

# تحلیل استاتیکی غیرخطی قابهای بتن مسلح بر مبنای

## فرمول بندی نیرو

حمیدرضا ولیپور گودرزی<sup>۱</sup>؛ ابوالقاسم کرامتی<sup>۲</sup>

### چکیده

مقاله حاضر به ارائه یک فرمول بندی اجزای محدود برای المان یک بعدی (دوگرهی) قابهای بتن مسلح مسطح می پردازد که در آن، آثار غیرخطی مصالح فشرده شده است. رفتار غیرخطی مصالح بتن و فولاد در کشش و فشار و اثر نرم شدگی کرنش بتن با استفاده از مدل های تنش-کرنش یک بعدی در فرمول بندی ها گنجانیده شده است. سازگاری کرنش ها در مقاطع مختلف المان با پذیرش صحت فرض ناویه-برنولی ارضا شده و پیوستگی بین بتن و فولاد کامل فرض می شود. در شیوه ارائه شده با انتگرال گیری از مدول مماسی مصالح در ارتفاع هر مقطع، ماتریس نرمی و ماتریس سختی مقاطع به دست می آیند. سپس بر مبنای اصل بار مجازی و ارضای دقیق تعادل، با انتگرال گیری از ماتریس نرمی و بردار بار باقیمانده مقاطع<sup>(۱)</sup> مختلف در طول عضو، ماتریس نرمی و به تبع آن ماتریس سختی و بردار بارهای باقیمانده گرهی اعضا<sup>(۲)</sup> تعیین شده و نهایتاً همگرایی با تکرار رویه فوق حاصل می شود. روش حاضر، بر خلاف سایر فرمول بندی های اجزای محدود (روش های مبتنی بر سختی)، فاقد تقریب ذاتی مربوط به کاربرد توابع شکل است. در نهایت با تحلیل چند نمونه و مقایسه نتایج حاصل از فرمول بندی حاضر با دیگر فرمول بندی ها و نتایج آزمایشگاهی موجود، صحت فرضیات و دقت و کارایی روش ارائه شده بررسی می شود.

### کلمات کلیدی

قاب بتن مسلح؛ تحلیل استاتیکی غیرخطی؛ ماتریس نرمی؛ تئوری ناویه-برنولی.

## *Nonlinear Static Analysis of Reinforced Concrete Frames, Using Force Based Method*

H. Valipour Goudarzi; A. Keramati

### ABSTRACT

This paper presents a force (flexibility) based formulation for nonlinear static analysis of reinforced concrete plane frames. Nonlinear behavior of concrete and steel fibers based on a simple one-dimensional constitutive law is considered. Navier- Bernoulli theory is accepted in different sections and the effect of bond-slip is, thus, neglected. The section flexibility and stiffness matrices are extracted by direct integration of tangential modulus of materials all over the sections. Flexibility, stiffness and residual force vector of elements are estimated, using principle of virtual work and based on a force (flexibility) formulation. An iterative algorithm used to satisfy the proposed convergence criterion. Presented samples show accuracy and efficiency of the proposed method in contrast to other existing numerical and experimental results.

### KEYWORDS

Reinforced Concrete Frames; Nonlinear Static Analysis; Flexibility Matrix; Navier- Bernoulli Theory.

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری سازه، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست: H.VALIPOUR@AUT.AC.IR

<sup>۲</sup> استادیار دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست: A.KERAMATI@AUT.AC.IR

[۹]؛ زیرا در عمل رسیدن به حد پلاستیک یا گسیختگی به یک نقطه خاص محدود نشده و شامل بخشی از طول عضو می‌شود که این واقعیت با کاربرد فنرهای غیرخطی متمرکز شده همخوانی ندارد. به این ترتیب، توجه گروهی از پژوهشگران به اعمال دقیق‌تر آثار غیرخطی گسترده<sup>(۳)</sup> معطوف شد. در نخستین فرمول‌بندی‌های این گروه، برای اعمال آثار غیرخطی گسترده، از تقسیم‌بندی المان اصلی به زیرالمانهای کوچکتر که با فنرهای غیرخطی دورانی به یکدیگر متصل می‌شدند [۱۰] و یا از منحنی‌های لنگر-انحناء چندخطی استفاده می‌شد [۱۱] و [۱۲]. البته این شیوه فرمول‌بندی آثار غیرخطی گسترده نیز به علت اعمال قیود اضافه بر سختی قاب از دقت مناسبی برخوردار نبود.

با ابداع روش لایه‌بندی المانها<sup>(۴)</sup> و المان‌های رشته‌ای<sup>(۵)</sup> این شیوه‌ها برای تحلیل غیرخطی قاب‌های بتنی در قالب فرمول‌بندی‌های مبتنی بر سختی (با کاربرد توابع شکل جابجایی) یا نرمی و یا فرمول‌بندی‌های مختلط استفاده می‌شد [۱۳]، [۱۴] و [۱۵]. با وجود دقت بیشتر فرمول‌بندی المان‌های لایه‌ای (رشته‌ای) در قیاس با روش‌های مشابه پیشین، لزوم شبکه‌بندی کردن مقاطع مختلف اعضای قاب در این المان‌ها، به پیچیدگی و افزایش حجم محاسبات عددی منجر می‌شود و عملاً کاربرد المان‌های لایه‌ای (رشته‌ای) در قاب‌های با تعداد اعضا (درجات آزادی) زیاد را با مشکل مواجه می‌سازد [۱۶]، [۱۷]. از سوی دیگر، در اغلب فرمول‌بندی‌های اخیر از عواملی مهمی چون نرم شدگی کششی بتن و اثر آرماتورهای عرضی، که در رفتار نهایی قاب موثرند، صرف‌نظر شده است.

در کنار اجزای محدود، گروهی از پژوهشگران برای تحلیل غیرخطی المان‌های بتن مسلح روش المان مرزی یا تلفیق المان مرزی با اجزای محدود را استفاده کرده‌اند [۱۸]. البته روش‌های اخیر در تحلیل عملی قاب‌های بتنی، از کارایی و دقت مناسب برخوردار نیستند.

در مقاله حاضر برای کاهش حجم محاسبات عددی و ایجاد سهولت در مدلسازی، هر عضو قاب در طول به تعدادی مقطع (متناظر با نقاط انتگرالگیری طولی) تقسیم می‌شود. سپس با استفاده از مدول مماسی بتن و فولاد، که به تفکیک از رابطه تنش-کرنش یک‌بعدی آنها استخراج می‌شود، ماتریس سختی و نرمی مقاطع تعیین می‌شود. بر مبنای اصل نیروی مجازی، تعادل در طول عضو به طور دقیق ارضا شده و ماتریس سختی و نرمی عضو از انتگرالگیری نرمی مقاطع طولی به دست می‌آیند. در هر مرحله تحلیل، بردار نیروهای باقیمانده گرهی نیز از انتگرالگیری نیروهای باقیمانده قطعی بدست می‌آید. رویه فوق تا ارضای شرط همگرایی به وسیله بردار نیروهای نامتعادل گرهی (بردار جابجایی‌ها) تکرار می‌شود.

در تحلیل سازه‌ها، مدل‌های اجزای محدود به خاطر سهولت، فرضیات ساده‌کننده و دقت، به سه دسته مدل‌های کلی، مدل‌های مجزا شده و مدل‌های میکروسکوپی تقسیم می‌شوند [۱]. مدل‌های کلی، جزییات دقیق و مناسبی برای بررسی رفتار اعضای قاب‌ها به دست نمی‌دهد. از سوی دیگر، تحلیل قاب‌ها با استفاده از مدل‌های میکروسکوپی به دلیل لزوم شبکه‌بندی کردن کلیه اعضای قاب با المان‌های مسطح یا حجمی و از زیاد درجات آزادی سیستم، کاری زمانبر است و این مشکل در تحلیل‌های غیرخطی مشهودتر می‌شود [۲]. در عین حال، خروجی نتایج تنش و کرنش حاصل نیز به طور مستقیم برای بررسی رفتار قاب قابل استفاده نیست. با توجه به مسائل فوق، مدل‌های مجزا شده در تحلیل غیرخطی قاب بیشترین کارایی و دقت مناسب را به طور همزمان ارائه می‌دهد که در ادامه به آن پرداخته می‌شود.

به علت پیچیدگی رفتار مصالح بتنی، (آثاری نظیر سخت شدگی و نرم شدگی کرنش، ترک خوردگی و گسیختگی تحت اثر کشش و فشار)، دستیابی به یک رابطه ساختاری کامل، مشکل و ناکارآمد و عملاً غیرممکن است؛ بنابراین در پژوهش‌هایی که به تحلیل غیرخطی قاب‌های بتنی می‌پردازند، کاربرد پارهای فرضیات ساده‌کننده بسیار مفید و از گذشته تا به امروز رایج بوده است [۳]، [۴] و [۵].

از آنجا که در قاب‌های بتنی، رفتار غیرخطی سازه به نقاط انتهایی تیرها و ستون‌ها یا وسط دهانه محدود می‌شود، نخستین مدل‌های مجزا شده برای اعمال آثار غیرخطی، به استفاده از فنرهای غیرخطی متمرکز<sup>(۳)</sup> در نقاط میانی و انتهایی المان‌های قاب الاستیک متکی بودند [۳]، [۴]. با این شیوه، پژوهشگران توانستند آثاری نظیر کاهش سختی تحت اثر برش و خمش [۳]، گسیختگی تحت اثر بارهای رفت و برگشتی [۴] و بازتوزیع لنگر و دوران اضافه مقاطع انتهایی [۶]، (به علت لغزیدن میلگرد در بتن) را در تحلیل غیرخطی قاب‌های بتنی اعمال کنند. در کامل‌ترین فرمول‌بندی‌های ارائه شده از این مجموعه، تغییرات غیرخطی سختی فولاد و بتن به تفکیک با فنرهای مجزا مدل شده و اثر اندرکنش نیروی محوری و لنگر خمشی نیز در روابط تعادل در نظر گرفته شده است [۷].

با وجود این که مدل‌های مجزا شده مبتنی بر کاربرد فنرهای غیرخطی متمرکز، بخشی از آثار غیرخطی را به سادگی در مدلسازی قاب‌های بتن مسلح وارد می‌کنند؛ جواب‌های حاصل از این مدل‌ها در بسیاری مواقع با نتایج آزمایشگاهی و مدل‌های میکروسکوپی دقیق‌تر، اختلاف چشمگیری دارد [۸] و

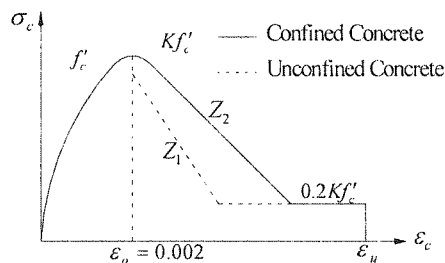
## ۲- مبانی فرمول‌بندی

در روابط اخیر، به ترتیب:

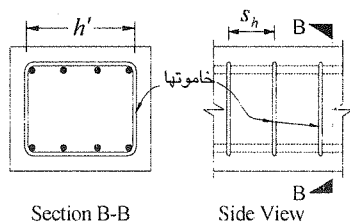
$$\varepsilon_{co} = 0.002K, \quad K = 1 + \frac{\rho_s f_{yh}}{f'_c} \quad (4)$$

$$Z = \frac{0.5}{\frac{3 + 0.0284 f'_c}{14.21 f'_c - 1000} + 0.75 \rho_s \sqrt{\frac{h'}{s_h}} - 0.002K} \quad (5)$$

در مجموعه روابط بالا  $f'_c$  و  $f_{yh}$ ، به ترتیب معرف مقاومت فشاری مشخصه بتن و تنش تسلیم میلگرد خاموت‌ها بر حسب کیلوگرم نیرو بر سانتیمتر مربع و  $\varepsilon_{co}$ ، کرنش بتن در نقطه متناظر با مقاومت فشاری مشخصه است. ضریب  $K$ ، اثر محصور کنندگی خاموت‌ها را در افزایش مقاومت بتن هسته ملحوظ کرده و  $Z$  نیز همانگونه که در شکل (۱) نشان داده شده است، شیب معادله رفتاری بتن را در ناحیه نرم شدگی کرنش نشان می‌دهد. با توجه به شکل (۲) فاصله محور تا محور خاموت‌ها و  $h'$  عرض هسته بتن محصور در خاموت‌ها و  $\rho_s$  معرف نسبت حجم خاموت‌ها به حجم هسته بتن محصور در آنهاست.



شکل (۱): رابطه تنش-کرنش یک بعدی بتن تحت فشار



شکل (۲): نمایش پارامترهای  $h'$  و  $s_h$  در یک المان قاب

همان گونه که در شکل (۳) نشان داده شده است، در مدل مورد استفاده، بتن تحت اثر تنش کششی تا رسیدن به مقاومت کششی،  $f'_c$  دارای رفتار الاستیک خطی است و پس از آن در محدوده نرم شدگی کرنش از رابطه تک خطی تا رسیدن به کرنش گسیختگی  $\varepsilon_0$  تبعیت می‌کند. کرنش گسیختگی  $\varepsilon_0$  از مساوی قرار دادن انرژی آزاد شده ترک با انرژی لازم برای شکست بتن  $G_f$  به صورت زیر محاسبه می‌شود [۲۲]:

$$\varepsilon_0 = \frac{2G_f \ln\left(\frac{3}{b}\right)}{f'_c(3-b)} \quad (6)$$

به طور کلی تحلیل یک سازه شامل حل همزمان دستگاه معادلات حاصل از مجموعه روابط ساختاری، تعادل و سازگاری است. در ادامه، به هر یک از مجموعه روابط اخیر به تفکیک و با تشریح فرضیات استفاده شده پرداخته می‌شود.

### ۲-۱- روابط ساختاری

در ادامه این بخش، روابط تنش-کرنش تک‌محوره بتن و فولاد، که در فرمول‌بندی حاضر استفاده شده‌اند، تشریح خواهند شد.

#### ۲-۱-۱- بتن

مقاومت و رفتار مصالح بتنی به وضعیت تنش‌های موثر بر جزء المان مورد نظر بسیار وابسته است. از این رو، معیارهای تسلیم و گسیختگی بتن علاوه بر مشخصات مکانیکی مصالح، تابعی از وضعیت تنش‌های سه‌بعدی نیز است [۱۹]. تلاش‌های موثر در هر نقطه دلخواه از مقاطع مختلف المان‌های قاب، شامل یک تنش محوری (کششی یا فشاری) و یک تنش برشی بوده و سایر مولفه‌های تنش، مقادیر قابل توجهی نیستند؛ بنابراین استفاده از معیارهای تسلیم یا گسیختگی در فضای تنش‌های دوبعدی نیز دقت لازم را خواهد داشت. از سوی دیگر، در قاب‌های بتن مسلح متعارف، به علت وجود خاموت‌های عرضی، با فرض عدم تشکیل مفاصل پلاستیک برشی، اثر تنش‌های برشی یادشده در پلاستیک شدن و گسیختگی بتن تا حد زیادی کاهش می‌یابد. با توجه به این مطلب، با تقریب مناسب می‌توان از پوش (۷) روابط تنش-کرنش یک‌محوره برای مدل کردن رفتار غیرخطی بتن در المان‌های قاب استفاده کرد [۱] و [۱۲].

پژوهشگران روابط تنش-کرنش یک بعدی بسیاری برای مدل کردن رفتار غیرخطی بتن ارائه کرده‌اند [۲۰]. در این مقاله از مدل اصلاح شده کنت و پارک (Kent & Park) که در آن اثر نرم‌شدگی کرنش و افزایش مقاومت ناشی از میلگردهای عرضی ملحوظ شده، استفاده می‌شود [۲۱]. در مدل اخیر، روابط تنش-کرنش برای بتن تحت تنش فشاری؛ همان گونه که در شکل (۱) نشان داده شده است، با روابط زیر به سه ناحیه تفکیک می‌شود:

$$\sigma_c = Kf'_c \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{co}} \right) - \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{co}} \right)^2 \right], \quad \varepsilon_c \leq \varepsilon_{co} \quad (1)$$

$$\sigma_c = Kf'_c [1 - Z(\varepsilon_c - \varepsilon_{co})], \quad \varepsilon_{co} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_u \quad (2)$$

$$\sigma_c = 0.2Kf'_c, \quad \varepsilon_u \leq \varepsilon_c \quad (3)$$

می‌دهد:

$$N(x) = -Q_1 \quad (7)$$

$$M(x) = Q_2 x - Q_3 - M_*(x) \quad (8)$$

در رابطه اخیر،  $M_*(x)$  حل خصوصی معادله تعادل لنگر خمشی به بار گسترده دلخواه  $w(x)$  مربوط است که در حالت کلی از معادله انتگرالی زیر به دست می‌آید:

$$M_*(x) = \int_0^x (x-s) w(s) ds \quad (9)$$

برای مثال، در حالتی که بار گسترده یکنواخت  $w(x) = \omega$  بر المان وارد می‌شود، حل خصوصی فوق به صورت (۱۰) ساده می‌شود و لازم است که لنگر گیرداری  $\pm \frac{\omega l^2}{12}$  و برش گیرداری  $\frac{\omega l}{2}$  نیز به صورت بارهای معادل خارجی در جریان مراحل مختلف تحلیل بر گره‌های انتهایی المان وارد شوند:

$$M_*(x) = \frac{\omega x^2}{2} \quad (10)$$

نمایش فشرده ماتریسی دو رابطه (۷) و (۸) عبارت است از:

$$D(x) = \mathbf{b}(x) \mathbf{Q} + D_*(x) \quad (11)$$

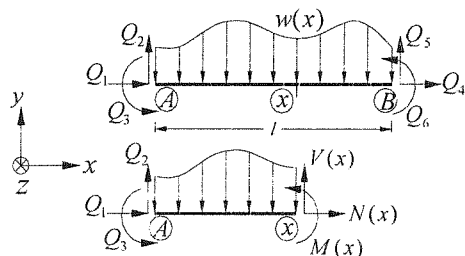
در رابطه اخیر،  $D(x)$ ،  $\mathbf{b}(x)$ ،  $\mathbf{Q}$  و  $D_*(x)$  به ترتیب نمایش بردار نیروهای تعمیم یافته مقطع  $x$ ، ماتریس توابع شکل نیرویی، بردار نیروهای تعمیم یافته گرهی (انتهای  $A$ ) و بردار نیروهای تعمیم یافته ناشی از بار گسترده (دربر گیرنده حل خصوصی معادله تعادل لنگر خمشی) است که به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$D(x) = [N(x) \quad M(x)]^T \quad (12)$$

$$\mathbf{b}(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{Q} = [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3]^T \quad (14)$$

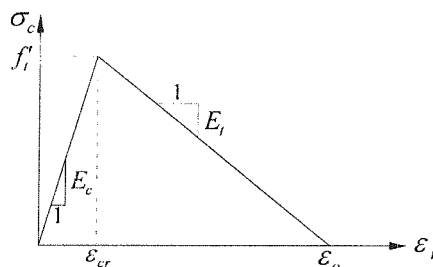
$$D_*(x) = [0 \quad -M_*(x)]^T \quad (15)$$



شکل (۵): المان دوگره‌ای قاب و پیکره آزاد  $Ax$

در قسمت‌های بعدی برای ایجاد سهولت در ارائه فرمول‌بندی‌ها، از  $D_*(x)$  بردار نیروهای تعمیم یافته ناشی از بار

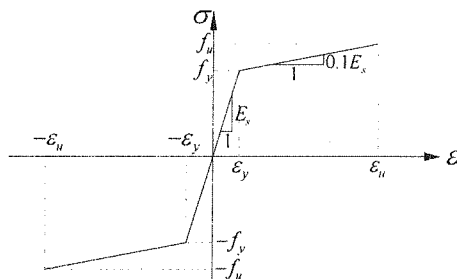
در رابطه اخیر،  $f'_i$  و  $G_f$  به ترتیب مقاومت کششی بتن و انرژی شکستی است که در جریان تشکیل واحد سطح ترک مستهلک شده و  $b$  نیز معرف طول المان (در اینجا فاصله نقاط انتگرالگیری طولی) بر حسب میلیمتر است. مطالعات آزمایشگاهی محققین نشان می‌دهد نسبت  $\frac{G_f}{f'_i}$  برای بتن‌های با مقاومت مشخصه معمول، در محدوده (0.01-0.005) میلیمتر تغییر می‌کند که در پژوهش حاضر مقدار 0.0075 میلیمتر در کلیه موارد ثابت در نظر گرفته شده است.



شکل (۳): رابطه تنش-کرنش یک بعدی بتن تحت کشش

## ۲-۱-۲ میلگردهای فولادی

در المانهای بتن مسلح، آرماتورها به طور عمده تحت اثر تنش‌های محوری قرار دارند. با توجه به این امر و آزمون‌های انجام شده بر روی میلگردهای فولادی، همانند شکل (۴)، کاربرد رابطه الاستیک خطی-سخت‌شونده تک‌خطی، مناسب‌ترین گزینه برای آرماتورهاست.



شکل (۴): رابطه تنش-کرنش یک بعدی میلگردهای فولادی

بر این اساس، رفتار آرماتورهای فولادی تا رسیدن به تنش حد تسلیم  $f_y$  به صورت الاستیک خطی با شیب  $E_s$  (مدول الاستیک فولاد) است و پس از آن شیب نمودار تنش-کرنش به  $0.1E_s$  کاهش یافته و با همین شیب تا تنش حد گسیختگی  $f_u$  پیش می‌رود.

## ۲-۲- معادلات تعادل

همان گونه که در شکل (۵) نشان داده شده است، یک المان دوگره‌ای قاب به همراه مقطع دلخواه  $x$  از طول آن، در دستگاه مختصات محلی  $x-y$  تحت بار گسترده  $w(x)$  در نظر گرفته می‌شود. ارضای معادلات تعادل برای پیکره آزاد  $Ax$ ، نتیجه

گسترده صرفنظر می‌شود و (۱۱) به صورت ساده‌شده زیر استفاده می‌شود:

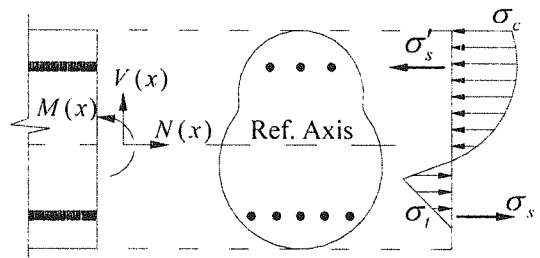
$$D(x) = b(x)Q \quad (۱۶)$$

از ارضای معادلات تعادل برای مقطع دلخواه  $x$ ، که در شکل (۶) نشان داده شده است، نتیجه می‌شود:

$$N(x) = \int_A \sigma dA \quad (۱۷)$$

$$M(x) = \int_A \sigma y dA \quad (۱۸)$$

در روابط فوق،  $\sigma$  تنش محوری موثر بر مقطع و  $y$  فاصله جزء سطح  $dA$  تا محور گذرنده از مرکز پلاستیک مقطع است.



شکل (۶): نمایش مقطع دلخواه  $x$  و تلاش‌های موثر بر آن

### ۲-۳- روابط سازگاری

در صورت پذیرش فرض پیوستگی کامل بین فولاد و بتن و صحت فرض ناویه-برنولی (مقاطع عرضی المان‌های قاب، قبل و پس از تغییر شکل، به صورت صفحه و عمود بر محور طولی باقی می‌مانند) می‌توان کرنش طولی  $\epsilon$  هر نقطه دلخواه را؛ که به فاصله  $y$  از محور گذرنده از مرکز پلاستیک واقع شده است، با تابع خطی زیر تعیین کرد:

$$\epsilon = \epsilon_r + y\phi \quad (۱۹)$$

$\epsilon_r$  و  $\phi$  کرنش‌های تعمیم یافته مقطع بوده و به ترتیب نمایانگر کرنش محوری و انحنای مقطع هستند.

با این فرض که تنش محوری،  $\sigma$  موثر در هر نقطه مقطع، فقط تابعی از کرنش طولی  $\epsilon$  همان نقطه است، خطی‌سازی (۱۷) و (۱۸) برای جزء کرنش  $\Delta\epsilon$  به صورت زیر خواهد شد:

$$\Delta N(x) = \int_A \frac{d\sigma}{d\epsilon} \Delta\epsilon dA \quad (۲۰)$$

$$\Delta M(x) = \int_A y \frac{d\sigma}{d\epsilon} \Delta\epsilon dA \quad (۲۱)$$

اگر کرنش طولی  $\epsilon$  از رابطه (۱۹) در دو رابطه اخیر جایگذاری شود، می‌توان روابط حاصل را به صورت فشرده ماتریسی زیر نمایش داد:

$$\Delta D(x) = k_s(x) \Delta d(x) \quad (۲۲)$$

$$\Delta D(x) = [\Delta N(x) \quad \Delta M(x)]^T \quad (۲۳)$$

$$k_s(x) = \begin{bmatrix} \int_A \frac{d\sigma}{d\epsilon} dA & \int_A y \frac{d\sigma}{d\epsilon} dA \\ \int_A y \frac{d\sigma}{d\epsilon} dA & \int_A y^2 \frac{d\sigma}{d\epsilon} dA \end{bmatrix} \quad (۲۴)$$

$$\Delta d(x) = [\Delta\epsilon_r \quad \Delta\phi]^T \quad (۲۵)$$

که  $k_s(x)$ ،  $\Delta D(x)$  و  $\Delta d(x)$  به ترتیب معرف ماتریس سختی، بردار جزء افزایش نیروهای تعمیم یافته و بردار جزء افزایش کرنش‌های تعمیم یافته مقطع  $x$  است.

با وارون کردن ماتریس سختی مقطع  $k_s(x)$  ماتریس نرمی مقطع  $f_s(x)$ ، به دست می‌آید:

$$f_s(x) = k_s^{-1}(x) \quad (۲۶)$$

و بر این اساس (۲۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\Delta d(x) = f_s(x) \Delta D(x) \quad (۲۷)$$

با جایگذاری (۱۶) در تساوی فوق:

$$\Delta d(x) = f_s(x) b(x) \Delta Q \quad (۲۸)$$

در حالت کلی، ماتریس سختی  $K_c$  و ماتریس نرمی  $F_c$  یک المان قاب مانند  $AB$ ، که در شکل (۵) نشان داده شده است، در دستگاه مختصات محلی  $xy$  به صورت زیر قابل نمایش است:

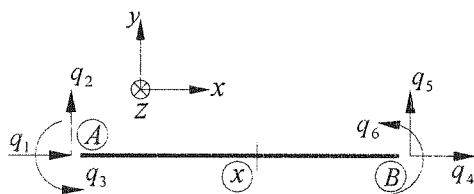
$$K_c = \begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{AB}^T & K_{BB} \end{bmatrix} \quad (۲۹)$$

$$F_c = \begin{bmatrix} F_{AA} & F_{AB} \\ F_{AB}^T & F_{BB} \end{bmatrix} \quad (۳۰)$$

$K_{AA}$ ،  $K_{BB}$  و  $K_{AB}$  معرف زیرماتریس‌های سختی و  $F_{AA}$ ،  $F_{BB}$  و  $F_{AB}$  زیرماتریس‌های نرمی عضو  $AB$  است که با استفاده از اصل نیروی مجازی بر مبنای نرمی مقاطع قابل محاسبه‌اند. برای این منظور ابتدا عضو  $AB$  در انتهای  $B$  گیردار شده و در انتهای  $A$ ، نیروهای مجازی تعمیم‌یافته متناظر با درجات آزادی گرهی (بردار  $\Delta Q$ ) اعمال می‌شوند. برقراری تساوی بین کار نیروهای خارجی و انرژی کرنشی داخلی عضو، رابطه سازگاری زیر را نتیجه خواهد داد [۱۶]:

$$q = \int_A b^T(x) d(x) dx \quad (۳۱)$$

در رابطه اخیر،  $q$  بردار جابجایی‌های تعمیم‌یافته گرهی (انتهای  $A$ ) المان است که در شکل (۷) نشان داده شده است.



شکل (۷): نمایش المان دو گرهی و جابجایی‌های تعمیم‌یافته آن

$$\int_{\Omega} y \frac{d'\sigma}{d'\varepsilon} dA = 0 \quad (38)$$

$${}^i k_s(x) = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \frac{d'\sigma}{d'\varepsilon} dA & 0 \\ 0 & \int_{\Omega} y^2 \frac{d'\sigma}{d'\varepsilon} dA \end{bmatrix} \quad (39)$$

$${}^i f_s(x) = {}^i k_s^{-1}(x) \quad (40)$$

با توجه به رابطه (38) که به طور مرتب در جریان مراحل مختلف تحلیل اصلاح می‌شود، موقعیت تار خنثی و به تبع آن میزان و عمق ترک‌خوردگی مقاطع مختلف و اثر آنها در کاهش سختی المان ملحوظ می‌شود.

### گام ۲

تعیین ماتریس نرمی المان‌ها بر اساس ماتریس نرمی مقاطع و سپس محاسبه ماتریس سختی اعضا.

$${}^i F_{AA} = \int_0^L b^T(x) {}^i f_s(x) b(x) dx \quad (41)$$

$${}^i K_{AA} = {}^i F_{AA}^{-1} \quad (42)$$

$${}^i K_e = \begin{bmatrix} {}^i K_{AA} & {}^i K_{AA} \Gamma \\ \Gamma^T {}^i K_{AA}^T & \Gamma^T {}^i K_{AA}^T \Gamma \end{bmatrix} \quad (43)$$

### گام ۳

تعیین بردار جابجایی‌ها و نیروهای تعمیم یافته گرمی  ${}^i Q$  المان‌ها.

$${}^i K_e {}^i q_e = {}^i F_n \quad (44)$$

${}^i F_n$  و  ${}^i q_e$  بارهای معادل و جابجایی‌های تعمیم یافته گرمی سازه (المان) در تکرار مرتبه  $i$  ام است.

### گام ۴

بردار نیروها و کرنش‌های تعمیم یافته مقاطع مختلف المان‌ها با توجه به بردار نیروهای تعمیم یافته گرمی  ${}^i Q$  المان‌ها به دست می‌آید.

$${}^i D(x) = b(x) {}^i Q \quad (45)$$

$${}^{i+1} d(x) = {}^i f_s(x) {}^i D(x) \quad (46)$$

$${}^{i+1} d(x) = [{}^{i+1} \varepsilon_r \quad {}^{i+1} \phi]^T \quad (47)$$

### گام ۵

با توجه به بردار کرنش‌های تعمیم یافته مقاطع، که در گام قبل به دست آمده است، کرنش طولی جدید  ${}^{i+1} \varepsilon$  و سپس تنش متناظر  ${}^{i+1} \sigma$  بر اساس روابط ساختاری بخش ۲-۱ برای همه نقاط تعیین می‌شود.

$${}^{i+1} \varepsilon = {}^{i+1} \varepsilon_r + y {}^{i+1} \phi \quad (48)$$

$q$  بردار جابجایی‌های تعمیم‌یافته گرمی (انتهای  $A$ ) المان به صورت زیر است:

$$q = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T \quad (22)$$

اگر تساوی‌های (۱۶) و (۲۷) در (۳۱) جایگذاری شوند، زیرماتریس نرمی  $F_{AA}$  به دست خواهد آمد:

$$F_{AA} = \int_0^L b^T(x) f_s(x) b(x) dx \quad (23)$$

زیرماتریس سختی  $K_{AA}$  نیز، با وارون کردن  $F_{AA}$  قابل محاسبه خواهد بود:

$$K_{AA} = F_{AA}^{-1} \quad (24)$$

با کاربرد رابطه ماتریسی نیرو-جابجایی پیکره طره پایه مفروض (گیردار در انتهای  $B$ ) و ارضای تعادل کلی پیکره مزبور، وابستگی‌های زیر حاصل می‌شود [۲۲]:

$$K_{BB} = \Gamma^T K_{AA} \Gamma \quad (25)$$

$$K_{AB} = K_{AA} \Gamma \quad (26)$$

که در تساوی‌های اخیر، ماتریس تبدیل  $\Gamma$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & L \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

در نهایت، ماتریس سختی المان  $K_e$  از سرهم بندی کردن زیرماتریس‌های  $K_{AA}$ ،  $K_{BB}$  و  $K_{AB}$  طبق رابطه (۲۹) محاسبه می‌شود.

## ۳- روال تحلیل غیرخطی

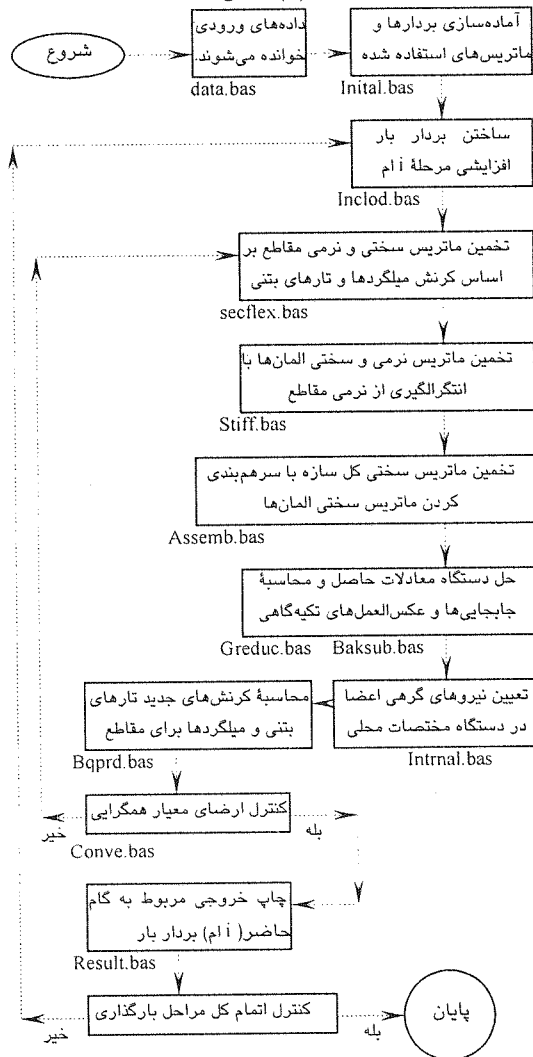
در این قسمت، روابط ارائه شده در بخش‌های پیشین بر مبنای یک الگوریتم تکراری (Iterative) مرتب شده است که به صورت مستقیم یا با روش بارگذاری افزایشی (Incremental) قابل استفاده است. (لازم به ذکر است که اندیس بالانویس سمت چپ متغیرها، معرف مرتبه تکرار است.)

با این فرض که کرنش طولی  $\varepsilon^i$  و تنش متناظر  $\sigma^i$ ، در کلیه نقاط مقاطع مختلف المان‌ها در انتهای گام  $(i-1)$  ام مشخص شده است؛ روال تحلیل برای تکرار مرتبه  $i$  ام به صورت زیر خواهد بود:

### گام ۱

تعیین موقعیت محور مبنای مقاطع مختلف المان‌ها، با صفر فرض کردن درایه‌های قطر فرعی ماتریس سختی مقاطع و محاسبه ماتریس سختی و نرمی مقاطع مختلف با توجه به بردار کرنش‌های تعمیم یافته  $d(x)$  و مقادیر کرنش  $\varepsilon^i$  و روابط ساختاری.

زیربرنامه‌های مورد استفاده در هر قسمت، در حالی که  $\alpha = \beta = 0$  است در شکل (۸) نشان داده شده است:



شکل (۸): فلوچارت تحلیل غیرخطی قاب بر اساس روش پیشنهادی در فرمول‌بندی حاضر، استفاده از روش‌های عددی برای تخمین انتگرال‌ها اجتناب‌ناپذیر است. اگر چه در تحلیل غیرخطی قاب‌های خمشی، کاربرد روش‌هایی نظیر گوس-لوباتو (Gauss-Lobatto) توصیه شده است [۱]، در اینجا برای تخمین انتگرال‌ها در حوزه مقاطع و در طول المان‌ها روش سیمپسون به کار رفته است که نتایج حاصل، مبین دقت مناسب روش مزبور است. در ادامه با ذکر دو نمونه، دقت و کارایی فرمول‌بندی حاضر در قیاس با سایر روشها بررسی می‌شود.

## ۴- آزمونهای عددی

### ۴-۱- تیر ساده دوسر مفصل

در شکل (۹) مقطع بتنی، میلگردهای طولی و عرضی، هندسه عضو و نوع بارگذاری یک تیر ساده در حالت کلی نشان داده

$${}^{i+1}\sigma = f({}^{i+1}\varepsilon) \quad (49)$$

در تساویهای فوق تابع  $f$  معرف رابطه ساختاری بتن یا فولاد است.

## گام ۶

نیروهای تعمیم یافته جدید مقاطع و به تبع آن بردار باقیمانده نیروها و کرنش‌های تعمیم‌یافته مقاطع محاسبه می‌شوند.

$${}^{i+1}D(x) = \left[ \int_{\Omega} {}^{i+1}\sigma dA \quad \int_{\Omega} y {}^{i+1}\sigma dA \right] \quad (50)$$

$$\Delta' D(x) = {}^{i+1}D(x) - {}^i D(x) \quad (51)$$

$${}^i \psi(x) = {}^i f_p(x) \Delta' D(x) \quad (52)$$

${}^i \psi(x)$  نمایش بردار باقیمانده کرنش‌های تعمیم‌یافته مقاطع است. بدین ترتیب بردار کرنش‌های  ${}^{i+1}d(x)$  حاصل در گام ۴ را می‌توان به صورت زیر اصلاح کرد:

$${}^{i+1}d(x) = {}^i d(x) + \alpha {}^i \psi(x) \quad (53)$$

## گام ۷

بردار نیروهای باقیمانده گرهی  ${}^i \Psi$  به دست آمده و سپس بردار بارهای معادل گرهی جدید  ${}^{i+1}F_n$  برای مرتبه تکرار بعدی محاسبه می‌شود:

$${}^i \Psi = \int_{\Omega} b^T(x) {}^i \psi(x) dx \quad (54)$$

$${}^{i+1}F_n = {}^i F_n + \beta {}^i \Psi \quad (55)$$

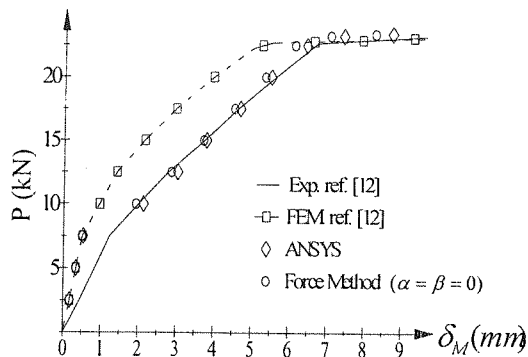
ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  موجود در (۵۳) و (۵۵) با توجه به روش حل، در بازه  $[0,1]$  تعریف می‌شود. (به طور کلی به جز حالتی که  $\alpha = \beta = 1$  است؛ در سایر موارد از الگوریتم‌های تکراری حل باید استفاده شود.)

## گام ۸

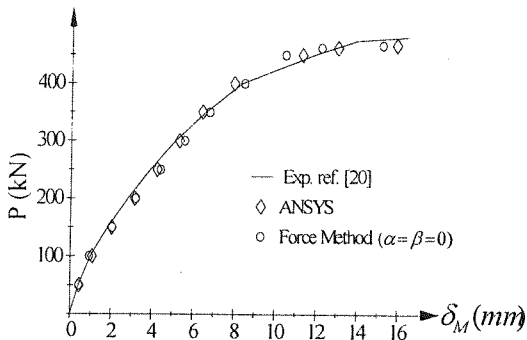
معیار همگرایی نتایج کنترل می‌شود. در الگوریتم‌های تکراری با ارضای نامساوی زیر برای کل درجات آزادی سازه، روال تحلیل پایان می‌یابد:

$$\left| \frac{{}^i q_j - {}^{i-1} q_j}{{}^{i-1} q_j} \right| \leq Tol \quad (56)$$

زیرنویس  $j$  معرف شماره درجه آزادی متناظر بوده و متغیر  $Tol$ ، نمایانگر میزان انحراف پذیرفته شده در همگرایی پاسخ است. در صورت عدم ارضای معیار همگرایی، به گام ۱ برگشته و کلیه مراحل تا ارضای شرط همگرایی تکرار می‌شود. بر مبنای روال تشریح شده در بالا، یک برنامه کامپیوتری به زبان QBX-Ver. 7 برای تحلیل غیرخطی استاتیکی قاب‌های خمشی بتن مسلح تهیه شده است که فلوچارت کلی آن و عنوان



شکل (۱۱): نمودار بار-خیز نقطه  $M$  (وسط دهانه) تیر  $B-2$



شکل (۱۲): نمودار بار-خیز نقطه  $M$  (وسط دهانه) تیر  $B-3$

در مدل‌های ساخته شده با نرم افزار ANSYS از المان‌های ۸ گرهی مکعبی **SOLID65** (با قابلیت اعمال اثر میگردهای فولادی و مدلسازی رفتار پلاستیک، ترک خوردگی و خرد شدگی بتن) دارای حداکثر بعد ۶۰ تا ۸۰ میلیمتر بهره گرفته شده است [۲].

همان گونه که در شکل‌های (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) ملاحظه می‌شود، بیشترین اختلاف بین جواب‌های حاصل از فرمول‌بندی نیرو و نتایج آزمایشگاهی در محدوده رفتار غیرخطی به ۱۱٪ و اختلاف بین نتایج فرمول‌بندی نیرو و نرم افزار ANSYS به ۷٪ محدود می‌شود.

#### ۴-۲- قاب پرتال دوطبقه

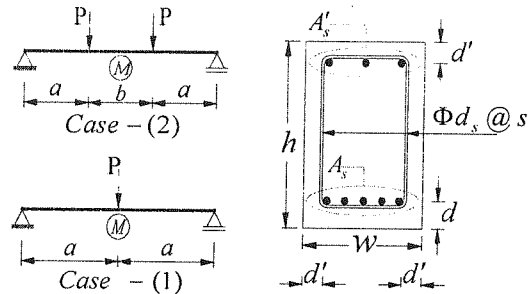
هندسه و مشخصات مقاطع یک قاب پرتال، که تحت اثر بار جانبی استاتیکی معادل زلزله  $V = 90 \text{ kN}$  طرح شده، در شکل‌های (۱۳) و (۱۴) نشان داده شده است. مشخصات مصالح عبارت است از:

$$f'_c = 21 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad f'_t = 2.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$f_y (f_{yh}) = 300 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad E_s = 2 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

نمودار بار- تغییر مکان جانبی طبقات اول و دوم قاب مزبور در شکل‌های (۱۵) و (۱۶) و نمودار بار-لنگر خمشی تکیه‌گاه ( $N$ ) در شکل (۱۷) نشان داده شده است. کلیه بارها در یک مرحله بر سازه وارد شده و برای مقایسه پاسخ‌ها، نتایج

شده است:



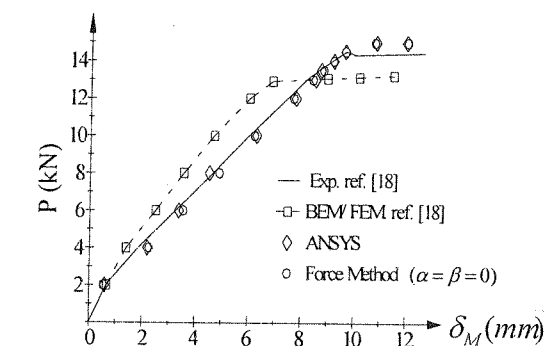
شکل (۹): مشخصات کلی مقطع، هندسه عضو و بارگذاری تیر

مشخصات هندسی، مصالح و نحوه بارگذاری تیرهای  $B-1$ ،  $B-2$ ،  $B-3$  در جدول (۱) ارائه شده است:

جدول (۱): مشخصات هندسی، مصالح و بارگذاری نمونه‌ها

مشخصه	واحد	$B-1$	$B-2$	$B-3$
$f'_c$	$\text{kg/cm}^2$	۲۹۲	۲۲۲	۲۴۵
$f'_t$	$\text{kg/cm}^2$	۲۰	۲۰	۲۹
$f_y (f_{yh})$	$\text{kg/cm}^2$	۵۶۰۰	۳۲۳۶	۵۶۰۰
$E_s$	$\text{kg/cm}^2$	$1.96 \times 10^4$	$1.98 \times 10^4$	$2.10 \times 10^4$
$w$	$\text{cm}$	۱۱.۴۰	۱۵.۲۴	۲۰.۴۸
$h$	$\text{cm}$	۱۰۰.۰۰	۲۰.۴۸	۵۵.۲۵
$A'_s$	$\text{cm}^2$	۱.۵۷	۰.۰۰	۲.۵۱
$A_s$	$\text{cm}^2$	۱.۵۷	۲.۵۷	۲۶.۳۵
$s$	$\text{cm}$	۴	---	۲۰
$d_s$	$\text{mm}$	۵	---	۱۰
$d'$	$\text{cm}$	۲.۲۵	---	۹.۲۵
$d$	$\text{cm}$	۱.۷۵	۲.۲۵	۹.۲۵
Case	---	(۲)	(۲)	(۱)
$a(b)$	$\text{cm}$	۳۵(۶۵)	۹۰	۱۸۲

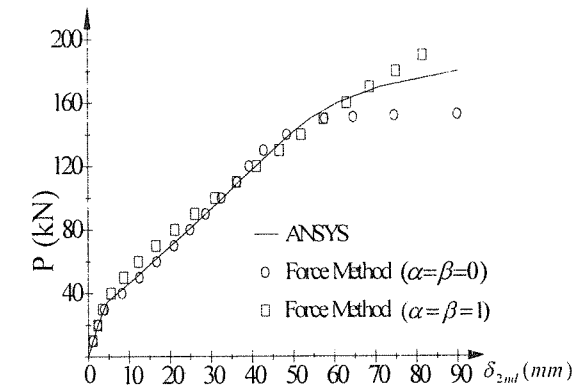
نمودار بار-خیز نقطه  $M$  وسط دهانه تیرهای  $B-1$ ،  $B-2$ ،  $B-3$  و به ترتیب در شکل‌های (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) نشان داده شده است. ذکر این نکته لازم است که در نتایج حاصل از روش نیرو، کلیه تیرها با دو المان مدل شده، فاصله نقاط انتگرالگیری ۶۰ تا ۱۲۰ میلیمتر است، کل بار در یک مرحله وارد شده و از الگوریتم تکراری حل با ضرایب  $\alpha = \beta = 0$  استفاده شده است.



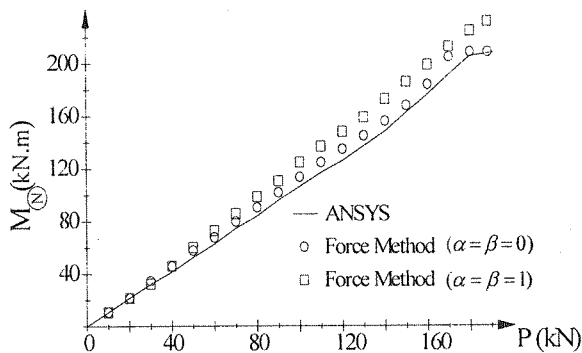
شکل (۱۰): نمودار بار-خیز نقطه  $M$  (وسط دهانه) تیر  $B-1$



حاصل از مدلسازی قاب مزبور با نرم افزار ANSYS نیز ارائه شده است.



شکل (۱۶): نمودار بار-تغییر مکان جانبی طبقه دوم قاب

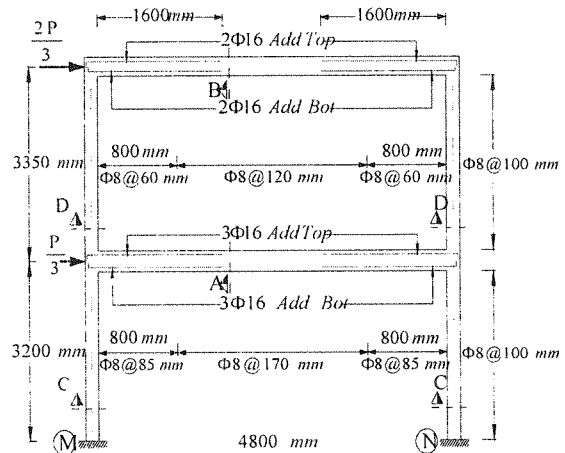


شکل (۱۷): نمودار بار-لنگر خمشی تکیه‌گاه N

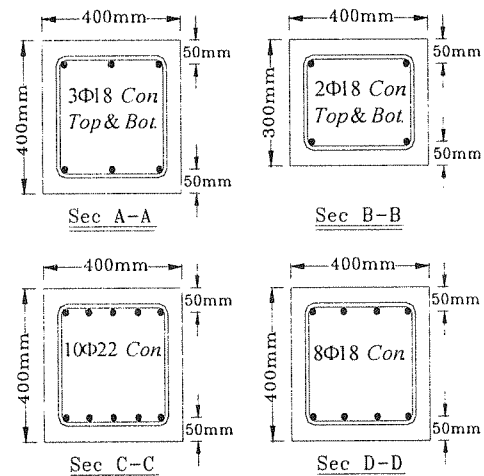
توضیح این نکته لازم است که در مدل‌های ساخته شده با نرم افزار ANSYS از المان‌های ۸ گرهی مکعبی SOLID65 با بعد ۱۰۰ میلی‌متر استفاده شده است. همان گونه که ملاحظه می‌شود، در این نمونه بیشترین اختلاف بین جواب‌های حاصل از فرمول‌بندی نیرو و نرم‌افزار ANSYS به ۹٪ محدود می‌شود.

### ۵- نتیجه

فرمول‌بندی ارائه شده علاوه بر سادگی و سرعت در محاسبات عددی، دقت مناسب و قابل قبول دارد، به گونه‌ای که حداکثر اختلاف بین جواب‌های حاصل از فرمول‌بندی نیرو و روش‌های دقیق‌تر به ۱۲٪ محدود می‌شود. این ویژگی‌ها، کاربرد فرمول‌بندی حاضر در تحلیل غیرخطی قاب‌های چند طبقه و چنددهانه با تعداد درجات آزادی زیاد را میسر می‌سازد. روش حاضر، با تغییر ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  در قالب روش‌های تکراری و غیرتکراری (مستقیم) قابل استفاده است. علاوه بر نمونه قاب تحلیل شده، نتایج مطالعات متعدد دیگر، نشان می‌دهد که در محدوده رفتار الاستیک و الاستوپلاستیک، استفاده از الگوریتم حل تکراری به جواب‌های دقیق‌تری در قیاس با روش مستقیم بدون تکرار منجر می‌شود؛ ولی در نواحی نزدیک ظرفیت باربری نهایی سازه، کاربرد روش مستقیم (بدون تکرار)

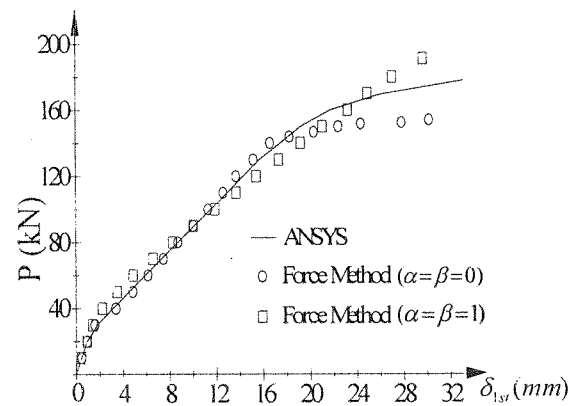


شکل (۱۳): هندسه قاب پرتال و جزئیات خاموت‌گذاری اعضا



شکل (۱۴): مشخصات مقاطع تیرها و ستون‌های قاب پرتال

در روش نیرو، قاب مورد اشاره با ۲۲ المان (هر ستون با ۳ المان و تیرها با ۵ المان متناظر با تغییر میلگردهای طولی و خاموت‌گذاری‌ها) مدل شده و فاصله نقاط انتگرالگیری طولی در حدود ۶۰ تا ۱۰۰ میلی‌متر است. در عین حال، ۲۵٪ از نواحی همپوشانی گرهی تیرها و ستون‌ها صلب فرض شده است.



شکل (۱۵): نمودار بار-تغییر مکان جانبی طبقه اول قاب

Engineering Research Center, University of California, Berkeley, 1982.

Bertero, V. V., Aktan, A., Charney, F. and Sause, R., "Earthquake simulator tests and associated experimental, analytical and correlation studies of one-fifth scale model", In Earthquake effects on reinforced concrete structures, American Concrete Institute, SP 84-13, Detroit, pp. 375-424, 1984.

Takayanagi, T. and Schnobrich, W., "Nonlinear analysis of coupled wall systems", Earthquake Eng. Struc. Dyn., Vol. 7, pp. 1-22, 1979.

Darvall, P. L. and Mendis, P. A., "Elastic-plastic-softening analysis of plane frames", J. Struc. Eng., ASCE, Vol. 111(ST4), pp. 871-888, 1985.

Kwak, H. G. and Kim, S. P., "Nonlinear analysis of R/C beams based on moment-curvature relation", Comp. and Struc., Vol. 80, pp. 615-628, 2002.

Zeris, C. A. and Mahin, S. A., "Analysis of reinforced concrete beam-columns under uniaxial excitation", J. Struc. Eng., ASCE, Vol. 114(ST4), pp. 804-820, 1988.

Ayoub, A. and Filippou, F. C., "Mixed formulation of nonlinear steel-concrete composite beam element", J. Struc. Eng., Div. ASCE, Vol. 126, No. 3, pp. 371-381, 2000.

Limkatanyu, S. and Spacon, E., "Reinforced concrete frame element with bond interfaces-I. Displacement-based, Force-based and mixed-formulation", J. Struc. Eng., Div. ASCE, Vol. 128, No. 3, pp. 346-355, 2002.

Neuenhofer, A. and Filippou, F. C., "Evaluation of nonlinear frame finite element models", J. Struc. Eng., Div. ASCE, Vol. 123(7), pp. 958-966, 1997.

Limkatanyu, S. and Spacon, E., "Reinforced concrete frame element with bond interfaces-II. State determination and numerical validation", J. Struc. Eng., Div. ASCE, Vol. 128, No. 3, pp. 356-364, 2002.

Bereves Coda, H., "Dynamic and static non-linear analysis of reinforced media: a BEM/FEM coupling approach", Comp. and Struc., Vol. 79, pp. 2751-2765, 2001.

Lubliner, J., *Plasticity Theory*, 2<sup>nd</sup> edition, Macmillan Pub. Co., New York, 1990.

Bangash, M. Y. H., *Manual of numerical methods in concrete*, 1<sup>st</sup> edition, Thomas Telford Pub. Co., Heron Quay, London, 2001.

Scott, B. D., Park, R. and Priestley, M. J. N., "Stress-strain behavior of concrete confined by overlapping hoops at low and high strain rates", ACI, Struc. J., Vol. 79(1), pp. 13-27, 1982.

Kwak, H. G. and Filippou F. C., "Finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads", Report No. UCB/SEMM-90/14, University of California, Berkeley, 1990.

Molins, C., Roca, P. and Barbat, H., "Flexibility-based linear dynamic analysis of complex structures with curved-3D members", Earthquake Eng. Struc. Dyn., Vol. 27, pp. 731-747, 1998.

#### زیرنویس ها

- <sup>1</sup> Section Residual Forces
- <sup>2</sup> Nodal Residual Forces
- <sup>3</sup> Non-Linear Springs
- <sup>4</sup> Spread Non-linear ties
- <sup>5</sup> Layered Elements
- <sup>6</sup> Fiber Elements
- <sup>7</sup> Push

برای تخمین جابجایی‌ها مفیدتر است. دقیق‌ترین پاسخ جابجایی‌ها، هنگامی به دست می‌آید که بارها به صورت افزایشی (تدریجی) وارد شده و در گام‌های نخست بارگذاری از روش الگوریتم‌های تکراری و در گام‌های انتهایی بارگذاری از روش مستقیم بهره گرفته شود.

در نهایت، مطالعات انجام شده نشان می‌دهد، در ناحیه‌هایی که بیشترین آثار غیرخطی پدیدار می‌شود، استفاده از نقاط انتگرالگیری با فواصل ۵۰ تا ۱۰۰ میلی‌متر برای رسیدن به جواب‌های با دقت مناسب کافی است.

روش حاضر برای تحلیل سه‌بعدی قابها قابل تعمیم است. برای این منظور باید معادلات تعادل و سازگاری برای وضعیت لنگرهای خمشی دو جهت توام با نیروی محوری نگاشته شوند. از روش حاضر می‌توان برای مدل کردن المان‌های بتن مسلح واقع بر بستر الاستیک (مانند شالوده‌های نواری) نیز استفاده کرد. در صورت لزوم می‌توان تکیه‌گاه الاستیک را با فنرهای خطی جایگزین کرد که سختی فنرهای مزبور به طور مستقیم با درآیه‌های متناظر ماتریس سختی سرهم‌بندی شده کل مجموعه جمع می‌شوند. در عین حال می‌توان از سختی‌های معادل گسترده نیز استفاده کرد. به موضوعات اخیر می‌توان به عنوان مبنایی برای توسعه و پژوهش آینده در این زمینه توجه کرد.

#### ۶- مراجع

- [۱] Spacon, E., Filippou, F. C. and Taucer, F. F., "Fiber beam-column model for nonlinear analysis of R/C frames, I. Formulation", Earthquake Eng. Struc. Dyn., Vol. 25(7), pp. 711-725, 1996.
- [۲] ANSYS theoretical manual, 8<sup>th</sup> edition, Swanson analysis systems IP, 1993.
- [۳] Takeda, T., Sozen, M. A. and Nilsen, N., "Reinforced concrete response to simulated earthquake", J. Struc. Eng., Div. -ASCE, Vol. 96(ST12), pp. 2557-2573, 1970.
- [۴] Banon, H., Biggs, J. and Irvine, M., "Seismic damage in reinforced concrete frames", J. Struc. Eng., Div. ASCE, Vol. 107(ST9), pp. 1713-1729, 1981.
- [۵] Takizawa, H., "Notes on some basic problems in inelastic analysis of planar R/C structures", Trans. Architecture institute Japan, Vol. 240, part I in February, pp. 51-62, part II in March, pp. 65-77, 1976.
- [۶] Filippou, F. C. and Issa, A., "Nonlinear analysis of reinforced concrete frames under cyclic load reversals", EERC Report 88/12, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, 1988.
- [۷] Lai, S., Will, G. and Otani, S., "Model for inelastic biaxial bending of concrete members", J. Struc. Eng., ASCE, Vol. 110(ST11), pp. 2563-2584, 1984.
- [۸] Charney, F. and Bertero, V. V., "An evaluation of the designing and analytical seismic response of seven story reinforced concrete frame-wall structure", EERC Report 82/08, Earthquake