی در طول تحلیل ثابت باقی می‌ماند؛ بنابراین، می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial S_T}{\partial D} = \frac{\partial^2 S_T}{\partial D^2} = \dots = \frac{\partial^m S_T}{\partial D^m} = \dots = 0 \quad (26)$$

با توجه به (۲۵) و (۲۶)، مشتق‌های دوم و بالاتر تابع g_2 در حالت خطی صفر می‌شوند. در نتیجه، مرتبه همگرایی فن‌هایی پویا با گام زمانی بهینه، در رفتار خطی بی‌نهایت می‌باشد. جدول (۱)، مرتبه همگرایی روش‌هایی پویا را نشان می‌دهد:

جدول (۱): مرتبه همگرایی ریاضی روش رهایی پویا

مرتبه همگرایی	$\tau = 1$		τ_{opt}	
	خطی	ناخطی	خطی	ناخطی
	۱	۱	∞	۲

۵- نمونه‌های عددی

برای سنجش عددی گام زمانی پیشنهادی، سازه‌های صفحه‌ای و قاب خمشی تحلیل شده‌اند. در این سازه‌ها رفتارهای خطی و ناخطی در نظر گرفته می‌شوند. برنامه‌های رایانه‌ای مورد نیاز در نرم‌افزار فرترن نوشته شده و درستی نتیجه‌ها با پاسخ‌های تحلیلی سنجیده شده است. گامهای تحلیل‌ها به صورت زیر می‌باشند:

۱- فرض کنید: $\{D\}^{-\frac{1}{2}} = \{0\}$ ، $\{D\}^0 = \{0\}$ ، $n = 0$

$$e_K = 1e-12 \text{ و } e_R = 1e-6, c^0 = 1, \tau^0 = 1$$

۲- بردار نیروی داخلی سازه را تشکیل دهید.

۳- نیروی نامیزان را از (۴) حساب کنید.

۴- اگر $\sum_{i=1}^n (r_i^n)^2 \leq e_R$ بروید.

۵- جرم را از (۶) و عامل میرایی را از (۸) تعیین کنید.

۶- سرعت‌های گرهی را از (۲) حساب کنید.

۷- اگر $\sum_{i=1}^n \left(\dot{D}_i^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \leq e_K$ بروید.

۸- گام زمانی بهینه را از (۱۳) حساب کنید.

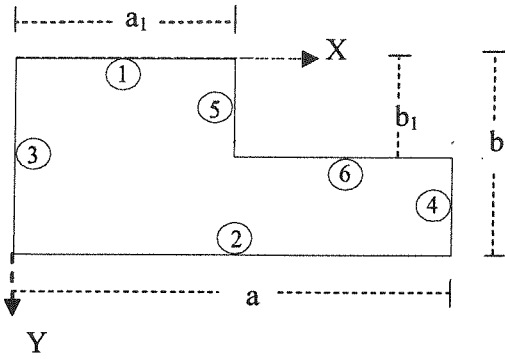
۹- تغییر مکان‌ها را از (۳) به دست آورید.

۱۰- قرار دهید: $n = n + 1$ و از گام (۲) ادامه دهید.

۱۱- چاپ نتیجه‌ها و پایان.

۵-۱- سازه صفحه‌ای همگن

هندسه سازه صفحه‌ای، با بارگذاری گسترده، به صورت شکل (۱) است. ضخامت صفحه $h = 2 \text{ cm}$ و $a = 2b = 200 \text{ cm}$ فرض می‌شوند. صفحه از فولاد با مدول کشسانی $E = 2e6 \text{ kg/cm}^2$ و نسبت پواسون $\nu = 0.3$ ساخته شده است. مقدارهای a_1 و b_1 نیز برای تحلیل‌های مختلف تعیین می‌شوند.



شکل (۱): هندسه سازه صفحه‌ای

رابطه‌های دیفرانسیلی تعادل صفحه با تغییر شکل‌های بزرگ در مختصات کارتیزین به صورت زیر است [۲۲]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q = 0 \quad (29)$$

در تغییر شکل‌های کوچک، از اثر نیروها و تغییر مکان‌های درون صفحه‌ای چشم پوشی می‌شود ($N_x=0, N_y=0, u=0, v=0$). نیروهای داخلی نیز از تابع اولیه عددی حساب می‌شوند:

$$(N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, z\sigma_x, z\sigma_y, z\tau_{xy}) dz \quad (30)$$

رابطه بین تنش‌ها و کرنش‌ها از قانون هوک به دست می‌آید [۲۹] و کرنش‌ها نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (31)$$

کرنش و انحنای محور خنثی به تغییر مکان‌های درون (u, v) و بیرون صفحه (w) وابسته می‌باشند:

$$\begin{aligned} \epsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \epsilon_y^0 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\kappa_{xy} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

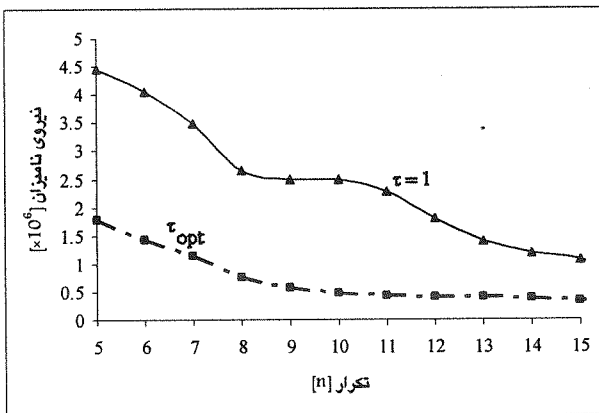
معادله‌های دیفرانسیلی تعادل، با روش تفاوت‌های محدود و استفاده از یک شبکه 16×16 گرهی حل می‌شوند. مشتق‌های نیروها و تغییر مکان‌های هر گره به صورت عددی به دست می‌آیند. نخست، نتیجه‌های عددی با پاسخ‌های دقیق مقایسه می‌شوند. برای انجام این کار، $a_1=200^{cm}$ و $b_1=0$ فرض می‌شود (صفحه مستطیلی). جدول (۲) خطای روش رهایی پویا را برای چند صفحه مستطیلی با شرط‌های مرزی مختلف نشان می‌دهد [۲۰]. در اینجا، تکیه‌گاه ساده با S، مرز گیردار با C و لبه آزاد با F مشخص شده است. همچنین، S.D. و L.D. به ترتیب تحلیل

خطی و ناخطی (تغییر شکل‌های بزرگ) را نشان می‌دهند.

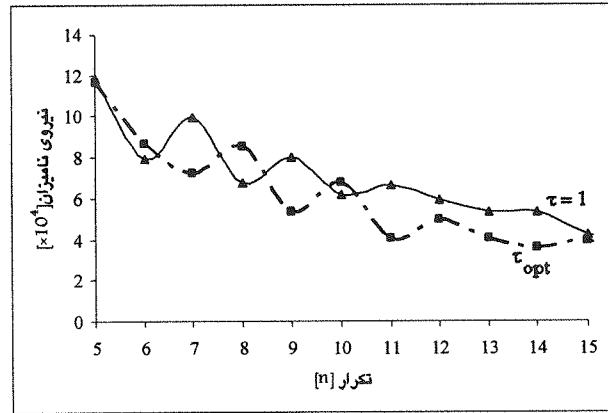
جدول (۲) نشان می‌دهد دقت پاسخ‌های روش رهایی پویا مناسب است. به سخن دیگر، خطاهای عددی روش محدود می‌باشند. برای بررسی اثر گام زمانی بهینه، $a_1=100^{cm}$ و $b_1=50^{cm}$ فرض می‌شود (شکل L). جدول (۳) تکرارهای همگرایی فن رهایی پویا را با گام زمانی ثابت و بهینه نشان می‌دهد. همچنین، تغییرات نیروی نامیزان و کارمایه جنبشی صفحه L2 برای تکرارهای ۵ تا ۱۵ در شکل‌های (۲)، (۳)، (۴) و (۵) رسم شده‌اند.

جدول (۲): مقایسه نتیجه‌های عددی و تحلیلی در صفحه‌های مستطیلی

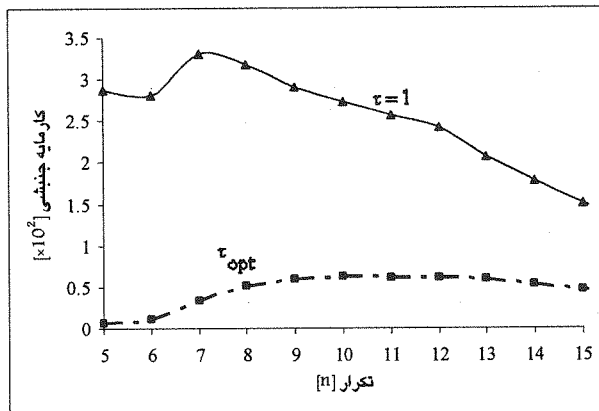
صفحه	شرط‌های مرزی						تحلیل	$\frac{12qb^4(1-\nu^2)}{Eh^4}$	$\frac{w_{max}}{h}$		خطا % $\frac{(w_{max})_{DR} - (w_{max})_A}{(w_{max})_A} \times 100$
	۱	۲	۳	۴	۵	۶			تحلیلی (A)	عددی (DR)	
R1	C	C	C	C	-	-	L.D.	۱۰۰۰	۱/۲۰	۱/۲۴۶۵	+۳/۸۸
R2	C	C	C	C	-	-	S.D.	۱۰۰۰	۲/۵۴	۲/۵۳۷۴	-۰/۱
R3	S	S	C	C	-	-	S.D.	۵۰۰	۱/۲۰	۱/۲۰۳۲	+۰/۲
R4	S	S	C	F	-	-	S.D.	۵۰	۲/۹۱	۲/۷۹۶۲	-۳/۹
R5	S	S	S	F	-	-	S.D.	۵۰	۵/۶۸	۵/۴۲۶۷	-۴/۵



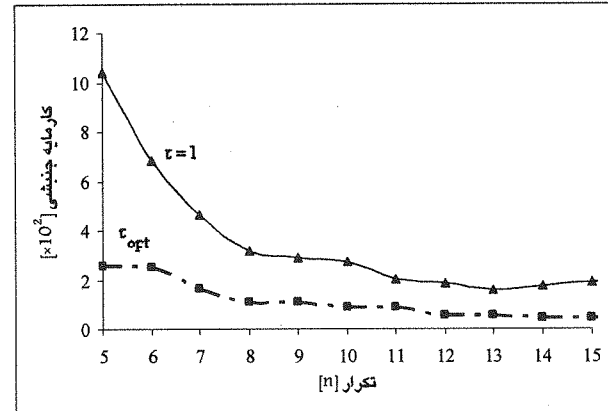
شکل (۴): تغییرات نیروی نامیزان در تحلیل ناخطی صفحه L2



شکل (۲): تغییرات نیروی نامیزان در تحلیل خطی صفحه L2



شکل (۵): تغییرات کارمایه جنبشی در تحلیل ناخطی صفحه L2



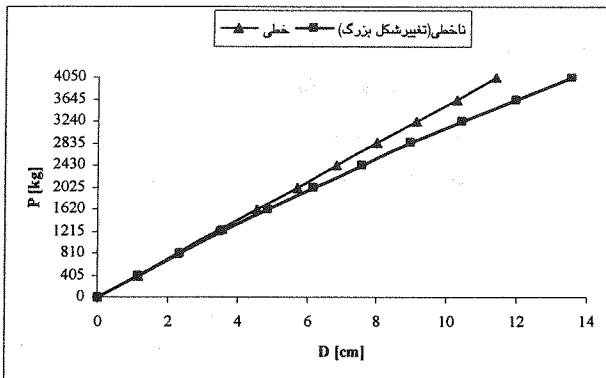
شکل (۳): تغییرات کارمایه جنبشی در تحلیل خطی صفحه L2

جدول (۳): تکرارهای همگرایی صفحه‌های L شکل

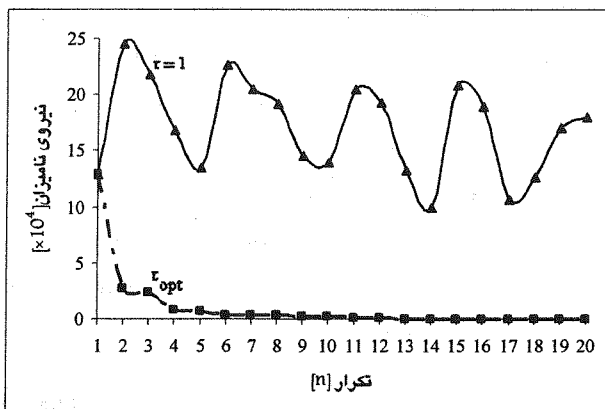
صفحه	شرطهای مرزی						$\frac{12qb^4(1-\nu^2)}{Eh^4}$	تحلیل	$\frac{w_{max}}{h}$	تعداد تکرارها		بهبود %
	۱	۲	۳	۴	۵	۶				$\tau = 1$	τ_{opt}	
L1	C	C	C	S	S	C	۱۰۰۰	S.D.	۱/۵۷۸۲	۵۰۰	۴۷۲	۵/۶
									L.D.	-۰/۹۹۸۹	۲۸۵	۲۲۵
L2	S	C	C	F	S	F	۵۰۰	S.D.	۱/۱۰۸۳	۵۷۱	۵۳۲	۶/۸
									L.D.	-۰/۷۷۵۰	۵۰۳	۴۲۹
L3	F	C	S	C	S	F	۵۰۰	S.D.	۲/۹۵۲۳	۸۴۰	۷۵۹	۹/۶
									L.D.	۱/۲۹۵۸	۶۹۵	۵۴۲

۵-۲- قاب ساختمانی دوبعدی

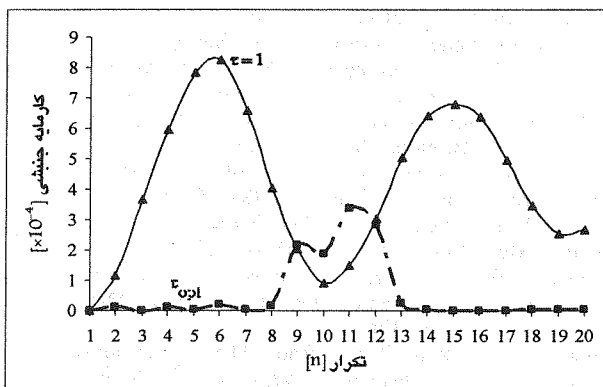
مشخصات هندسی و بارگذاری یک قاب چهار طبقه و سه دهانه به صورت شکل (۶) است. ستون‌های طبقه‌های یکم و دوم از مقطع 2IPE180 و ستون‌های طبقه‌های سوم و چهارم از مقطع 2IPE160 ساخته شده‌اند. تیرها نیز IPE200 می‌باشند. این سازه در دو حالت تغییرشکل‌های کوچک (خطی) و بزرگ (ناخطی هندسی) تحلیل می‌شود. رابطه‌سازی تحلیل ناخطی هندسی برپایه روش اجزای محدود در مختصات هم‌چرخشی انجام می‌پذیرد [۱]. بارگذاری این سازه در ده نمو انجام می‌شود. جدول (۴) شمار تکرارهای همگرایی را برای گام زمانی ثابت و بهینه نشان می‌دهد. مسیر ایستایی خطی و ناخطی تغییرمکان درجه آزادی D نیز در شکل (۷) رسم شده است. از سوی دیگر، شکل‌های (۸) و (۹) تغییرات نیروی نامیزان و کارمایه جنبشی سازه را در بیست تکرار نخستین نمو دهم بارگذاری تحلیل ناخطی، نشان می‌دهند.



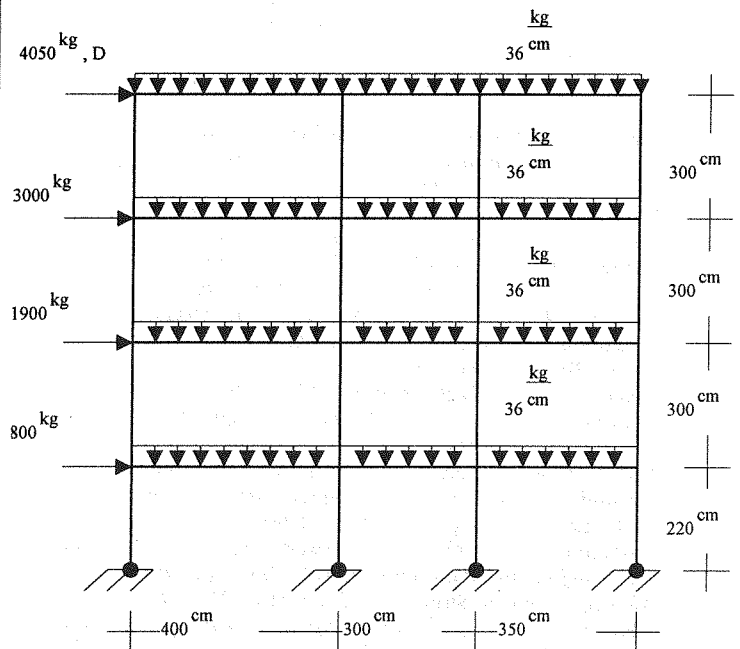
شکل (۷): مسیر ایستایی قاب ساختمانی دوبعدی



شکل (۸): تغییرات نیروی نامیزان در تحلیل خطی قاب دوبعدی



شکل (۹): تغییرات کارمایه جنبشی در تحلیل خطی قاب دوبعدی



شکل (۶): قاب ساختمانی دوبعدی

جدول (۴): تکرارهای همگرایی در ده نمو بارگذاری قاب دوجهدی

تحلیل	گام زمانی	تکرارهای همگرایی در نموها										مجموع	بهبود %
		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰		
S.D.	$\tau = 1$	۱۵۴۸	۱۲۷۰	۱۲۵۰	۱۲۴۲	۱۲۳۸	۱۲۳۵	۱۲۳۳	۱۲۳۲	۱۲۳۱	۱۲۳۰	۱۲۷۰۹	۷/۹۸
	τ_{opt}	۱۳۲۷	۱۱۵۳	۱۱۸۲	۱۱۵۱	۱۱۷۱	۱۱۴۵	۱۱۴۳	۱۱۱۸	۱۱۳۲	۱۱۷۳	۱۱۶۹۵	
L.D.	$\tau = 1$	۱۵۶۲	۱۲۹۹	۱۲۹۴	۱۳۰۲	۱۳۱۶	۱۳۳۲	۱۳۵۰	۱۳۷۰	۱۳۹۰	۱۴۱۳	۱۳۶۲۹	۶/۸۳
	τ_{opt}	۱۳۳۲	۱۲۳۸	۱۱۷۶	۱۲۱۳	۱۲۶۹	۱۲۶۵	۱۱۶۰	۱۳۷۷	۱۳۵۸	۱۳۱۰	۱۲۶۹۸	

۶- نتیجه

Frieze, P.A.; Hobbs, R.E.; Dowling, P.J.; "Application of Dynamic Relaxation to the Large Deflection Elasto-Plastic Analysis of Plates", *Comput. Struc.*, Vol.8, p.p.301-310 1978.

Papadrakakis, M.; "A Method for Automatic Evaluation of the Dynamic Relaxation Parameters", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol.25, p.p.3548 1981.

Undewood, P.; "Dynamic Relaxation", *Computational Method for Transient Analysis*, Chapter 5, p.p. 245-256, 1983.

Felippa, C.A.; "Dynamic Relaxation Under General Increment Control", *Math. Prog.*, Vol.24, p.p.103-133, 1982.

Zienkiewicz, O.C.; Lohner, R.; "Accelerated Relaxation or Direct Solution Future Prospects for FEM", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.21, p.p.1-11, 1985.

Shawi, F.A.N.; Mardiroson, A.H.; "An Improved Dynamic Relaxation Method for the Analysis of Plate Bending Problems", *Comput. Struc.*, Vol.27 p.p.237-240, 1987.

Qiang, S.; "An Adaptive Dynamic Relaxation Method for Non-Linear Problems", *Comput. Struc.*, Vol.30 p.p.855-859, 1988.

Zhang, L.C.; Yu, T.X.; "Modified Adaptive Dynamic Relaxation Method and its Application to Elastic-Plastic Bending and Wrinkling of Circular Plates", *Comput. Struc.*, Vol.34 p.p.609-614, 1989.

Turvey, G.J.; Salehi, R.E.; "DR Large Deflection Analysis of Sector Plates", *Comput. Struc.*, Vol.34 p.p.101-112, 1990.

Bardet, J.P.; Proubet, J.; "Adaptive Dynamic Relaxation for Statics of Granular Materials", *Comput. Struc.*, Vol.39 p.p.221-229, 1991.

Ramesh, G.; Krishnamoorthy, C.S.; "Post-Buckling Analysis of Structures by Dynamic Relaxation", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.36, p.p.1339-1364 1993.

Ramesh, G.; Krishnamoorthy, C.S.; "Inelastic Post-Buckling Analysis of Truss Structures by Dynamic Relaxation Method", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.37, p.p.363-365 1994.

Zhang, L.C.; Kadkhodayan, M.; Mai, Y.W.; "Development of the mDR Method", *Comput. Struc.*, Vol. 52 p.p.1-8, 1994.

Kadkhodayan, M.; Zhang, L.C.; "A Consistent DXDR Method for Elastic-Plastic Problems", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.38, p.p.2413-2431 1995.

Kadkhodayan, M.; Zhang, L.C.; Swerby, R.; "Analysis of Wrinkling and Buckling of Elastic Plates by DXDR Method", *Comput. Struc.*, Vol.65, p.p.561-574, 1997.

Munjiza, A.; "A K^m Proportional Damping for Dynamic Relaxation", *Int. J. Eng. Model.*, vol.9, p.p.1-9, 1996.

Pasqualino, I.P.; Estefan, S.F.; "A Nonlinear Analysis of the Buckle Propagation Problem in Deepwater

[۸] در این مقاله، رابطه‌سازی نوینی برای گام زمانی در روش رهایی پویا پیشنهاد شد. رابطه مزبور، از کمینه‌کردن نیروی نامیزان سازه در هر تکرار به دست آمد. سنجش ریاضی گام زمانی ثابت و بهینه، با معرفی مرتبه همگرایی صورت گرفت. بر این اساس، استفاده از گام زمانی بهینه، مرتبه همگرایی روش رهایی پویا را از یک به دو در سامانه‌های ناخطی، و به بی‌نهایت در سامانه‌های خطی افزایش می‌دهد.

[۹] از سوی دیگر، سنجش عددی رابطه پیشنهادی با تحلیل سازه‌های صفحه‌ای و قاب خمشی، در حالت تغییرشکل‌های کوچک و بزرگ انجام شد. بررسی نتیجه‌ها آشکار می‌کند که گام زمانی بهینه به طور متوسط تعداد تکرارهای لازم برای همگرایی را ده درصد کاهش می‌دهد. این بهبود در تحلیل‌های خطی و ناخطی و نیز الگوهای اجزای محدود و تفاوت‌های محدود ایجاد شده است. باید دانست، کاهش شمار تکرارها سبب کاهش زمان و هزینه تحلیل می‌شود؛ بنابراین، استفاده از گام زمانی بهینه به جای ثابت پنداشتن آن، نرخ همگرایی روش رهایی پویا را افزایش می‌دهد و به بهبود کارایی آن منجر می‌شود.

۷- مراجع

[۱] Felippa, C.A.; *Nonlinear Finite Element Methods*, ASEN 5017, Course Material, www.colorado.edu/courses/d/nfemdl/; Spring 1999.

[۲] Frankel, S.P.; "Convergence Rates of Iterative Treatments of Partial Differential Equations", *Mathl. Tabl. Natn. Coun.*, Washington, Vol.4, p.p.65-75, 1950.

[۳] Brew, J.S.; Brotton, M.; "Non-Linear Structural Analysis by Dynamic Relaxation Method", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.3; p.p.463-483, 1971.

[۴] Wood, W.L.; "Note on Dynamic Relaxation", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.3, p.p.145-147, 1971.

[۵] Bunce, J.W.; "A Note on Estimation of Critical Damping in Dynamic Relaxation", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.4, p.p.301-304, 1972.

[۶] Alwar, R.S.; Rao, N.R.; Rao, M.S.; "Alternative Procedure in Dynamic Relaxation", *Comput. Struc.*, Vol.5, p.p.271-274. 1975.

[۷] Cassell, A.C.; Hobbs, R.E.; "Numerical Stability of Dynamic Relaxation Analysis of Non-Linear Structures", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.10 p.p.1407-1410 1976.

- Pipelines*", Int. J. Solids Struc., Vol.38 p.p.84818502 , 2001.
- Wood, R.D.; "A Simple Technique for Controlling Element Distortion in Dynamic Relaxation Form-Finding of Tension Membranes", Comput. Struc., Vol.80 p.p.21152120 2002. [۲۵]
- Han, S.E.; Lee, K.S.; "A Study on Stabilizing Process of Unstable Structures by Dynamic Relaxation Method", Comput. Struc., Vol.80 p.p.1677-1688, 2003. [۲۶]
- Turvey, G.J.; Salehi, R.E.; "Annular Sector Plates : Comparison of Full-Section and Layer Yield Prediction", Comput. Struc., Vol.83 p.p.2431-2441, 2005. [۲۷]
- Murphy, J.; Ridout, D.; Mc-Shane,B.; *Numerical Analysis Algorithms and Computation*, Ellis Horwood Limited , 1988. [۲۸]
- Timoshenko, S.; Woinowsky-Krieger, S.; *Theory of Plates and Shells*, Mc-Graw-Hill Book Company, 1959. [۲۹]
- Ugural, A.C.; Fenster, S.K.; *Advanced Strength and Applied Elasticity*, Second SI Edition, Elsevier, 1987. [۳۰]