

تدوین یک مدل برای نرخ سوزش در موتور سوخت جامد

ابوالقاسم مسگرپور طوسی
استادیار

غلامرضا هاشم‌زاده اهرنجانی
دانشجوی دکتری

سید محمد حسین کریمیان
دانشیار
دانشکده هوافضا، دانشگاه امیر کبیر

چکیده

در این تحقیق، معادلات ناویراستوکس گذرای متقارن محوری در موتور سوخت جامد با روش المان محدود - حجم کنترل حل شده که میدان جریان آن، یعنی، داخل محفظه احتراق استوانه‌ای و نازل همگرا - واگرا، شبکه‌بندی با سازمان شده است. از آنجا که می‌توان از مقدار پس روی سطح سوخت جامد در پله‌های زمانی کوچک صرف‌نظر کرد، میدان جریان در هر پله زمانی غیر متحرک و ثابت در نظر گرفته شده است. روش حل به صورت ضمنی است و حول هر نقطه از شبکه، یک حجم کنترل با ۸ نقطه انتگرالی وجود دارد. معادلات دیفرانسیلی ناویر استوکس در هر یک از حجم کنترل‌ها انتگرال گرفته شده است و از تقریب خطی‌سازی در هر یک از المانها استفاده می‌شود. برای این تعداد هر یک از نقاط شبکه، یک دستگاه معادلات خطی به وجود می‌آیند که مجهولات آن فشار، سرعت‌های افقی و عمودی و دما است. این دستگاه معادلات، به طور جداگانه‌ای در ماتریس مادر که برای کل شبکه میدان جریان است، مونتاژ شده و در نهایت ماتریس ضرایب کلی که یک ماتریس تقریباً قطری است به روش باندی (Band Solver) حل می‌شود. لازم به ذکر است روش بکار گرفته شده برای مدل‌سازی، استفاده از سرعت‌های بالا دست جریان است. شرایط مرزی بر سطح سوخت جامد با فرض یک الگوی حرارتی - شیمیایی بر اساس تجربه‌های مشاهده‌ای موجود نرخ سوزش سوخت‌های دوپایه اعمال شده است. برای این منظور معادلات حرارتی - شیمیایی با در نظر گرفتن جملات نفوذ در اثر وجود جریان عرضی، به خصوص در حالت جریان آشفته، حل شده و نرخ سوزش در حالت وجود جریان‌های جانبی، شبیه‌سازی شده است. با حل معادلات جریان، می‌توان تمامی بردارهای سرعت و توزیع دما، فشار، عدد ماخ و سایر خواص ترمودینامیکی را در محفظه احتراق و نازل در هر تکرار و در هر زمان به دست آورد. سرعت همگرایی روش بکار گرفته شده نسبت به روشهای Explicit بالاتر است و جوابها با منابع و تستهای اجرا شده همخوانی خوبی را به نمایش می‌گذارند.

کلمات کلیدی

موتور سوخت جامد، مدل‌سازی سوزش، حل معادلات ناویر استوکس، متقارن محوری.

Determination of A New Model for Solid Propellant Burning Rate

G.R. Hashemzadeh
Phd. Student

A. Mesgarpour Tousi
Assistant Professor

S. M. Hossien Karimian
Associate Professor
Aerospace Department, Amir Kabir University



Abstract

In this research transient axi-symmetric Navier Stock's equations are solved by the method of pressure based control-volume finite element. The domain of flowing gas is the cylindrical combustion chamber and the con-div nozzle which is meshed with structural grid generation. This domain is considered to be fixed at each time. Solution method is implicit and over each node there is 8 integral points. Upwind method is used for modeling of the convective term. Boundary conditions on the surface of solid propellant are applied from experimental thermal-chemical equations. These equations are solved considering diffusion terms affected by longitudinal velocity and turbulence. For calculation the erosive burning of a double base solid propellant the flow considered to be turbulent. After the solution of the equations, the properties such as pressure, temperature, and velocities of each node are calculated. The results are well matched with the experimental results that are obtained from static tests.

Keywords

Solid propellant rocket motor, modeling of burning rate, axi-symmetric, Navier Stock's equations.

مقدمه

یکی از روش‌های توسعه یافته، حل معادلات ناویراستوکس در محدوده سرعت‌های مختلف در میدان جریان است. در این میان روش‌هایی نیز هست که شامل رژیم جریان‌های تراکم‌ناپذیر و تراکم‌پذیر است. در روش حجم کنترلی هم نقطه‌ای (Co-located) توسط راتو، گالپین و هات چیتسون [۱]، و راتو، گالپین و ریتبی [۲]، یک روش که از نظر ریاضی مشابه با روش ری و چائو [۳] است، اجرا شده است که بر مشکل شطرنجی شدن توزیع فشار در میدان جریان فایق آمده است. در این دیدگاه که توسط دورمال، ریتبی و مکدونالد [۴] به بررسی اثرات تراکم‌پذیری به آن پرداخته شده است، فلاکس جرمی در سطح حجم کنترلی با روش نیوتن رافسون خطی شده است که کوپل دو منبع فشاری را (کوپل فشار- سرعت و فشار- جرم حجمی) است را اعمال و بررسی کرده است. در روش س. م. ج. کریمیان حل معادلات ناویر استوکس برای میدان جریان دو بعدی مورد توجه قرار گرفته است که مهمترین اهداف آن عبارتند از: (۱) هم نقطه‌ای بودن (Co-located) در تمام متغیرها، (۲) بقایی بودن معادلات جرم، مومنتم و انرژی، (۳) انعطاف پذیری روش در مورد هندسه میدان جریان، (۴) دقت بالا در مدل‌سازی ترم جابجایی، (۵) قابل تعمیم بودن روش به سه بعدی، (۶) روش ضمنی به طور کامل، (۷) قابل اعمال بودن روش برای جریانهای لزج، غیر لزج و در حالت گذر، (۸) قابل اعمال بودن در تمام سرعت‌ها با ماخ زیر صوت و بالای صوت. در روش حاضر برای مدل‌سازی جریان از روش س. م. ج. کریمیان استفاده شده است با این تفاوت که ترم‌های مربوط به جریان متقارن محوری به معادلات اضافه شده‌اند. با این کار می‌توان جریان‌های داخل موتور سوخت جامد را که معمولاً هندسه‌های متقارن محوری دارند را مورد تحلیل کرد. همچنین در مرزهای سوخت جامد از مدل‌سازی سوزش سوخت جامد برای تزریق شدن گاز به میدان جریان استفاده شده است.

در مجموع، روش‌های نظری ارائه شده برای پیش‌بینی و تخمین سوزش سوخت جامد به سه گروه کلی تقسیم بندی می‌شوند. این طبقه‌بندی بر اساس نظریه‌های مختلف انجام شده است [۵] که عبارتند از: (۱) نظریه انتقال حرارت که واکنش شیمیایی و ساختار شعله را در نظر نمی‌گیرد، (۲) نظریه شعله که براساس مکانیزم احتراق یا ساختار شعله بیان می‌شود، (۳) بررسی هم زمان حرارتی و ایروودینامیکی در لایه مرزی با وجود واکنش‌های شیمیایی.

بارزترین نظریه در شاخه انتقال حرارت، تئوری لنیر- روبیلارد [۶] است، که خلاصه آن به قرار زیر است: سوزش سطح سوخت جامد با ضریب انتقال حرارت جابجایی به سطح سوخت متناسب است. شایان ذکر است که نظریه انتقال حرارت بسته به منبع حرارتی به دو شکل انجام می‌گیرد: اول آن که منبع حرارتی، دمای بالای گازهای گذرکننده از سطح سوخت فرض می‌شوند، دوم اینکه حرارت انتقالی به سطح سوخت ناشی از واکنش‌های شیمیایی درون ناحیه سوزش یا دمای شعله سوخت فرض می‌شود. طبق



تئوری لنیر - روبیلارد بنا بر اثر دمای گازهای جانبی بر سوزش، تخمین‌های درستی ارائه نمی‌شود.

اولین کارهایی که بر اساس نظریه شعله، پایه‌گذاری شده توسط واندنکرکوو [۷] صورت پذیرفته است. این محقق، ساختار شعله و مکانیزم تجزیه فاز جامد سوخت‌های دوپایه را در نظر گرفته است. کینگ [۸] مدلی را برای سوزش فرسایشی سوخت‌های مرکب ارائه داد نظریه او بر اساس کج شدن شعله توسط جریان‌های جانبی پایه‌گذاری شده است و بر اساس این نظریه، گازهای جانبی، ناحیه آزادسازی گرما را به سطح سوخت نزدیکتر می‌کند. کم شدن فاصله بین سطح سوخت و ناحیه آزادسازی، گرمای بازگشتی به سطح را افزایش می‌دهد و میزان سوزش را بالا می‌برد. البته کج شدن شعله، مخصوص سوخت‌های مرکب است و در خصوص سوخت‌های دوپایه لایه واکنشی در جریانهای جانبی کوچکتر می‌شود.

سوزش بر روی سطح سوخت جامد براساس روش لایه مرزی اولین بار توسط کرنر [۹] ارائه شد. در این روش از نظریه پراتنل-کارمن برای بیان میدان جریان استفاده شده است. تسوجی [۱۰]، رازدان [۱۱]، شویلر و تورودا [۱۲] مسئله را با فرض جریان لایه‌ای روی سطح سوخت تحلیل کردند. گرچه باید ذکر شود که جریان در موتور سوخت جامد کاملاً آشفته است. لنگل [۱۳] حل انتگرالی لایه مرزی آشفته را به همراه نظریه پخش شعله برای پیشرفت مدل خود در نظر گرفت. بدینی [۱۴] از مدل چند معادله‌ای آشفته برای حل مسئله لایه مرزی استفاده کرد. او احتراق سوخت‌های جامد همگن دوپایه را در نظر گرفت. گرچه تأکید فراوانی بر صحت انواع روش‌های مختلف در حل سوزش سوخت جامد شده است اما واقع بینانه‌ترین تحلیل، واکنش‌های متقابل بین ناحیه شعله و میدان جریان است. در این تحقیق نیز از این تحلیل برای پیش بینی و تخمین سوزش فرسایشی استفاده شده است که نتایج نیز همخوانی مطلوبی را با داده‌های تجربی نشان می‌دهند.

در این تحقیق، تحلیل میدان جریان با در نظر گرفتن معادلات بقای جرم، مومنتوم، و انرژی صورت می‌گیرد که پس از حل جریان، ضرایب انتقال حرارت را تصحیح می‌کند و نرخ بارگشت حرارت از شعله به سطح سوخت محاسبه می‌شود و در نهایت نرخ سوزش تخمین زده می‌شود.

۱- معادلات حاکم

فرم بقایی معادلات ناویر استوکس دو بعدی جریان آرام دو بعدی متقارن محوری به صورت زیر است [۱۵] و [۱۶]:

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t'} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial y} + \text{axi} \frac{\hat{F} + \hat{R}}{y} = \frac{\partial \hat{G}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{H}}{\partial y} + \text{axi} \frac{\hat{H} + \hat{T}}{y} + \hat{S} \quad (1)$$

که در آن بردارهای Q, E, F, R, G, H, T, S به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\hat{Q} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{Bmatrix} \quad \hat{E} = \begin{Bmatrix} \rho u \\ (\rho u)u + p \\ (\rho u)v \\ (\rho u)h \end{Bmatrix} \quad \hat{F} = \begin{Bmatrix} \rho v \\ (\rho v)u \\ (\rho v)v + p \\ (\rho v)h \end{Bmatrix} \quad \hat{R} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -p \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\hat{G} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} - q_x \end{Bmatrix} \quad \hat{H} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} - q_y \end{Bmatrix} \quad \hat{T} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tau_{\theta\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \hat{S} = \begin{Bmatrix} s_m \\ s_u \\ s_v \\ s_q \end{Bmatrix} \quad (3)$$

که در آن $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}, \tau_{\theta\theta}, q_x, q_y$ به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\tau_{xx} = \frac{4}{3}\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \text{axi} \frac{2}{3}\mu \frac{v}{y}; \quad \tau_{yy} = \frac{4}{3}\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \text{axi} \frac{2}{3}\mu \frac{v}{y} \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad \tau_{\theta\theta} = \frac{4}{3}\mu \frac{v}{y} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5)$$

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}; \quad q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \quad (6)$$

مقادیر μ, λ در سرتاسر میدان ثابت فرض می‌شود. و مقادیر بردار \hat{S} با توجه به میزان اضافه شدن مقدار جرم گاز ناشی از سوزش سوخت جامد است.

با فرض وجود گاز کامل در میدان جریان معادلات حالت را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$e = C_v t + \frac{1}{2}(u^2 + v^2); \quad h = C_p t + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad (7)$$

$$\rho = \frac{P}{Rt}; \quad C_p = C_v + R \quad (8)$$

معادلات بالا برای جریان‌های لزج گازی تراکم پذیر مادون صوت، گذر صوتی و مادون صوت است. فرم انتگرالی معادلات ذکر شده به صورت زیر است:

$$\int_{V_i} \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t'} d\vartheta + \int_{SS_i} (\hat{E}\vec{i} + \hat{F}\vec{j}) \cdot d\vec{s} + \int_{SS_k} (\hat{E}\vec{i} + \hat{F}\vec{j}) \cdot d\vec{s} + \text{axi} \int_{V_i} \frac{\hat{F} + \hat{R}}{y} d\vartheta = \int_{SS_i} (\hat{G}\vec{i} + \hat{H}\vec{j}) \cdot d\vec{s} + \int_{SS_k} (\hat{G}\vec{i} + \hat{H}\vec{j}) \cdot d\vec{s} + \text{axi} \int_{V_i} \frac{\hat{H} + \hat{T}}{y} d\vartheta + \int_{V_i} \hat{S} d\vartheta \quad (9)$$

که در آن نقاط انتگرالی 3, 2, 1, 4 است وقتی که نقاط انتگرالی 4, 3, 2, 1 است. معادلات فوق با تقریب عددی برای هر زیر حجم کنترل بصورت زیر می‌شود:

$$\frac{\hat{Q}_i - \hat{Q}_i^0}{\Delta t'} \vartheta_i + (\hat{E}\Delta s_x + \hat{F}\Delta s_y)_{ipi} + (\hat{E}\Delta s_x + \hat{F}\Delta s_y)_{ipk} + \text{axi} \frac{\hat{F}_i + \hat{R}_i}{y_i} \vartheta_i = (\hat{G}\Delta s_x + \hat{H}\Delta s_y)_{ipi} + (\hat{G}\Delta s_x + \hat{H}\Delta s_y)_{ipk} + \text{axi} \int_{V_i} \frac{\hat{H} + \hat{T}}{y} d\vartheta + \hat{S}_i \vartheta_i \quad (10)$$

در مرجع [۱۷] نحوه خطی کردن ترم‌های معادله فوق به جز ترم‌های ضرب شده در axi توضیح داده شده است که در اینجا از ذکر آنها خودداری می‌شود.

در روش حل ضمنی معادلات شکل کلی دستگاه معادلات به صورت $[A]\{X\} = \{B\}$ درمی‌آید که در آن ماتریس‌های A و B به صورت زیر می‌باشد:



$$A_{4(i-1)+1,m} = E_{1,m}^i \Delta s_x|_i + F_{1,m}^i \Delta s_y|_i + E_{1,m}^k \Delta s_x|_k + F_{1,m}^k \Delta s_y|_k + \frac{\vartheta_i}{\Delta t} Q_{1,m}^i + axi \cdot FR_{1,m}^i - G_{1,m}^i \Delta s_x|_i - H_{1,m}^i \Delta s_y|_i - G_{1,m}^k \Delta s_x|_k - H_{1,m}^k \Delta s_y|_k - axi \cdot HT_{1,m}^i \Delta s_x|_i \quad (11)$$

$$B_{4(i-1)+1} = S_i^i \vartheta_i + \frac{\vartheta_i}{\Delta t} D_i^i - g_i^i \Delta s_x|_i - f_i^i \Delta s_y|_i - g_i^k \Delta s_x|_k - f_i^k \Delta s_y|_k \quad (12)$$

که در آن $l=1,4$, $m=1,4$, $k=4, 1, 2, 3$ و وقتی که $i=1, 2, 3, 4$ است. شماره‌های i و k در سمت راست معادله فوق مربوط به نقاط انتگرالی ip_i و ip_k است، به جز برای FR, HT, V, D, R, Q که i اشاره به رئوس سلول می‌کند. تغییر مختصات از دستگاه x, y به دستگاه s, t همانند روشی است که در مرجع [۱۷] آورده شده است. اما سطح و حجم سلول به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Delta s_x = \Delta y \cdot (2\pi y_{ip})^{axi} ; \quad \Delta s_y = -\Delta x \cdot (2\pi y_{ip})^{axi} ; \quad \vartheta_i = \left| J \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right| (2\pi y_{ip})^{axi} \quad (13)$$

نحوه مدل‌سازی ترم‌های نفوذی به صورت تفاضل مرکزی و ترم‌های جابه‌جایی به شکل بالادست جریان است.

تحلیل نرخ سوزش

بر اساس رابطه‌ای که بکستید [۱۸] ارائه کرده است، بین شار سوزش جرمی با دمای سطح سوخت معادله‌ای مانند (۱۴) برقرار است:

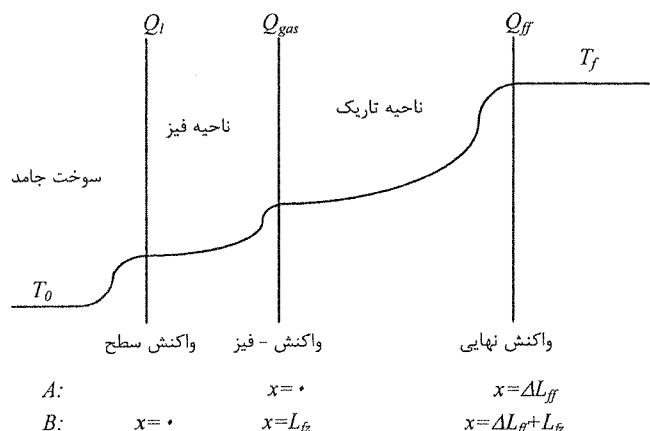
$$\dot{m} = A_s \text{EXP} \left(-\frac{E_s}{RT_s} \right) \quad (14)$$

رابطه فوق اصلاح یافته‌ای از رابطه آرنیوس [۱۹] است. برای سوخت دوپایه همگن در این رابطه A_s ثابتی به مقدار 5000 گرم بر سانتیمتر مربع بر ثانیه و همچنین E_s ثابت دیگری به مقدار 10000 کالری بر گرم - مول است. برای تحلیل سوزش سوخت‌های جامد همگن دوپایه با جریانهای گذر کننده از سطح سوزش، فرضیات زیر در نظر گرفته می‌شود:

- ۱- در مجموع، سه ناحیه واکنش وجود دارند که ضخامت آنها بسیار کوچک و به شکل نوار باریکی فرض می‌شوند. این سه ناحیه عبارتند از: ناحیه واکنشی در سطح سوخت، ناحیه واکنشی فیز و ناحیه واکنش انتهایی.
 - ۲- بین نواحی ذکر شده واکنشی رخ نمی‌دهد.
 - ۳- آشفستگی جریان بر ناحیه فیز اثر می‌گذارد. برای این مبداء مختصات روی سطح سوزش فرض می‌شود و تا انتهای نواحی سوزش معادلات حل می‌شوند. این مطالب در شکل (۱) نشان داده شده است.
- دمای ابتدای ناحیه تاریک (بعد از سطح واکنش فیز) به صورت تجربی توسط $T_{dz} = a + dH_{ex}$ آوکی و کوپوتا [۱۸] به شکل زیر بیان شده است:

$$T_{dz} = a + dH_{ex} \quad (15)$$

در این رابطه H_{ex} گرما برحسب کالری است که از واحد جرم سوخت پس از سوختن آزاد می‌شود. d مقداری ثابت برابر 0.425 و a ضربی است که به صورت زیر به فشار مرتبط شده است.



شکل (۱): ساختار سوزشی سوخت‌های جامد همگن (دوپایه)
الف - ناحیه فیز صلب. ب - ناحیه فیز گازی شکل.

(۱۶) اگر P کوچک‌تر از 20 اتمسفر باشد: $a = 720 + 125 \ln(P)$

(۱۷) اگر P بزرگ‌تر یا مساوی 20 اتمسفر باشد: $a = 855 + 80 \cdot \ln(P)$

پارامتر دیگری که برای آن رابطه تجربی ارائه می‌شود، گرمایی است که بر واحد جرم از سطح سوخت به هنگام تغییر فاز آزاد می‌گردد:

$$Q_1 = (65.7 + 0.013H_{ex})(P/6)^{0.08} \quad (18)$$

در روابط ارائه شده Q_1 برحسب کالری بر گرم است. نکته‌ای که یادآوری آن در این اینجا فوق العاده حائز اهمیت است این است که روابط به دست آمده با استفاده از نمونه خاصی از سوخت‌های دوپایه حاوی $12/2\%$ نیتروسولوز، نیتروگلیسیرین، دی‌اتیل فتالات و دی‌نیترودی‌فنیل‌آمین بانسبت‌های مختلف به دست آمده‌اند و هیچ تضمینی نیست که برای انواع سوخت‌های دوپایه، ضرایب این روابط به همین مقدار باقی بمانند. اما کاملاً معقول است که شکل کلی روابط و یا به عبارتی دیگر، تابعیت آنها از فشار و گرمای آزاد شونده از واحد جرم سوخت، برای انواع سوخت‌های دوپایه به همان شکل باقی بماند [۱۸].

بر اساس فرضی که قبلاً نیز ذکر شد، گرمای تولیدشده در ناحیه واکنش سطح سوخت و ناحیه فیز، صرف گرم کردن گازهای داخل ناحیه فیز و سطح سوخت می‌شوند و گرمایی به سمت ناحیه تاریک وارد یا خارج نمی‌شود. از اینرو گرمایی که در ناحیه واکنشی فیز آزاد می‌شود، به صورت زیر خواهد بود:

$$Q_{gas} = C_{piz}(a + dH_{ex} - T_s) + C_{ps}(T_s - T_0) - Q_1 \quad (19)$$

همچنین شرایط مرزی جدید به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{cases} T = T_{fz-dz} & \text{at } x = L_{fz} \\ \lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L_{fz}^-} = \dot{m} Q_{gas} + \lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L_{fz}^+} \end{cases} \quad (20)$$

با توجه به اینکه اثرات آشفستگی در فواصل مختلف نسبت به سطح سوخت و سرعت محلی جریان، مقادیر کاملاً متفاوتی خواهند داشت، ضریب انتقال حرارت معادل نیز نسبت به فاصله تا سطح سوخت متغیر خواهد بود. بنابراین برای حل معادلات از روش‌های عددی، لازم است که نواحی سوزش در جهت عمود بر سوخت شبکه‌بندی شده و در هر کدام از گره‌ها مقدار ضریب انتقال حرارت معادل محاسبه شود.

با وجود جریان‌های جانبی، ضخامت لایه فیز از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$L_{fz} = \frac{\dot{m} R K_{fzrx} (T_{fz-dz} + T_s) \text{EXP} \left(\frac{40000}{RT_{fz-dz}} \right)}{2P(MW)T_{fz-dz}} \quad (21)$$

که در آن K_{fzrx} ضریب تجربی است. داده‌های بدست آمده توسط آنوکی و کوبوتا، ضخامت ناحیه تاریک را در نظر گرفته و رابطه زیر برای آن ارائه شده است:

$$\Delta L_{ff} = \frac{252}{P^{2.1}} \left(\frac{\dot{m}}{\dot{m}_{no_cross_flow}} \right) \quad (22)$$

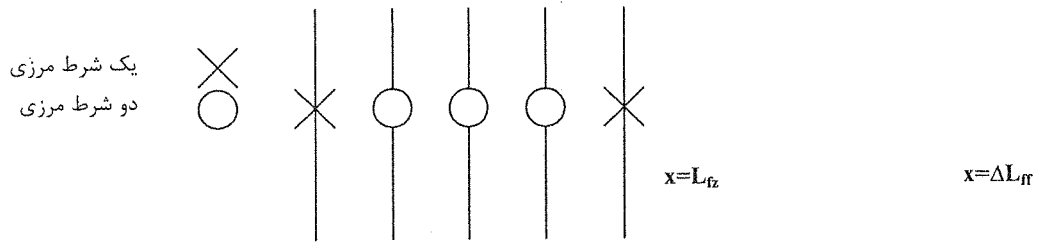
P بر حسب اتمسفر و ΔL_{ff} بر حسب سانتیمتر است. با استفاده از معادلات بقای انرژی در ناحیه تاریک و با توجه به شکل (۱) رابطه زیر را می‌توان برای گرمای آزاد شده در ناحیه انتهایی واکنش نوشت.

$$Q_{ff} = C_{pdz} (T_f - a - dH_{ex}) \quad (23)$$

Q_{ff} بر حسب کالری بر گرم است. در صورتی که ناحیه فیز گازی فرض شود و اثرات آشفستگی درون این ناحیه وارد شود، در این صورت رابطه دمای سطح سوخت به صورت زیر خواهد بود:

$$T_s = T_{fz-dz} - \left(\frac{Q_{gas}}{C_{pfz}} + \frac{\lambda_{t,x=L_{fz}}}{\dot{m} C_{pfz}} \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L_{fz}^+} \right) \left(1 - \prod_{M=1}^{MTOT} \text{EXP} \left(-\dot{m} C_{pfz} \left(\frac{x(M) - x(M-1)}{\lambda_t(M)} \right) \right) \right) \quad (24)$$

در فرمول فوق $M=1$ در گره $x=0$ (روی سطح سوخت) و $M=MTOT$ در گره $x=L_{fz}$ (ابتدای ناحیه تاریک) واقع است. برای محاسبه ضخامت ناحیه فیز از فرمول (۲۱) استفاده می‌کنیم. شرط مرزی معادله فوق در معادله (۲۰) آمده است. معادله (۲۴) نیز بر اساس تحلیل ارائه شده در شکل (۲) بدست آمده است.



شکل (۲) تقسیم ناحیه تاریک به چند قسمت (در هر قسمت ضریب هدایت آشفته ثابت است).

رابطه‌ای که برای $\frac{dT}{dx}\bigg|_{x=L_{ff}^+}$ در نظر گرفته می‌شود به این صورت است که مختصات روی سطح سوخت گذاشته شده است.

$$T_{ff-dz} = T_f - \frac{Q_{ff}}{C_{pdz}} \left(1 - \prod_{N=1}^{NTOT} \text{EXP} \left(-\dot{m} C_{pdz} \left(\frac{x(N) - x(N-1)}{\lambda_t(N)} \right) \right) \right) \quad (25)$$

$$\frac{dT}{dx}\bigg|_{x=L_{ff}^+} = \frac{\dot{m} Q_{ff}}{\lambda_t(N=1)} \left(\prod_{N=1}^{NTOT} \text{EXP} \left(-\dot{m} C_{pdz} \left(\frac{x(N) - x(N-1)}{\lambda_t(N)} \right) \right) \right) \quad (26)$$

تخمین ضریب انتقال حرارت هدایتی آشفته λ_t از طریق آنالیز لایه مرزی

در بررسی‌های به انجام رسیده تنها مجهولی که باقی می‌ماند، محاسبه ضریب انتقال حرارت ناشی از آشفتگی λ_t است. برای یافتن این ضریب قدم‌های زیر طی می‌شود.

ابتدا ضریب اصطکاک سطحی بدون جریانهای جانبی به صورت تابعی از عدد رینولدز جریان، با استفاده از معادله سطح صاف بیان می‌شود.

$$C_{f0} = 0.00140 + 0.125 \text{Re}^{-0.32} \quad (27)$$

برای وارد کردن اثر ورود جرم از سطح سوزش بر ضریب اصطکاک، پارامتری به نام پارامتر وزش به صورت زیر تابعی از C_{f0} تعریف می‌شود:

$$b = \frac{2\dot{m}}{(\rho U_{fs})_{\text{cross flow}} C_{f0}} \quad (28)$$

با استفاده از دو رابطه ارائه شده، ضریب اصطکاک واقعی تعریف می‌شود. قابل توجه است که روابط مختلفی را می‌توان ارائه کرد اما در اینجا رابطه‌ای انتخاب شده که برای سوخت‌های مرکب به نحو موفقی از آن استفاده شده است و قابل تعمیم به سوخت‌های دوپایه نیز هست.

$$C_f = C_{f0} \frac{\left(\frac{1-b}{10} \right)^2}{\left(1 + \frac{b}{10} \right)^{0.4}} \quad (29)$$

از رابطه اخیر برای تخمین تنش برشی بر سطح سوخت استفاده می‌شود:

$$\tau_{\text{wall}} = \frac{C_f}{2} \rho_{fs} U_{fs}^2 \quad (30)$$

با استفاده از آنالیز لایه مرزی، رابطه‌ای برای تنش برشی بر حسب فاصله از سطح و سرعت محلی به دست می‌آید:

$$\tau = \tau_{\text{wall}} + \dot{m}u - kx \quad (31)$$

$$k = \frac{0.9 \dot{m} \bar{U} \left(2 + \frac{(\gamma + 1) M^2}{1 - M^2} \right)}{\frac{D}{2}} \quad (32)$$

رابطه‌ای نیز از فرضیه نیوتن برای تنش برشی سیالات به صورت زیر موجود است:

$$\tau = (\mu + \rho \varepsilon) \frac{du}{dx} \quad (33)$$

مقادیر μ و ρ تابع دما هستند. طول اختلاط پرناتل برای ذرات لزج به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon = 0.168 x^2 (DF)^2 \frac{du}{dx} \quad (34)$$

در محاسبات انجام شده ضریب لزجت DF واحد فرض شده است. با ترکیب و حل همزمان معادلات (31) الی (34) و داشتن شرط مرزی $u=0$ در $x=0$ مقدار ضریب انتقال حرارت هدایتی آشفته λ_f به صورت تابعی از فاصله تا سطح سوخت محاسبه خواهد شد.

$$\frac{\lambda_f}{\lambda} = 1 + \frac{\rho \varepsilon}{\mu} = f(x) \quad (35)$$

اگر معادلات فوق با یکدیگر ترکیب شوند، معادله درجه دوم زیر به دست می‌آید:

$$0.168 \rho x^2 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \mu \frac{du}{dx} - \dot{m}u - \tau_{\text{wall}} + kx = 0 \quad (36)$$

پس از حل معادله درجه دو فوق، جمله مشتق سرعت نسبت به فاصله عمودی از سطح سوخت به دست می‌آید.

$$\frac{du}{dx} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 0.672 \rho x^2 (\dot{m}u + \tau_{\text{wall}} - kx)}}{0.336 \rho x^2} \quad (37)$$

معادله به دست آمده، معادله دیفرانسیل ODE است. برای حل، نیاز به یک شرط مرزی است که همان شرط عدم لغزش است و

به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 0 \end{cases} \quad (38)$$

روشی که برای حل این معادله بکار برده شده، رانگ - کوتا مرتبه ۴ است.

نحوه محاسبه میزان سوزش جرمی با جریان‌های جانبی

معادلات لازم برای تخمین شار سوزش جرمی سوخت‌های جامد دوپایه با وجود جریان در قسمت‌های قبلی ارائه شد. اما نحوه به دست آوردن این مقدار، برای مقادیر مشخص فشار، گرمای آزاد شونده از واحد جرم سوخت و سرعت جریان‌های جانبی هنوز مبهم است. برای رسیدن به این هدف، قدم‌های زیر برداشته می‌شود:

- ابتدا مقدار \dot{m} بدون جریان‌های جانبی به دست می‌آید.

- مقداری برای \dot{m} با حضور جریان‌های جانبی حدس زده می‌شود.

- از معادله (۲۲)، ΔL_{ff} به دست می‌آید.

- از معادله (۲۳)، Q_{ff} محاسبه می‌شود.

- با توجه به روش تخمین ضریب انتقال حرارت هدایتی آشفته λ_1 از طریق آنالیز لایه مرزی که در بخش‌های قبلی توضیح داده شد، λ_1 در تمام گره‌ها محاسبه می‌شود.

- از روابط (۲۵) و (۲۶) مقادیر T_{fz-dz} و $\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L_{fz}^+}$ محاسبه می‌شود.

- معادله (۱۴) برای T_s حل می‌شود.

- از معادله (۱۹) Q_{gas} به دست می‌آید.

- معادلات (۲۱) و (۲۴) همزمان برای L_{fz} و \dot{m} حل می‌شوند.

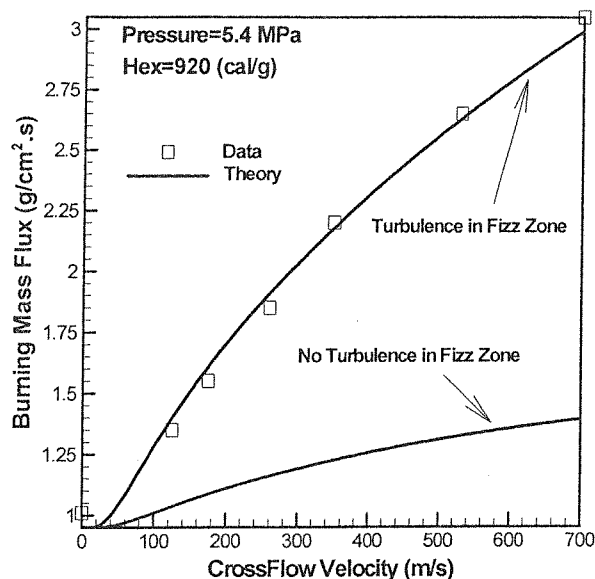
در نهایت مقدار \dot{m} بدست آمده با مقدار قبلی مقایسه می‌شود در صورتی که اختلاف دو مقدار از خطایی مشخص کمتر باشد

محاسبات تمام است. در غیر این صورت \dot{m} اصلاح و محاسبات از پله سوم تکرار می‌شود.

بحث و بررسی نتایج

در این قسمت نتایج به دست آمده از دو نظریه ارائه شده، با نتایج تجربی به دست آمده از آزمایش‌های تجربی میلر مقایسه خواهند شد [۱۸]. همان طور که از شکل (۳) پیدا است، نتایج محاسباتی با نتایج آزمایشگاهی همخوانی قابل قبولی را نشان می‌دهند.

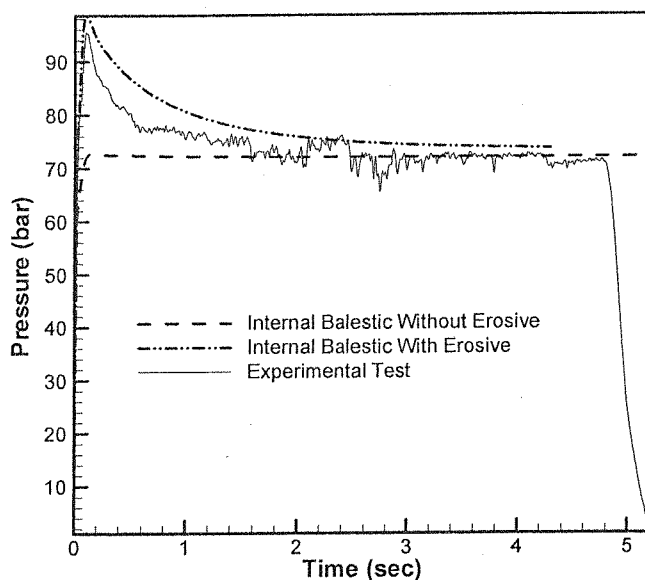




شکل (۳): اثر جریان‌های عرضی بر مقادیر آزمایشگاهی و محاسباتی برای سوخت‌های جامد دوپایه.

راکت سوخت جامد با گرین استوانه درون - بیرون سوز

آزمایش دیگر، اجرا کردن برنامه بالستیک داخلی برای موتوری با مشخصاتی است که در جدول (۱) تا جدول (۳) آمده است. سوخت این موتور جامد دوپایه است و همزمان از درون و بیرون می‌سوزد. نتایج به دست آمده حاصل از شبیه‌سازی با نتایج حاصل از تست استاتیک راکت مقایسه شده‌اند. نتایج بدست آمده در شکل (۴) ارائه شده است.



شکل (۴): مقایسه نتایج برنامه با داده‌های تجربی برای موتور درون - بیرون سوز [۲۰].

جدول (۱): مشخصات هندسی گرین موتور درون- بیرون سوز.

پارامتر	علامت اختصاری	مقدار فرض شده	واحد
قطر خارجی	D_o	۲۸۵	mm
قطر داخلی	D_i	۷۵	mm
طول	L	۲۱۱۰	mm

جدول (۲): مشخصات سوخت جامد دوپایه بکار رفته در موتور درون- بیرون سوز.

پارامتر	علامت اختصاری	مقدار فرض شده	واحد
گرما دهی بر واحد جرم	H_{ex}	۸۳۵	Cal / gm
ظرفیت حرارتی	C_{ps}	۰/۳۵۰۴۸	$^{\circ}K$ Cal / gm
ضریب انتقال حرارت هدایتی	γ	۰/۱۰۰۱۴۵	$^{\circ}K$ Cal / gm
ضریب سوزش	a	۵/۰۱	mm / s
توان سوزش	n	۰/۱۳۷۵	بی بعد
چگالی	ρ	۱/۵۶	gm / cm ³
دمای اولیه	T_0	۲۹۳	$^{\circ}K$
وزن	w	۱۹۵	kgf

جدول (۳): مشخصات گازهای ناشی از احتراق سوخت جامد دوپایه بکار رفته در موتور درون- بیرون سوز.

پارامتر	علامت اختصاری	مقدار فرض شده	واحد
ثابت جهانی	R	۱/۹۸۵۹	$^{\circ}K$ Cal / gm
وزن مولکولی	MW	۲۲/۴۷	gm / mole
ظرفیت حرارتی ناحیه فیز	C_{PFZ}	۰/۴۰۰۷۲	$^{\circ}K$ Cal / gm
ظرفیت حرارتی ناحیه تارک	C_{PDZ}	۰/۴۰۰۷۲	$^{\circ}K$ Cal / gm
نسبت حرارتی	γ	۱/۲۵۲۹	بی بعد
دمای شعله	T_f	۲۴۶۰	$^{\circ}K$

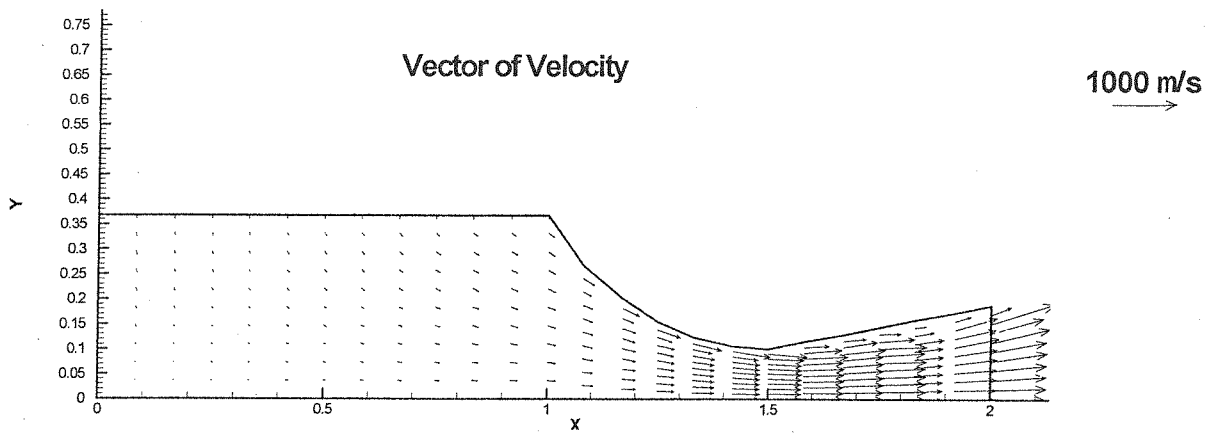
راکت سوخت جامد با گرین استوانه درون سوز در حالت گذرا

نتایج بدست آمده از اجرای برنامه برای یک موتور سوخت جامد با هندسه دو بعدی در این قسمت توضیح داده شده است. شکل (۵) بردارهای سرعت در میدان جریان داخل موتور و شکل (۶) توزیع فشار بعد از زمان ۰/۰۰۲ ثانیه (۱۰ پله زمانی) بعد از شرایط اولیه را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که شرایط اولیه به صورت $u=50$ m/s, $v=0$ m/s, $T=1300K$, $P=50$ Bar در کل ناحیه داخل موتور است.

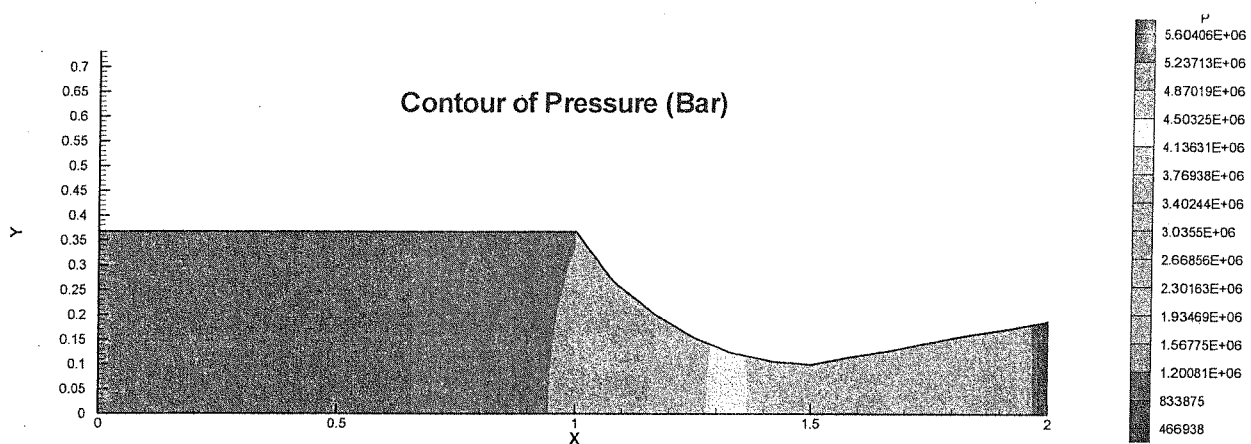
شرط مرزی در محور x بصورت symmetric، داخل سطح بالایی مستطیل، تزریق گاز با سرعت $v=50$ m/s، دیواره نازل و کف مستطیل (سطح سمت چپ) $u=v=0$ m/s و آدیاباتیک و خروجی جریان در صورت مادون صوت بودن شرط فشار محیط $P=1$ Bar و در صورت مافوق صوت بودن برون‌یابی از داخل جریان می‌شود.

همان‌طور که در شکل (۶) دیده می‌شود، فشار در داخل محفظه احتراق به حدود ۵۶ بار رسیده و در خروج با توجه به این که جریان سوپرسونیک است، فشار به حدود ۴ بار کاهش یافته است. البته به علت وجود جریان گذرا در نازل و اگر می‌توان شاهد کاهش و بعد افزایش فشار بود. شکل (۷) توزیع عدد ماخ و شکل (۸) توزیع دما را نشان می‌دهند.

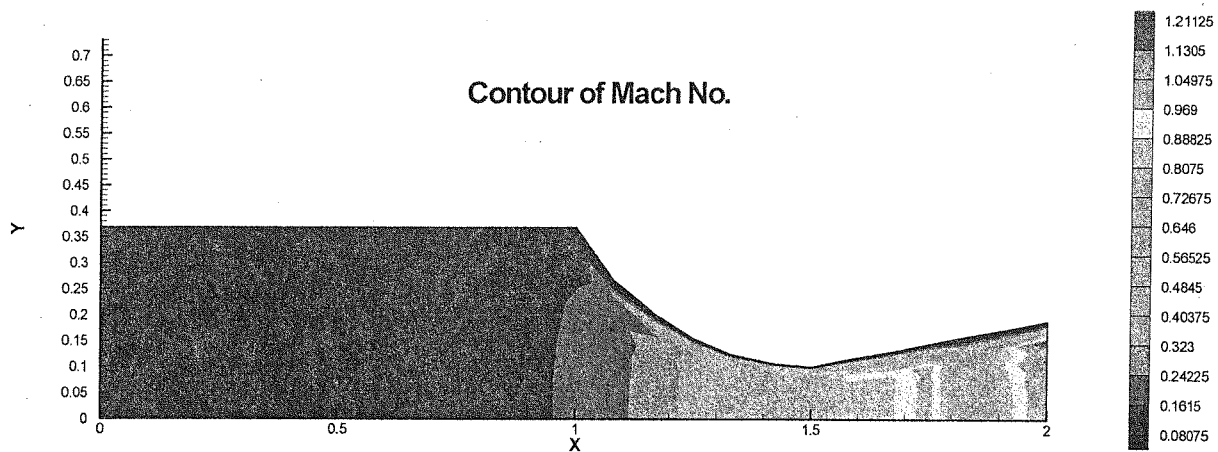




شکل (۵): بردارهای سرعت داخل موتور و نازل دو بعدی در زمان ۰/۰۰۲ ثانیه بعد از شرایط اولیه.

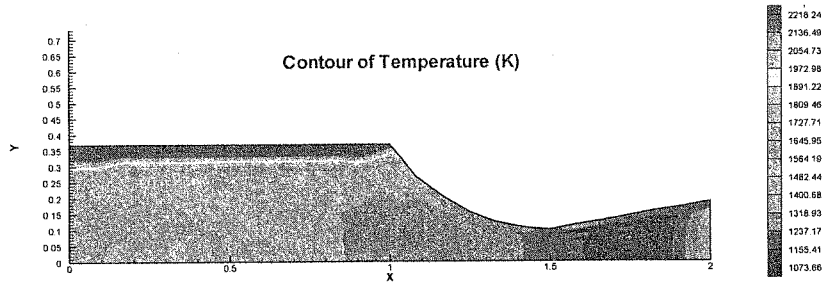


شکل (۶): توزیع فشار داخل موتور و نازل دو بعدی در زمان ۰/۰۰۲ ثانیه بعد از شرایط اولیه.



شکل (۷): توزیع عدد ماخ داخل موتور و نازل دو بعدی در زمان ۰/۰۰۲ ثانیه بعد از شرایط اولیه.





شکل (۸): توزیع دما داخل موتور و نازل دو بعدی در زمان ۰/۰۰۲ ثانیه بعد از شرایط اولیه.

کارهای آینده

برای آینده در نظر است تا فعالیت‌هایی برای کاملتر شدن مدل سازی صورت بگیرد که عبارتند از: (۱) اضافه کردن مدل سازی توربولانت $k-\epsilon$ برای بدست آوردن λ_p ، λ_t ، γ بهبود مدل سازی $k-\epsilon$ ، چرا که فرض ثابت بودن ν_t در محاسبات خطا وارد می‌کند، (۲) سه بعدی کردن روش شبیه سازی برای دقت بیشتر در بدست آوردن گردابه‌ها و میزان سوزش سوخت جامد.

فهرست علائم

S_m : منبع جرم

S_u, S_v : منبع مومنتم

T_0 : دمای اولیه سوخت

T_{dz} : دمای ناحیه تاریک

T_f : دمای شعله

t : دما

t' : زمان

u : سرعت در جهت x

v : سرعت در جهت y

T_s : دمای سطح سوزش

θ : حجم المان شبکه

x, y : بردار مختصات

X : بردار مجهولات المان

A : ماتریس ضرایب المان

axi : 0 برای دو بعدی و 1 برای متقارن محوری

b : پارامتر وزش

B : بردار سمت راست رابطه ماتریسی المان

c : ماتریس ضرایب مقادیر نقاط انتگرالی

C : ماتریس ضرایب مقادیر نقاط سلول

C_f : ضریب اصطکاک سطحی

C_{f0} : ضریب اصطکاک سطحی بدون گاز جانبی

C_p : ضریب حرارتی فشار ثابت

C_{pdz} : ضریب حرارتی فشار ثابت ناحیه تاریک

C_{pfz} : ضریب حرارتی فشار ثابت ناحیه فیز

C_{ps} : ضریب حرارتی سوخت جامد

C_v : ضریب حرارتی حجم ثابت

DF : ضریب لزجت

e : انرژی در واحد جرم

علائم یونانی

γ : نسبت گرمای ویژه

λ : ضریب انتقال حرارت هدایتی

λ_p : ضریب انتقال حرارت هدایتی آشفته

μ : لزجت

ρ : جرم حجمی

\hat{E}, \hat{F} : بردارهای فلاکس جابه جایی

H_{ex} : گرمای آزاد شده از واحد جرم سوخت

h : انتالپی در واحد جرم

J : ماتریس ژاکوبین

L_{ff} : ضخامت ناحیه تاریک

L_{fz} : ضخامت لایه فیز

M : عدد ماخ

بالا نویس‌ها

C : مربوط به جابه جایی

d : مربوط به نفوذ

0 : مقدار در زمان قبل

MW : جرم مولکولی گاز

\dot{m} : شار جرمی

N : تعداد نقاط شبکه

P : فشار



Q_{ff} : گرمای آزاد شونده در ناحیه تاریک

زیر نویس ها

ip: نقاط انتگرالی

Q_{gas} : گرمای آزاد شونده در ناحیه فیز

dz: ناحیه تاریک

Q_1 : گرمای آزاد شونده در سطح سوخت

fz: ناحیه فیز

q: مقدار سرعت

fs: جریان آزاد

R: ثابت گاز

up: بالادست

Re: عدد رینولدز

S: سطح المان شبکه

مراجع

- [1] Raw, M. J. Galpin, P. F. and Hutchinson .B.R., A Co-located Finite-Volume Method for Solving the Navier-Stokes Equations for Incompressible and Compressible Flows in Turbo machinery: Results and Applications, Canadian Aeronautics and Space Journal, Val. 35, No. 4, pp. 189-196 (1989).
- [2] Raw, M. J. Galpin, P. F. and Raithby, G. D., The Development of an Efficient Turbo machinery CFD Analysis Procedure, AIAA Paper 89-2394, AIAA/ASME/SAE/ASEE 25th Joint Propulsion Conference, Monterey, CA/July 10-12 (1989).
- [3] Rhie, C. M., and Chow, W. L., Numerical Study of the turbulent Flow Past an Airfoil With Trailing Edge Separation, AIAA Journal, Vol. 21 No. 11, pp. 1525-1532 (1983).
- [4] Van Doormaal, J. P., Raithby, G. D. and McDonald, B. H., The Segregated Approach to Predicting Viscous Compressible Fluid Flows, Journal of Turbo machinery, Transactions of the ASME, Vol. 109, No. 2, pp. 268-277 (1987).
- [5] Razdan, M. K. & Kuo, K. K., Erosive Burning Study of Composite Solid Propellants by Turbulent Boundary-Layer Approach, AIAA Journal, Vol. 17, No. 11, pp. 1225-1233 (1979).
- [6] Lenoir, J. M. & Robillard, G., A Mathematical Method To Predict the Effect of Erosive Burning in Solid-Propellant Rockets, Sixth Symposium (International) on Combustion, Reinhold, NewYork. 6, pp. 663-667 (1957).
- [7] Vandekerckhove, J. A., Erosive Burning of a Colloidal Solid Propellant, Jet Propulsion, Reinhold, Vol. 28, pp. 599-603 (1958).
- [8] King, M. K., An Analytical and Experimental Study of Erosive Burning of Composite Propellants, AFOSR-TR-78-0060, Final Report to U.S. Air Force Office of Scientific Research (1977).
- [9] Corner, J., Theory of Interior Ballistics of Guns, John Wiley and Sons, New York, pp. 73-81 (1950).
- [10] Tsuji, H., An Aerothermochemical Analysis of Erosive Burning of Solid Propellant, Ninth Symposium (International) on Combustion, Williams & Wilkins, Baltimore, Md. 6, pp. 384-393 (1963).
- [11] Razdan, M. K., Theoretical Studies on the Erosive Burning of Double-Base Solid Propellants, Master of Technology Thesis, Indian Institute of Technology, Kanpur (1974).
- [12] Schuyler, F. L. and Toroda, T. P., An Aerothermochemical Analysis of Solid Propellant Combustion, AIAA Journal, Vol. 4, pp. 2171-2177 (1966).
- [13] Lengelle, G., Model Describing the Erosive Combustion and Velocity Response of Composite Propellants, AIAA Journal, Vol. 13, pp. 315-322 (1975).
- [14] Beddini, R., Reacting Turbulent Boundary-Layer Approach to Solid Propellant Erosive Burning, AIAA Journal, Vol. 16, pp. 898-905 (1978).
- [15] K. K. Kuo, Principles of Combustion, John Wiley & Sons, (1986).
- [16] امیر مهدی تحسینی، بررسی عددی اثر شتاب دورانی در بالستیک داخلی موشک سوخت جامد با حل معادلات نویر استوکس سه بعدی تقارن محوری، پایان نامه کارشناسی ارشد دانشکده هوافضا دانشگاه شریف، ۱۳۸۱.
- [17] S. M. H. Karimian 'Pressure Based Control-Volume Finite Element Method for Flow at All Speeds', PHD thesis in Mechanical Engineering, Waterloo, Ontario, Canada, (1994).
- [18] King, M. K., Model for Prediction of Double-Base Propellant Burn Rate, Including Cross-Flow Effects, AIAA Journal, Vol. 20, No. 10, pp. 1432-1439 (1982).
- [19] Kenneth, K. K. & Summerfield, M., Fundamentals of Solid-Propellant Combustion, Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 90, (1984).
- [17] عدی سلمانیان، بررسی و شبیه سازی عددی سوزش فرسایشی در سوخته های جامد دو پایه (همگن) ، پایان نامه کارشناسی ارشد دانشکده هوافضا دانشگاه شریف، ۱۳۷۷.



