

# محاسبه نرخ فدا شدن گرافیت در نزدیکی نقطه سکون دماغه موشکها

حسین سوری  
کارشناسی ارشد

کیومرث مظاهری  
استادیار

بخش مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس

## چکیده

در این مقاله یک روش برای پیش‌بینی نرخ سوزش گرافیت در نزدیکی نقطه سکون اجسام پخ متقارن محوری در جریانهای ماورای صوت ارائه شده است. در این راستا، معادلات حاکم بر لایه مرزی واکنش‌دهنده به همراه شرایط مرزی مربوطه استخراج شده‌اند. فرض فاز گازی تثبیتی (Frozen) به همراه احتراق سطحی برای واکنشها بکار رفته است. این فرض باتوجه به نوع گرافیت، برای دمای کمتر از تقریباً ۲۷۵۰ تا ۴۴۵۰ درجه کلوین صادق است. تعادل شیمیایی در سطح بین گونه‌های  $CO_2$ ،  $CO$  و  $O_2$  در نظر گرفته شده است. معادلات حاکم بر مسئله به روش تشابهی (Self-Similar) حل شده‌اند. در انتها نشان داده شده که نتایج بدست آمده از این تحلیل، با داده‌های تجربی همخوانی خوبی دارد.

## کلمات کلیدی

فداشوندگی - "گرافیت" - "ماوراء صوت" - "گرمايش" - "آیرودینامیک"

## Calculation of Graphite Ablation Rate Near the Missiles Nostetip Stagnation Point

K. Mazaheri  
Assistant Professor

H. Soury  
Graduate Student

Department of Mechanical Engineering,  
Tarbiat Modarres University

## Abstract

*A method is presented for prediction of graphite ablation rate at the stagnation region of an axisymmetric blunted nosetip of hypersonic vehicles. For this purpose, governing equations of reacting boundary layer are derived with appropriate boundary conditions. Frozen gas phase with surface reaction is postulated. This assumption, depending on the graphite grade, is reliable at temperature about 2750 to 4450 K. thermochemical equilibrium between  $CO_2$ ,  $CO$ , and  $O_2$  is assumed. The governing equations are solved by a self-similar method. The comparison of the self-similar solution with experimental data, indicates a good agreement.*

## Keywords

*Ablation"- "Graphite"-Hypersonic"- "Heating"- "Aerodynamic"*

زمانی که یک فضاپیما یا موشک وارد جو می‌شود، به علت بالا بودن سرعت ورود، در اثر فشرده شدن مولکولهای هوا در جلو وسیله پرنده و تبدیل انرژی جنبشی به انرژی حرارتی، با گرمایش آیرودینامیکی شدیدی مواجه می‌شود. این پدیده خصوصاً در اطراف دماغه از اهمیت خاصی برخوردار است و می‌تواند موجب آسیب رسیدن به سازه و سطوح آیرودینامیکی شود. بعنوان مثال دما در لایه مرزی نوک دماغه موشکی که با ماخ ۱۰ وارد جو می‌شود، می‌تواند به بیش از ۴۰۰۰ درجه کلوین برسد. و یا دمای لایه مرزی در نقطه سکون دماغه شاتل زمانی که با ماخ ۳۶ وارد جو می‌شود به ۱۱۰۰۰ درجه کلوین می‌رسد [۱].

کاملاً واضح است که هیچ سازه‌ای و هیچ نوع عایق حرارتی معمولی قادر به تحمل این گونه محیطها نیست مگر اینکه توسط مکانیزمهایی اثر این شارهای حرارتی شدید کاهش داده شود. حال این سؤال پیش می‌آید که سازه وسایل پرنده را چگونه در برابر چنین محیطهای حفظ می‌کنند؟ ذکر این نکته لازم است که خوشبختانه اکثر این وسایل مدت زمان نسبتاً کوتاهی در معرض اینگونه محیطها قرار دارند. یکی از عایقهای پرکاربرد در این گونه محیطها، عایقهای فداشونده (Ablative insulator) می‌باشند. عایقهای فداشونده زمانی که در معرض برخورد گازهای داغ محیط قرار می‌گیرند، با انجام تغییرات فازی و واکنشهای شیمیایی، مقداری از شار حرارتی را جذب و تلف می‌کنند. علاوه بر این با تولید گاز حاصل از واکنش و دمش آن به داخل لایه مرزی، راه رسیدن شار حرارتی را به سطح سد می‌کنند و به این ترتیب خود را فدای سازه اصلی می‌نمایند. در این پدیده، ذوب، تبخیر یا تصعید سطح به همراه واکنشهای شیمیایی در لایه مرزی، در مجموع مسئله مشکلی را بوجود آورده است. استفاده از سیستمهای فداشونده با بکاربردن مواد آلی تجزیه شونده در عمق، که با تزریق مقدار زیادی از محصولات گازی ناشی از تجزیه به داخل لایه مرزی همراه است، آیروترموشیمی (واکنشهای شیمیایی در سیال متحرک) این سیستم را پیچیده‌تر می‌کند. بنابراین در مطالعه آیروترموشیمی جریان گذرنده از روی سطح، شناخت "محصولات فداشوندگی" ضروری می‌باشد. این شناخت بایستی شامل نرخ تولید و کیفیت محصولات و همچنین ترکیب ذرات تزریق شونده به داخل لایه مرزی باشد. در موارد بسیاری این محصولات قبل از تزریق به داخل لایه مرزی، از میان یک ماتریس متخلخل عبور می‌کنند. با این احساس، بررسی مکانیزم فداشوندگی به تنهایی، و رفتار فداشدن مواد مختلف، به همراه مطالعات لایه مرزی، یک بخش کامل از مبحث آیروترموشیمی را تشکیل می‌دهند. در ابتدا تصور بر این بود که مشخصه‌های پدیده فداشوندگی تنها تابع خصوصیات ماده می‌باشد. اما تحقیقات بعدی نشان داد که این مشخصه‌ها فراتر از آن، برآیندی از تأثیر متقابل خصوصیات ماده محافظ، آیروترموشیمی محیط و هندسه جسم حفاظت شونده هستند [۲].

از جمله عایقهای فداشونده‌ای که خصوصاً در نوک دماغه موشکها و فضاپیماها دارای کاربرد زیادی است، گرافیت را می‌توان نام برد. گرافیت به عنوان عایق فداشونده از دیرباز مورد توجه طراحان این گونه وسایل پرنده بوده است. این ماده هم‌اکنون نیز دارای کاربرد زیادی است. برای پیش بینی رفتار گرافیت در معرض جریانهای ماوراء صوت، نیاز به حل جریان لایه مرزی به همراه واکنشهای گونه‌های لایه مرزی با سطح است. در ادامه مقاله، ابتدا بطور خلاصه به معادلات حاکم بر جریانهای لایه مرزی واکنشی و شرایط مرزی آنها اشاره می‌شود. سپس مطابق روند معمول برای آنالیز لایه مرزی، امکان بدست آوردن حل تشابهی (Self-Similar) بررسی می‌شود. در انتها نیز برای گرافیت در نزدیکی ناحیه سکون اجسام پخ متقارن محوری، معادلات بقا بصورت تشابهی حل می‌شوند.

## ۱ - معادلات حاکم برای جریانهای لایه مرزی واکنشی دوبعدی

لایه مرزی روی یک صفحه تخت را در نظر بگیرید. معادلات حاکم بر جریان لایه مرزی دوبعدی در مختصات کارتیزین  $(x, y)$  بصورت زیر است (فرض جریان دائم):

### ۱- معادله پیوستگی

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

در اینجا  $\rho$ ،  $u$  و  $v$  به ترتیب چگالی، سرعت در جهت  $x$  و سرعت در جهت  $y$  می‌باشند.

## ۲- معادلات مومنتوم

در جهت  $x$ :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2)$$

که  $p$  و  $\mu$  به ترتیب نمایانگر فشار استاتیک و لزجت هستند.

در جهت  $y$ :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

۳- معادله بقای گونه  $i$  ام با فرض عدد اسمیت  $Sc \equiv \frac{\mu}{\rho D} \sim 1$  (D ضریب نفوذ گونه‌های شیمیایی)

$$\rho \left( u \frac{\partial Y_i}{\partial x} + v \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho D_i \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right) = \omega_i \quad (4)$$

۴- بقای انرژی (بر حسب انتالپی کل):  $(h_t = (h + U^2/2))$

$$\begin{aligned} & \rho \left( u \frac{\partial h_t}{\partial x} + v \frac{\partial h_t}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\mu}{Pr} \left[ \frac{\partial h_t}{\partial y} + (Pr - 1) \frac{\partial (u/2)^2}{\partial y} \right] \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^N (Le_i^{-1} - 1) h_i \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

که

$$Le_i = \frac{\lambda}{\rho D_i C_p} \quad , \quad (6)$$

$$Pr = \frac{C_p \mu}{\lambda} \quad (7)$$

در اینجا  $Y_i$ ،  $\omega_i$ ،  $h$ ،  $Pr$ ،  $Le$ ،  $C_p$  و  $\lambda$ ، به ترتیب معرف غلظت جرمی گونه  $i$  ام، نرخ جرمی تولید گونه  $i$  ام، انتالپی، عدد پرانتل، عدد لویس، ظرفیت گرمای ویژه و ضریب هدایت حرارتی می‌باشند.

برای آنالیز یک مسئله واکنش سطحی (یعنی عمده واکنشها در نزدیکی سطح اتفاق می‌افتد) با واکنش تثبیتی (Frozen) در فاز گازی (یعنی سرعت واکنشها در مقایسه با سرعت نفوذ گونه‌های شرکت‌کننده در واکنش ناچیز باشد و در نتیجه در عمل بتوان از تاثیر انجام واکنش بر خصوصیات لایه مرزی چشم پوشی کرد)، معمولاً از انتالپی کل تثبیتی (محسوس) (Sensible)  $h_{tse}$  که بصورت زیر تعریف می‌شود، استفاده می‌شود [۵،۳]:

$$h_{tse} \equiv \sum_{i=1}^N Y_i h_{i se} + \frac{u^2}{2} \quad (8)$$

$$h_{i se} \equiv \int_{T^0}^T C_{P,i} dT \quad (9)$$

یک معادله انرژی کل تثبیتی (Frozen-total-energy)، مشابه معادله (5) است، با این تفاوت که  $h_t$  و  $h_i$  به ترتیب با  $h_{t se}$  و  $h_{i se}$  جایگزین می‌شوند.

۵- معادله حالت برای سیستم‌های چند جزئی با فرض گاز ایده‌آل

$$P = \left( \sum_{i=1}^N \frac{Y_i}{W_i} \right) \rho R_u T \quad (10)$$

یکی از معادلات بقای گونه‌ها را می‌توان با معادله زیر جایگزین کرد:

$$\sum_{i=1}^N Y_i = 1 \quad (11)$$

این معادلات برای بدست آوردن  $5 + N$  مجهول  $\rho, u, v, h, T$  و  $Y_i$  ها استفاده می‌شود.

## ۲-۱- شرایط مرزی

شرایط مرزی برای معادلات پیوستگی و ممنتوم عبارتند از:  
در  $y=0$

$$v = v_w+ \quad \text{و} \quad u = 0 \quad (12)$$

و در  $(\delta)$  یا  $y = \infty$

$$u = U_e \quad (13)$$

زیرنویس‌های  $w$  و  $e$  به ترتیب به دیواره و لبه بالایی مرزی اشاره دارند.

شرط مرزی برای معادله انرژی (5):

فرض بر این است که انتالپی و دما در لبه لایه مرزی معلوم است.

بنابراین در  $(\delta)$  یا  $y = \infty$ :

$$h = h_e = \sum_{i=1}^N Y_{ie} \int_T^{T_e} C_{P,i} dT + \sum_{i=1}^N Y_{ie} \Delta h_{fi}^0 = \quad (14)$$

$$h_{se,e} + \sum_{i=1}^N Y_{ie} \Delta h_{fi}^0 \quad (15)$$

$$T = T_e \quad h_t = h_{te} = h_e + \frac{U_e^2}{2} \quad (16)$$

$$T = T_e \quad \text{در دیواره } y = 0^+$$

$$h = h_w = \sum_{i=1}^N Y_{i,w} + \int_{T^0}^{T_w} C_{p,i} dT + \sum_{i=1}^N Y_{i,w} + \Delta h_{f,i} + h_{se,w} + \sum_{i=1}^N Y_{i,w} + \Delta h_{f,i} \quad (17)$$

$$h_i = h_{i,w} = h_w \quad (18)$$

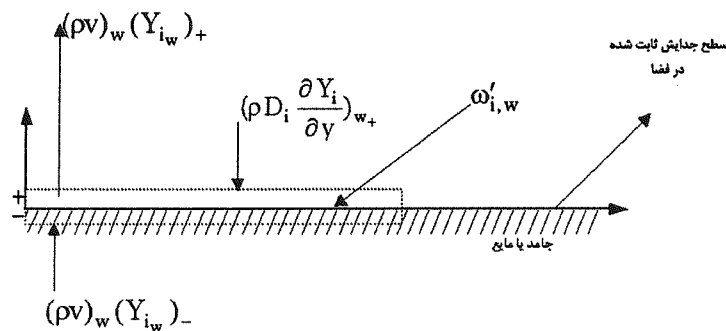
$$T = T_w \quad (19)$$

در معادله (۱۷)، کسر جرمی در دیواره  $Y_{i,w}$  به چشم می‌خورد که معمولاً در ابتدا مشخص نیست. بنابراین شرط مرزی برای معادله بقای انرژی، با حل معادله بقای گونه‌ها از این طریق کویل است. شرط مرزی برای معادله بقای گونه‌ها (۴):  
در  $y = \infty$ :

$$Y = Y_{i,e} \quad (20)$$

در دیواره (سطح جدایی گاز- جامد یا گاز- مایع)، گونه  $i$  از طریق نفوذ (diffusion) با سرعت  $(\rho D_i \partial Y_i / \partial y)_w$  از فاز گاز به سمت جامد می‌رود و در همین زمان، گونه  $i$  توسط حرکت توده‌ای سیال با سرعت  $(\rho v)_w (Y_{i,w})_+$  از سطح به سمت فاز گازی، و با سرعت  $(\rho v)_w (Y_{i,w})_-$  از داخل مایع یا جامد (که ممکن است متخلخل باشد) به سمت سطح می‌رود (شکل (۱)). نرخ خالص تولید گونه  $i$  در واحد سطح توسط واکنش در سطح با  $\omega'_{i,w}$  نشان داده می‌شود. بنابراین تعادل جرمی گونه  $i$  در سطح عبارتست از:

$$\omega'_{i,w} = -(\rho D_i \frac{\partial Y_i}{\partial y})_{w,+} + (\rho v)_w [(Y_{i,w})_+ - (Y_{i,w})_-] \quad (21)$$



شکل (۱) تعادل جرم گونه  $i$  در سطح جدایش.

### ۳- جریان لایه مرزی آرام با واکنش سطحی

#### ۳-۱- سینتیک شیمیایی

واکنشهای شیمیایی را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد: واکنشهای همگن و ناهمگن. اولی در فازهای کاملاً گازی شکل اتفاق می‌افتد، و دومی عموماً در یک سطح جدایش همانند سطح یک جامد یا یک مایع به‌وقوع می‌پیوندد. برای گرافیت با توجه به نوع آن وقتی که دمای سطح کمتر از تقریباً ۲۷۵۰ تا ۴۴۵۰ درجه کلوین است احتراق سطحی بجای احتراق فاز گازی غالب می‌شود. بنابراین فرض فاز گازی تثبیتی (Frozen) برای واکنشهای لایه مرزی بکار می‌رود [۳].

مطابق روند معمول برای آنالیز لایه مرزی، در ابتدا امکان بدست آوردن حل تشابهی (Self-Similar) بررسی می‌شود. برای این هدف، بایستی معادلات حاکم و شرایط مرزی را از مختصات  $(x, y)$  به مختصات  $(\xi, \eta)$  که طبق روابط زیر تعریف می‌شوند منتقل نمود [۳].

$$\xi \equiv \int_0^x \rho_e \mu_e U_e dx \quad (22)$$

$$\eta \equiv \frac{U_e}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy \quad (23)$$

معادله پیوستگی با بکاربردن تابع جریان  $\psi$  که به شکل زیر تعریف می‌شود ارضاء می‌شود.

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (24)$$

$$\rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (25)$$

با تعریف تابع جریان بی‌بعد  $F$  به شکل:

$$F(\xi, \eta) \equiv \frac{\psi}{\sqrt{2\xi}} \quad (26)$$

خواهیم داشت:

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = F_\eta = \frac{u}{U_e} \quad (27)$$

و

$$\rho v = -\left[ \left( \sqrt{2\xi} F_\xi + \frac{1}{\sqrt{2\xi}} F \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \sqrt{2\xi} F_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \quad (28)$$

همچنین تعریف می‌کنیم:

$$H \equiv \frac{h_t}{h_{te}}, \quad l \equiv \frac{\rho \mu}{\rho_e \mu_e}, \quad Y_i^* \equiv \frac{Y_i}{Y_{ie}} \quad (29)$$

حال، معادلات (۲)، (۴) و (۵) به ترتیب از مختصات  $(x, y)$  به مختصات  $(\xi, \eta)$  برای  $Pr$  و  $Sc$  ثابت به شکل زیر تبدیل می‌شوند:  
مومن:

$$\begin{aligned} & (l F_{\eta\eta})_\eta + F F_{\eta\eta} + 2 \left( \frac{\xi}{U_e} \frac{dU_e}{d\xi} \right) \left[ \frac{\rho_e}{\rho} - (F_\eta)^2 \right] \\ & = 2\xi (F_\eta F_{\eta\xi} - F_\xi F_{\eta\eta}) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\frac{1}{Sc} (1 Y_{i,\eta}^*)_{\eta} + F Y_{i,\eta}^* = 2 \xi (F_{\eta} Y_{i,\xi}^* - F_{\xi} Y_{i,\eta}^*) \quad (31)$$

انرژی کل:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Pr} (1 H_{\eta})_{\eta} + F H_{\eta} + \\ & \frac{1}{Pr} \left\{ \frac{U_e^2}{h_{te}} [(P_r - 1) 1 F_{\eta} F_{\eta\eta}]_{\eta} + \right. \\ & \left. \left[ \sum_{i=1}^N (Le_i^{-1} - 1) 1 \frac{Y_{ie}}{h_{te}} Y_{i,\eta}^* \right]_{\eta} \right\} \\ & = 2 \xi (F_{\eta} H_{\xi} + F_{\xi} H_{\eta}) \end{aligned} \quad (32)$$

برای لایه مرزی‌های تثبیتی (Frozen) که در اینجا مورد نظر است، بطور معمول معادله انرژی را براساس انتالی کل تثبیتی  $h_t$  می‌نویسند. با تعریف

$$H_{se} = \frac{h_{t,se}}{(h_{t,se})_e} \quad (33)$$

معادله انرژی کل تثبیتی دقیقاً همان شکل معادله (32) را خواهد داشت:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Pr} (1 H_{se,\eta}) + F H_{se,\eta} + \\ & \frac{1}{Pr} \left\{ \frac{U_e^2}{(h_{t,se})_e} [(P_r - 1) 1 F_{\eta} F_{\eta\eta}]_{\eta} + \right. \\ & \left. \left[ \sum_{i=1}^N (Le_i^{-1} - 1) 1 \frac{Y_{ie} h_{i,se}}{(h_{t,se})_e} Y_{i,\eta}^* \right]_{\eta} \right\} \\ & = 2 \xi (F_{\eta} H_{se,\xi} - F_{\xi} H_{se,\eta}) \end{aligned} \quad (34)$$

شرایط مرزی که با معادلات (12) تا (20) بیان شده‌اند، به شکل زیر تبدیل می‌شوند:

در  $\eta = 0$ :

$$F_{\eta} = 0 \quad (35)$$

$$F + 2 \xi F_{\xi} = - \frac{\sqrt{2 \xi}}{\rho_e \mu_e U_e} (\rho v)_w \quad (36)$$

$$H = H_w(\xi) =$$

$$\sum_{i=1}^N Y_{iw}^* \frac{Y_{ie} \int_{T^o}^{T_w} C_{P,i} dT}{h_{te}} + \sum_{i=1}^N Y_{iw}^* \frac{Y_{ie} \Delta h_{fi}^o}{h_{te}} \quad (37)$$

یا

$$H_{se} = H_{sew} = \frac{1}{(h_{tse})_e} \sum_{i=1}^N (Y_{iw}^* Y_{ie} \int_{T^o}^{T_w} C_{P_i} dT) \quad (38)$$

$$Y_{i,\eta}^* + \left( \frac{Sc}{l_w} \right) (F + 2\xi F_\xi) [(Y_{iw}^*)_+ - (Y_{iw}^*)_-] =$$

$$Da_i(\xi)^* \left[ \left( \frac{Y_i^*}{W_i} \right)^{n_r} - \frac{(\rho_w Y_i^*/W_i)_E^{n_r}}{(\rho_w Y_i^*/W_i)_E^{n_b}} \rho_w^{n_b - n_r} \left( \frac{Y_i^*}{W_i} \right)^{n_b} \right] \quad (39)$$

که

$$Da_i(\xi) = \frac{Sc \sqrt{2\xi} (Y_{ie})^{n_r - 1} (k_{wf} \rho_w^{n_r}) W_i}{l_w \rho_e \mu_e U_e} \quad (40 - الف)$$

$$Da_i(\xi) =$$

$$\frac{(\rho_{wo} Y_{ie})^{n_r} W_i k_{wf} \left( \frac{\rho_w}{\rho_{wo}} \right)^{n_r} \left[ \sqrt{\int_0^{x^*} \frac{\rho_e \mu_e U_e}{(\rho_e \mu_e)_o U_\infty} dx^*} \right]}{\frac{l_w Y_{ie}}{Sc} \sqrt{\frac{(\rho_e \mu_e)_o U_\infty}{2L}} \left[ \frac{\rho_e \mu_e U_e}{(\rho_e \mu_e)_o U_\infty} \right]} \quad (40 - ب)$$

که  $x^* = x/L$  طول مشخصه بدنه است، و بنابراین:

$$Da_i(\xi) = \frac{(\rho_{wo} Y_{ie})^{n_r} k_{wf} W_i (\rho_w/\rho_{wo})^{n_r}}{(l_w/Sc) Y_{ie} G(x^*) \sqrt{(\rho_e \mu_e)_o U_\infty / (2L)}} \quad (40 - ج)$$

که

$$G(x^*) \equiv \frac{\frac{\rho_e \mu_e U_e}{(\rho_e \mu_e)_o U_\infty}}{\sqrt{\int_0^{x^*} \frac{\rho_e \mu_e U_e}{(\rho_e \mu_e)_o U_\infty} dx^*}} \quad (41)$$

کمیت  $Da_i$  با نام عدد دامکالر (Damkohler) شناخته می‌شود که معنای فیزیکی آن در آینده مورد بررسی قرار خواهد گرفت.  
در  $\eta \rightarrow \infty$ :

$$F_\eta = 1 \quad (42)$$

$$H = 1 \quad (43)$$

$$H_{se} = 1 \quad (44)$$

$$Y_i^* = 1 \quad (45)$$

### ۳-۳- شرایط مستقل شدن معادلات حاکم و حل‌های تشابهی

دید می‌شود که معادله مومنتوم و معادله انرژی کل تثبیتی، تنها توسط  $1$ ،  $\rho_e/\rho$  و جمله چهارم معادله (۳۲) با معادله بقای گونه‌ها کوپل شده‌اند. برای اغلب اهداف مهندسی، از وابستگی  $1$  و  $\rho_e/\rho$  به  $Y_i$  در مقایسه با وابستگی‌شان به دما



می‌توان چشم‌پوشی کرد. گذشته از این، اغلب می‌توان  $l$  را ثابت فرض کرد، و برای بسیاری از موارد مورد توجه عملی، کل جمله سوم معادله مومنوم قابل صرفنظر کردن است. جمله چهارم معادله (۳۴) زمانی که  $Le_i$  برابر یک است و یا اینکه همه  $C_{p,i}$  ها با هم برابرند، مساوی صفر می‌شود. بازم برای بسیاری از مسائل مهندسی،  $Le_i$  خیلی به یک نزدیک است و  $C_{p,i}$  ها اختلاف زیادی باهم ندارند. بنابراین از این جمله می‌توان صرفنظر کرد [۵،۳]. شرط مرزی (۳۸) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$H_{sew} = \frac{C_{p,w} T_w}{(h_{tse})_e} \quad (46)$$

که  $C_{p,w}$  گرمای ویژه مخلوط گاز در دیواره است و فرض بر معلوم بودن آن است. حال دیده می‌شود که معادلات مومنوم و انرژی کل تثبیتی، به همراه شرایط مرزی مربوطه، مشابه لایه مرزی‌های بدون واکنش شیمیایی است و برای کلیه اهداف عملی از معادله بقای گونه‌ها مستقل هستند. تحت این شرایط، بدون نیاز به دانش کامل نسبت به توزیع گونه‌ها، می‌توان معادلات مذکور را مستقل از بقای گونه‌ها حل کرد. علاوه بر آن، برای نمونه‌های خاصی از جریان‌های لایه مرزی، معادلات دیفرانسیل جزئی مومنوم و انرژی کل تثبیتی را با  $\eta$  بعنوان تنها متغیر مستقل، می‌توان به معادلات دیفرانسیل معمولی تقلیل داد. اینگونه جریان‌های لایه مرزی، جریان‌های تشابهی (Self-Similar) نامیده می‌شوند. معادله مومنوم (۳۰) برای این جریان‌ها می‌تواند به معادله بلازیوس که در زیر آمده است خلاصه شود:

$$(LF'')' + FF'' = 0 \quad (47)$$

که (') علامت دیفرانسیل نسبت به  $\eta$  است. معادله انرژی تشابهی با استفاده از معادله (۳۴) به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\frac{1}{Pr} (1H'_{se})' + FH'_{se} + \frac{1}{Pr} \left[ \frac{U_e^2}{(h_{tse})_e} (Pr-1) 1F'F'' \right] = 0 \quad (48)$$

برای اینکه خود متشابه بودن جریان فوق توسط انتقال جرم سطح  $(\rho v)_w$  از بین نرود بایستی انتقال جرم به نحوی در طول سطح توزیع شود که سمت راست معادله (۳۶) ثابت بماند. در این حالت، معادله (۳۶) تبدیل خواهد شد به [۵،۳]:

$$F(0) = \frac{\sqrt{2\xi}}{\rho_e \mu_e U_e} (\rho v)_w = \text{const} \quad (49)$$

### ۳-۲- عدد دامکالر برای واکنش‌های سطحی (Damkohler Number)

حال به بررسی معنی فیزیکی تابع  $Da_i$  ( $\xi$ ) که در معادله (۴۰) تعریف شده است می‌پردازیم. زیرا این تابع، در آنالیزهای بعدی لایه‌های مرزی با واکنش سطحی، نقش مهمی را ایفا می‌کند. فرض کنید برای عنصر  $i$  در سرتاسر لایه مرزی در طول یک جسم، پتانسیل دیفیوژن همسان  $(Y_{ie} - Y_{iw+})$  استفاده شده است. در یک چنین حالتی سمت راست معادله (۳۱) حذف می‌شود و  $Y_i^*$  را می‌توان بصورت تابعی فقط از  $\eta$  بدست آورد. نرخ دیفیوژن گونه  $i$  در سطح را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \left( \rho D_i \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right)_{w+} &= (\rho D_i Y_{ie} Y_{i,\eta}^*)_{w+} \frac{U_e \rho_{w+}}{\sqrt{2\xi}} \\ &= Y_{iw+}^* \frac{1_w}{Sc} Y_{ie} \sqrt{\frac{(\rho_e \mu_e)_e U_\infty}{2L}} G(x^*) \end{aligned} \quad (50)$$

برای یک  $Y_{iw} - Y_{ie}$  و  $l_w$  معلوم، کمیت  $Y_{iw}^*$  ثابت است. بنابراین مابقی سمت راست معادله (۵۰) بیانگر نرخ دیفیوژن مشخصه (characteristic diffusion rate) گونه  $i$  برای مساحت سطح واحد برای اختلاف غلظت واحد در سراسر لایه مرزی است. حال با مراجعه به معادله (۴۰-ج) دیده می‌شود که مخرج این معادله که تعریف  $Da_i(\xi)$  است، دقیقاً نرخ دیفیوژن مشخصه است. از سوی دیگر صورت معادله (۳-۶۸-ج)،  $(\rho_w Y_{ie})^{n_r}$ ،  $W_i K_{wf}$ ، بیانگر نرخ واکنش سطحی مشخصه (characteristic surface reaction rate) برای مساحت سطح واحد است. بنابراین تابع  $Da_i(\xi)$  بیانگر نسبت نرخ واکنش سطحی مشخصه به نرخ دیفیوژن مشخصه برای گونه  $i$  است.

همچنین می‌توان  $Da_i(\xi)$  را بصورت نسبت زمان دیفیوژن مشخصه ( $\tau_{diff}$ ) به زمان واکنش سطحی مشخصه ( $\tau_{ch}$ ) در نظر گرفت. بنابراین می‌توان نوشت:

$$Da_i(\xi) = \frac{\text{نرخ واکنش سطحی مشخصه}}{\text{نرخ دیفیوژن مشخصه}} \Bigg|_i = \left( \frac{\tau_{diff}}{\tau_{ch}} \right)_i \quad (51)$$

این نسبت زمان مشخصه، عدد دامکالر سطح برای گونه  $i$  نامیده می‌شود. اکنون به راحتی می‌توان دو حالت حدی "ثبیتی" (Frozen) و "تعادلی" (equilibrium) را تعریف کرد. در ابتدا حالت  $Da_i \rightarrow 0$  را در نظر بگیرید. دیده می‌شود که سمت راست معادله (۵۱) صفر می‌شود، و بنابراین اثر واکنش سطحی روی لایه مرزی گونه‌ها عملاً ناچیز است. این حالت با عنوان واکنش سطحی ثبیتی شناخته می‌شود. باید این نکته را به خاطر داشت که یک واکنش سطحی ثبیتی الزاماً به معنی  $k_{wf} \rightarrow 0$  نیست. این حالت تنها به این معنی است که نرخ واکنش خیلی کوچکتر از نرخ دیفیوژن است، حال آنکه مقدار مطلق نرخ واکنش می‌تواند خیلی بزرگ باشد. اکنون حالت حدی دیگر یعنی  $Da_i \rightarrow \infty$  را در نظر بگیرید. سمت چپ معادله (۳۹) مقدار محدودی است. بنابراین، کمیت داخل براکت در سمت راست این معادله در حالت  $Da_i \rightarrow \infty$  باید به سمت صفر میل کند. این بدان معنی است که  $(Y_i^*)_w \rightarrow (Y_{iE}^*)_w$ . این شرایط با عنوان واکنش سطحی تعادلی شناخته می‌شود. باز هم باید توجه داشت که شرط  $Da_i \rightarrow \infty$  به معنی  $k_{wf} \rightarrow \infty$  نیست، بلکه تنها به این معنی است که نرخ واکنش خیلی بزرگتر از نرخ دیفیوژن است. برای این حالت، شرط مرزی دیواره (۳۹) را می‌توان با مقدار معلوم  $(Y_{iE}^*)_w = (Y_i^*)_w$  جایگزین کرد. برای حالتی کلی با  $Da_i$  محدود، شرط مرزی کامل (۳۹) بایستی استفاده شود. زمانی که  $Da_i$  محدود است،  $(Y_i^*)_w \neq (Y_{iE}^*)_w$ ، و لایه گاز روی دیواره در حالت شیمیایی غیرتعادلی (nonequilibrium) است. این حالت با عنوان واکنش سطحی غیرتعادلی شناخته می‌شود.

### ۳-۵- حل تشابهی معادله بقای گونه‌ها

اکنون به معادله بقای گونه‌ها (۳۱) با شرایط مرزی (۳۹) و (۴۵) باز می‌گردیم. با تقریبی هم‌مرتبه با تقریبهایی که تاکنون مورد استفاده قرار گرفت، سمت راست معادله (۳۹) را می‌توان بصورت زیر نوشت [۵]:

$$Da_i(\xi) \left[ \left( \frac{Y_i^*}{W_i} \right)^{n_r} - \left( \frac{Y_i^*/W_i}{Y_i^*/W_i} \right)_E^{n_r} \left( \frac{Y_i^*}{W_i} \right)^{n_b} \right]$$

حال برای جریانهایی که برای معادلات مومنتم و انرژی کل ثبیتی دارای حل تشابهی‌اند، تابع جریان  $F$  تنها تابعی از  $\eta$  است، و همانطور که قبلاً ذکر شد، معادله (۳۱) و شرط مرزی دیواره (۳۹) به ترتیب تبدیل خواهند شد به:

$$\frac{1}{Sc} (FY_{i,\eta})_\eta + FY_{i,\eta} = 2\xi (F_\eta Y_{i,\xi}) \quad (52)$$

$$\left(Y_{i,\eta}\right)_w + \frac{Sc}{1_w} F_w \left[ \left(Y_{i,w}\right)_+ - \left(Y_{i,w}\right)_- \right] = Da_i(\xi) \left[ \left(\frac{Y_i}{w_i}\right)^{n_r} - \left(\frac{Y_i^*/W_i}{E}\right)^{p_r} \right] \quad (53)$$

حال مسئله مقدار مرزی، شامل معادله (52) و دو شرط مرزی (45) و (53) را در نظر بگیرید. با بررسی معادله (52) و شرایط مرزی می‌توان دریافت که در صورتی که  $Da_i(\xi)$  و  $\left(Y_i^*/W_i\right)_E^{p_r} / \left(Y_i^*/W_i\right)_E^{p_b}$  به ترتیب مقادیر ثابتی باشند،  $Y_i^*$  تابعی از  $\eta$  خواهد شد. نسبت تعادل  $\left(Y_i^*/W_i\right)_E^{p_r} / \left(Y_i^*/W_i\right)_E^{p_b}$  در صورتی ثابت است که فشار و دمای دیواره در طول سطح ثابت باشند. حتی زمانی که فشار و  $T_w$  تغییر می‌کنند، این جمله به علت آنکه برای اکثر مسائل مهندسی مرتبه‌اش به اندازه کافی کوچک است، معمولاً مشکلی ایجاد نمی‌کند و می‌توان جمله آخر معادله (53) را حذف کرد. حال تابع  $Da_i(\xi)$  را در نظر بگیرید. بررسی معادله‌های (40) نشان می‌دهد که  $Da_i(\xi)$  تنها برای منطقه سکون اجسام پخ که  $x \sim U_e$  و  $P$  و  $\rho_w$  ثابت هستند برای یک  $k_{wf}$  معلوم، عددی محدود و ثابت است. بنابراین یک حل دقیق تشابهی برای این مسئله مقدار مرزی، فقط برای منطقه سکون آن هم به شرط محدود بودن  $Da_i(\xi)$  وجود دارد [5].

تعدادی حالت خاص وجود دارد که بطور تقریبی معیار تشابهی را ارضاء می‌کنند. برای این حالات، حل "تشابهی موضعی" (Locally Similar Solution)، جوابهای به اندازه کافی دقیق می‌دهد. تغییر در راستای جریان عدد دامکار که با فرمول (40) - ج معرفی شده است، ناشی از کمیت  $G(x^*) / G(x^*)^{n_r}$  است. حال فرض کنید که جریان غیر لزج حول یک جسم خاص به نحوی باشد که کمیت مذکور نسبت به  $x$  خیلی آرام تغییر کند. در این حالت یک حل تشابهی موضعی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. دقت این حل، به درجه تقریب ثابت فرض کردن کمیت  $G(x^*) / G(x^*)^{n_r}$  بستگی دارد. بعنوان مثال، جریان ماوراءصوت حول مخروط نوک کروی، زمانی که  $n_r = 1$  است، معیار تقریب فوق را ارضاء می‌کند [5].

## ۸-۱. احتراق گرافیت در نزدیکی ناحیه سکون

حال می‌خواهیم نرخ احتراق سطحی گرافیت در جریان‌های لایه مرزی ناحیه سکون را بررسی کنیم. واکنش سطحی این مسئله را می‌توان با رابطه زیر بیان کرد:



برای یک نرخ مشخص ورود اکسیژن، مقدار نسبت محصولات احتراق در سطح،  $v''_{CO_2} / v''_{CO}$ ، در ابتدا مشخص نیست. نرخ جرمی احتراق کربن را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\omega'_{C,w} = -k_o \exp\left[-\frac{E_{aw}}{R_u T_w}\right] \left[P \left(\frac{W}{W_{O_2}}\right)\right]^n (Y_{O_2})_e^n (Y_{O_2})_w^n \quad (55)$$

که فاکتور فرکانس ( $k_o$  frequency factor) ممکن است ثابت بوده یا اینکه تابعی از دما باشد و  $E_{aw}$  انرژی اکتیواسیون برای واکنش سطح است. برای احتراق کربن "اسکالا" [6] نشان داد که اغلب نتایج گزارش شده سینتیک، با دو دسته ثابت‌های سینتیک زیر پوشش داده می‌شوند:

واکنش سریع:

$$k_o = 3.29 \times 10^9 \text{ kg/m}^2 \text{ atm}^n \text{ sec} \\ E_{aw} = 184220 \text{ J/mole} \quad (56)$$

واکنش کند:

$$k_o = 2.18 \times 10^5 \text{ kg/m}^2 \text{ atm}^n \text{ sec}$$

(۵۷)

$$E_{aw} = 177100 \text{ J/mole}$$

نرخ جرمی مصرف اکسیژن،  $\omega'_{O_2, w}$ ، از طریق معادله (۵۴) به  $\omega'_{C, w}$  مرتبط می‌شود:

$$\omega'_{O_2, w} = \frac{v'_{O_2} W_{O_2}}{v'_C W_C} \omega'_{C, w} \quad (58)$$

در ادامه، نسبت  $v'_{CO_2}/v'_{CO}$  محاسبه می‌شود. سپس نرخ احتراق کربن،  $\omega'_{C, w}$ ، از معادله (۵۸) محاسبه می‌گردد. برای سادگی، آنالیز به لایه مرزی که در آن  $\rho_e/\rho_w \ll 1$  است، محدود می‌شود. در صورتی که علاوه بر شرط  $\rho_e/\rho_w \ll 1$ ، شرط  $U_e^2/h_{te} \ll 1$  نیز برقرار باشد، می‌توان  $I$  را ثابت و برابر مقدار زیر فرض کرد [۵]:

$$I = \left[ \left( \frac{\rho_w \mu_w}{\rho_e \mu_e} \right)_0 \right]^{0.2} \quad (59)$$

برای  $I$  ثابت، متغیر تشابهی و تابع جریان را می‌توان دوباره تعریف کرد:

$$\zeta \equiv \frac{\eta}{\sqrt{I}} = \frac{U_e}{\sqrt{2\xi I}} \int_0^y \rho dy \quad (60)$$

و

$$f(\xi, \zeta) = \frac{F(\xi, \eta)}{\sqrt{I}} = \frac{\psi}{\sqrt{2\xi I}} \quad (61)$$

معادله مومنوم، معادله انرژی کل تثبیتی، و معادله بقای گونه‌ها به ترتیب تبدیل خواهند شد به:

$$f''' + f'' = 0 \quad (62)$$

$$\frac{1}{Pr} H_{se}'' + f H_{se}' = 0 \quad (63)$$

$$\frac{1}{Sc} Y_{O_2}^{*''} + f Y_{O_2}^{*'} = 0 \quad (64)$$

که علامت پریم نشان‌دهنده دیفرانسیل معمولی نسبت به  $\xi$  است. در نزدیکی ناحیه سکون، که کلیه خصوصیات در طول لبه لایه مرزی ثابت می‌ماند، سرعت را با رابطه زیر می‌توان تقریب زد [۵، ۴، ۳]:

$$U_e = \beta x \quad (65)$$

شرایط مرزی تبدیل می‌شوند به:

$$\zeta = 0 :$$

$$f = 0 \quad (66)$$

$$f = f_w = -\frac{(\rho v)_w}{\sqrt{(\rho_e \mu_e)_o} \beta L} \quad (67)$$

$$H_{se} = H_{sew} = (C_{p,w} T_w) / (h_{tse})_e \quad (68)$$

$$Y_{O_2,w}^* + Sc f_w Y_{O_2,w}^* = D_a \left[ \frac{v'_{O_2} w_{O_2}}{v'_C w_C} \right] (Y_{O_2,w}^*)^n \quad (69)$$

در  $\zeta \rightarrow \infty$ :

$$f' = 1 \quad (70)$$

$$H_{se} = 1 \quad (71)$$

$$Y_{O_2}^* = 1 \quad (72)$$

در بالا،  $Da$  عدد دامکالر (Damkohler) سطح، برای 1 ثابت، به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$Da \equiv \frac{K_o \exp[-E_{aw}/R_u T_w] [p (W/W_{O_2})_w]^n (Y_{O_2,e}^*)^{n-1}}{\sqrt{(\rho_e \mu_e)_o} \beta l} \quad (73)$$

این کمیت نمایانگر سرعت انجام واکنش به سرعت نفوذ گونه‌های شیمیایی است [۳،۵]. با جایگذاری  $f$  از معادله (۶۲) در معادله (۶۴) و انتگرال‌گیری، خواهیم داشت:

$$Y_{O_2}^*(\zeta) - Y_{O_2,w}^* = Y_{O_2,w}^* \int_0^\zeta \left[ \frac{f''(\zeta)}{f''(0)} \right]^{Sc} d\zeta \quad (74)$$

با بکار بردن شرط مرزی (۷۲) و برای  $f_w$  نسبتاً کوچک (در اینجا  $f_w \leq 0.2$ )، با انتگرال‌گیری تقریبی معادله (۷۴) تبدیل می‌شود به:

$$1 - Y_{O_2,w}^* = Y_{O_2,w}^* \left( \frac{1}{A_1 + A_2 f_w} \right) \quad (75)$$

که ثابتهای  $A_1$  و  $A_2$  بصورت زیر محاسبه شده‌اند [۴]:

$$\begin{array}{ll} 1) Sc=0.720: & 2) Sc = 0.514: \\ A_1=0.417 & A_1=0.372 \\ A_2=0.438 & A_2=0.266 \end{array}$$

زمانی که گونه‌های تزریق شده به داخل لایه مرزی، از نظر وزن ملکولی خیلی با گونه‌های هوا متفاوت باشند، این نتایج قابل استفاده نخواهند بود. اما برای گرافیت وزن ملکولی گونه‌های  $CO$  و  $CO_2$  که محصولات احتراقند، تفاوت زیادی با هوا

با ترکیب معادله (۶۷) با (۵۵)، خواهیم داشت:

$$f_w = -D_a (Y_{O_2 e}) (Y_{O_2}^*)^n \quad (۷۶)$$

حال سه معادله جبری [معادلات (۷۵)، (۶۹) و (۷۶)] با چهار مجهول  $[f_w, Y_{O_2 w}^*, Y_{O_2 w}]$  داریم. با حذف  $f_w$  و  $Y_{O_2 w}^*$  از این سه معادله خواهیم داشت:

$$1 - Y_{O_2 w}^* = \frac{Sc [(v'_{O_2} W_{O_2} / v'_C W_C) + Y_{O_2 e} Y_{O_2 w}^*]}{[A_1 / Da (Y_{O_2 w}^*)^n] - A_2 Y_{O_2 e}} \quad (۷۷)$$

این معادله هنوز دو مجهول دارد. حال فرض می‌کنیم سطح کربن یک کاتالیزور ایده‌آل برای انجام تعادل شیمیایی زیر برای گاز در سطح است:



ثابت تعادل  $k_p$  برای واکنش فوق بصورت زیر بدست می‌آید [۴]:

$$k_p = \frac{(P_{CO})^2 (P_{O_2})}{(P_{CO_2})^2} = \exp\left(20.926 - \frac{68.224 \times 10^3}{T(k)}\right) \quad (۷۹)$$

نسبت فشارهای جزئی CO به  $CO_2$  از رابطه تعادل فوق بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{P_{CO}}{P_{CO_2}} = \sqrt{\frac{k_p}{P_{O_2}}} = \sqrt{\frac{k_p}{Y_{O_2 e} P (W/W_{O_2})_w}} (Y_{O_2 w}^*)^{-1/2} \quad (۸۰)$$

حال با استفاده از معادلات (۵۴)، (۷۹) و (۸۰)، نسبت  $v'_{O_2} W_{O_2} / v'_C W_C$  برابر خواهد شد با:

$$\begin{aligned} \frac{v'_{O_2} W_{O_2}}{v'_C W_C} &= \frac{v'_{CO_2} + \frac{1}{2} v'_{CO} W_{O_2}}{v'_{CO_2} + v'_{CO} W_C} \\ &= \frac{2 + P_{CO}/P_{CO_2} W_{O_2}}{2 + 2P_{CO}/P_{CO_2} W_C} \\ &= \frac{2\sqrt{Y_{O_2 w}^*} + \sqrt{\frac{k_p}{Y_{O_2 e} P (W/W_{O_2})_w}} W_{O_2}}{2\sqrt{Y_{O_2 w}^*} + 2\sqrt{\frac{k_p}{Y_{O_2 e} P (W/W_{O_2})_w}} W_C} \end{aligned} \quad (۸۱)$$

از معادله فوق می‌توان دید که با  $Da \rightarrow \infty$  و در نتیجه آن  $Y_{O_2 w}^* \rightarrow 0$

$$\lim_{Y_{O_2, w}^* \rightarrow 0} \left( \frac{v'_{O_2}}{v'_C} \right) = \frac{1}{2} \quad (82)$$

در این حالت حدی، معادله (۵۴) تبدیل خواهد شد به:



که نشان می‌دهد CO تنها محصول احتراق است. حال معادله (۷۷) را می‌توان برای بدست آوردن  $Y_{O_2, w}^*$  به کمک معادله (۸۱) حل کرد. سپس نرخ سوزش کربن از معادله (۵۵) بدست می‌آید.

در رابطه با حل معادله (۷۷) ذکر این نکته لازم است که با حل این معادله، برای کمیت  $Y_{O_2, w}^*$  دو جواب بدست می‌آید و جوابی که بین صفر و یک بوده و مقدار آن کوچکتر است صحیح می‌باشد. ریشه این معادله در مواردی بسیار به عدد یک نزدیک است. بنابراین روشی که در اینجا استفاده شده به این شکل است که فاصله بین صفر و یک به ده قسمت تقسیم شده و به ترتیب در این قسمت‌ها، از روش نصف کردن فاصله‌ها به جستجوی جواب پرداخته شده است. با این روش در مدت زمان کمی به جواب می‌رسیم.

ماکزیمم نرخ سوزش کنترل شده توسط دیفیوژن  $(\omega'_{C, w})_{dc}$ ، که در آن  $Y_{O_2, w}^* \rightarrow 0$ ، را می‌توان مستقیماً از معادله (۷۵) به کمک معادله (۸۲) بصورت زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned} (\omega'_{C, w})_{dc} &= 2 \frac{W_C}{W_{O_2}} \rho_w D_w \left( \frac{\partial Y_{O_2}}{\partial y} \right)_w \\ &= \sqrt{(\rho_e \mu_e)_o} \beta l \frac{A_1 Y_{O_2, e}}{Sc(\frac{1}{2} W_{O_2} / W_C) + A_2 Y_{O_2, e}} \end{aligned} \quad (84)$$

از معادله فوق نرخ احتراق کنترل شده توسط نفوذ با  $Sc=0.72$  و  $Sc=0.514$ ، به نحوی بدست می‌آید که نتایج دقیق را پوشش می‌دهند. مقدار کمیت فوق برای  $Sc=0.514$ ، تقریباً ۱۳٪ بیشتر، و برای  $Sc=0.72$ ، در حدود ۱۲٪ کمتر از مقادیر دقیقتر بدست می‌آید. بنابراین می‌توان گفت اینگونه تحلیلها در مورد واکنشهای هوا در دماهای بالا، در حدود ۱۵٪ خطا دارند [۴].

عدد دامکالر  $Da$  برای احتراق سطحی گرافیت از طریق تابع نمایی شدیداً وابسته به دمای سطح است. نمونه‌ای از نرخ سوزش که از روند حل ارائه شده در اینجا بدست آمده است، در شکل (۲) نشان داده شده است. این نمودار با فرض  $Sc=0.514$  که مطمئن‌تر است بدست آمده است. مرتبه واکنش برابر فرض شده است. اما این عدد برای گرافیت‌های مختلف متفاوت است. سایر شرایط محیطی، در ذیل این نمودار آورده شده‌اند. نرخ‌های سوزش توسط نرخ کنترل شده توسط دیفیوژن (معادله ۸۴) بی‌بعد شده‌اند  $(\omega'_{C, w} / \omega'_{C, w, dc})$  و بصورت تابعی از دمای سطح رسم شده‌اند. نتایج تئوری بیانگر وقوع پدیده جالب زیر است: با افزایش اولیه دمای سطح و در نتیجه افزایش عدد دامکالر، واکنش سطحی وارد رژیم غیرتعادلی می‌شود. این رژیم سریعاً طی شده و با افزایش تقریباً  $200^\circ K$ ، به اولین پله با  $\frac{1}{2} = (\omega'_{C, w}) / (\omega'_{C, w})_{dc}$  می‌رسیم. در این پله،  $Y_{O_2, w}^*$  در مقایسه با عدد یک، کوچک است، و عملاً احتراق، کنترل شده توسط دیفیوژن اکسیژن بوده و  $CO_2$  محصول اصلی احتراق است. با افزایش مستمر دمای سطح، به نقطه‌ای می‌رسیم که  $CO$  محصول عمده احتراق خواهد بود. نرخ سوزش کربن با نسبت  $CO$  به  $CO_2$  افزایش می‌یابد تا جایی که به ماکزیمم خودش می‌رسد، و در این حالت  $CO$  تنها محصول احتراق خواهد بود.

بطور خلاصه، به نظر می‌رسد با تغییر  $Da$ ، دو مرحله گذر در سوزش کربن وجود خواهد داشت. اولی، تغییر شرایط شیمیایی سطح از حالت تثبیتی به رژیم تعادلی است، و دیگری تغییر محصول غالب احتراق تعادلی از  $CO_2$  به  $CO$  است. این دو مرحله گذر بسته به مقادیر پارامترهایی مانند  $E_{aw}$  و  $k_0$ ، می‌توانند در دو دمای  $T_w$  مختلف و یا با هم اتفاق بیفتند.

برای تأیید مباحث فوق، دو سری داده تجربی در شکل (۲) آورده شده است. همخوانی بین تئوری و داده‌های تجربی در سرتاسر بازه نشان داده شده در این شکل وجود دارد. و این خود مؤید این مباحث است. داده‌های تجربی گزارش شده در

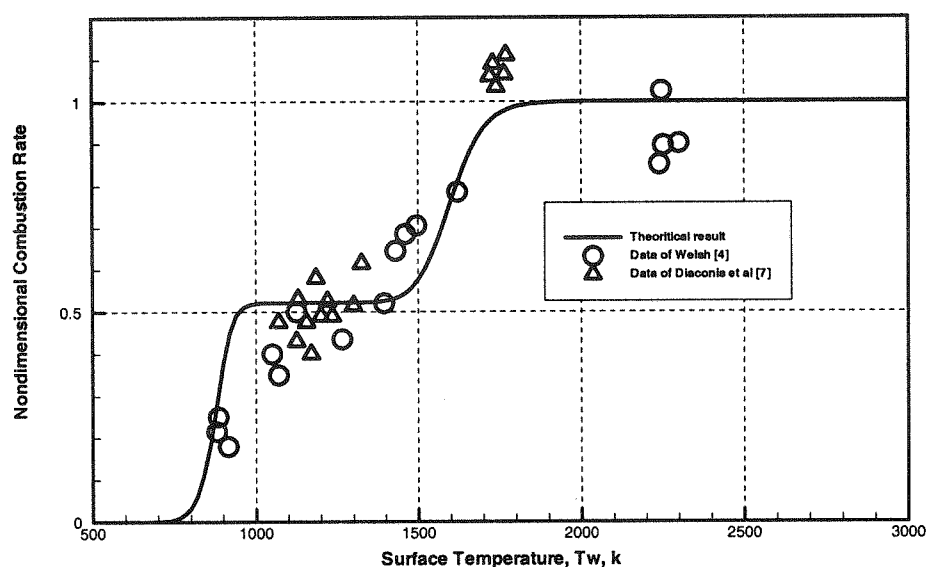
مرجع ۷، مربوط به نرخ سوزش گرافیت نوع ATJ می‌باشد که در معرض جریان داغ سوپرسونیک یک دستگاه قوس پلاسمای الکتریکی (Electric plasma-arc) قرار گرفته است. علاوه بر این، نتیجه یک تست که در مرجع [۴] ارائه شده، در این شکل آورده شده است. شرایط این دو تست بسیار به هم نزدیک‌اند و در زیر نمودار آورده شده است. از بررسی‌های انجام شده در این تحقیق، مشاهده شد که با فرض واکنش با مرتبه  $1/2$ ، نمودار بدست آمده برای این نوع گرافیت به داده‌های تجربی نزدیکتر است. با این حال، اکثر گرافیتها مشخصات واکنشهای مرتبه اول را دارند.

این نکته را باید در نظر داشت که در آنالیز ارائه شده، فرض شده که اکسیژن در سطح به صورت ملکول است و  $1$  نیز ثابت است. هردوی این فرضها تا زمانی که دما زیر  $2000 \text{ k}$  بوده و کربن نقش یک کاتالیزور قوی را برای ترکیب دوباره اتمها بازی می‌کند، قابل قبول هستند. همچنین مقدار ثابت  $1$  که با معادله (۵۹) ارائه شده است، در واقع برای مسئله سوزش کربن رضایت بخش است.

## ۵- جمع بندی و نتیجه گیری

پس از استخراج معادلات حاکم بر لایه مرزی واکنش دهنده، شرایط حل تشابهی این معادلات مورد بررسی قرار گرفت. دیده شد که تنها در منطقه سکون امکان حل تشابهی وجود دارد. به همین دلیل، از این روش معادلات مذکور برای محاسبه نرخ پسرقت گرافیت در نزدیکی نقطه سکون حل شدند. از مقایسه نتیجه بدست آمده با داده‌های تجربی، از صحت آن اطمینان حاصل شد.

نتایج بدست آمده با توجه به فرضیات اعمال شده، تا دمای پایین تر از  $2000 \text{ k}$  قابل اعتماد است. بنابر این از این تحلیل برای محاسبه نرخ پسرقت گرافیت در اطراف نقطه سکون جریان هوا روی بسیاری از موشکهای میانبرد میتوان استفاده نمود. در این محدوده دمایی، سینتیک واکنش به نوع گرافیت بستگی دارد. بنابراین برای اینکه بتوان از روش ارائه شده در اینجا استفاده نمود، در ابتدا بایستی ضرایب موجود در معادله سینتیک شیمیایی (معادله (۵۶)) را برای گرافیت مورد مطالعه با انجام آزمایش بدست آورد.



شکل (۲) نرخ سوزش گرافیت ATJ به صورت تابعی از دمای سطح ( $\sqrt{2\beta(\rho_e \mu_e)_0} l = 0.523 \text{ kg/m}^2 \text{ s}$ ,  $P = 1.0 \text{ atm}$ )

## فهرست علائم

علامت	تعریف	بعد	$E_{aw}$	انرژی اکتیواسیون برای واکنش سطح	$Q/N$
D	ضریب دیفیوژن	$L^2/t$	F	تابع جریان بی بعد، معادله ۲۶	.....
$Da_i$	عدد دامکالر (Damkohler) برای گونه $i$ ام	.....	f	تابع جریان بی بعد، معادله ۶۱	.....



$Q/LT$	ضریب هدایت حرارتی	$\lambda$	$Q$	انتالی	$h$
$M^2/L^2t$	مختصه ای که طبق رابطه (۲۲) تعریف می شود	$\xi$	$Q$	انتالی دیواره آدیاباتیک	$h_{aw}$
.....	مختصه ای که طبق رابطه (۲۳) تعریف می شود	$\eta$	$Q$	انتالی گاز لبه لایه مرزی ، محاسبه شده در شرایط سطح	$h_w$
$M/Lt$	تابع جریان	$\Psi$	$Q/N$	گرمای تشکیل گونه $i$ ام	$\Delta h_{f,i}^\circ$
$t^{-1}$	ضریب تناسب در رابطه (۶۵)	$\beta$	$Q/M$	گرمای تبخیر سطح	$\Delta h_v$
$M/L^3t$	نرخ تولید گونه $i$ ام بر واحد حجم	$\omega_i$	$(N/L^3)^{1-m}/t$	ضریب نرخ واکنش ویژه	$k$
$M/L^2t$	نرخ تولید گونه $i$ ام بر واحد سطح	$\omega_i'$	$(N/L^3)^{1-m}/t$	فاکتور فرکانس برخورد گونه ها	$K_0$
$N$	ضریب استوکیومتریک برای گونه $i$ ام بعنوان واکنش دهنده	$\nu_i$	$(N/L^3)^{1-m}/t$	ضریب نرخ واکنش رو به عقب	$k_b$
$N$	ضریب استوکیومتریک برای گونه $i$ ام بعنوان محصول واکنش	$\nu_i''$	$(N/L^3) \sum (\nu_{i,e}'' - \nu_{i,e}')/t$	ثابت تعادل بر مبنای غلظت گونه ها	$K_C$
			$(N/L^3)^{1-m}/t$	ضریب نرخ واکنش رو به جلو	$k_f$
			$(F/L^2) \sum (\nu_{i,e}'' - \nu_{i,e}')$	ثابت تعادل بر مبنای فشار جزئی	$K_p$

### زیرنویسها

$o$	شرایط استاندارد	$L$	طول مشخصه	$L$
$-$	زیر سطح	.....	کمیت $\rho \mu / \rho_e \mu_e$	$l$
$+$	روی سطح	.....	عدد لوئیس (Lewis): $\lambda / \rho D_i C_p$	$Le_i$
$0$	نقطه صفر مختصات	.....	نماینده عنصر $i$ ام	$M_i$
$b$	رو به عقب	.....	تعداد گونه ها	$N$
$dc$	کنترل شده توسط نفوذ	.....	مرتبه واکنش روبه عقب	$n_b$
$e$	لبه لایه مرزی	.....	مرتبه واکنش روبه جلو	$n_f$
$E$	تعادل	$F/L^2$	فشار	$P$
$f$	رو به جلو	.....	عدد پراتنل (Prandtl)	$Pr$
$i$	مربوط به گونه $i$ ام	$Q/(NT)$	ثابت جهانی گازها	$R_u$
$n$	مرتبه واکنش	.....	عدد اسمیت (Schmidt): $\nu / D$	$Sc$
$N$	تعداد گونه ها	$T$	دما	$T$
$Rad.$	تشعشع	$t$	زمان	$t$
$se$	محسوس (قسمت مربوط به افزایش دما)	$L/t$	سرعت در راستای محور $x$	$u$
$t$	کل	$L/t$	سرعت کل	$U$
$w$	دیواره	$L/t$	سرعت در راستای محور $y$	$v$
		$L/t$	سرعت نفوذ جرمه گونه $i$ ام	$V_i$
		$M/N$	وزن ملکولی گونه $i$ ام	$W_i$
		.....	کمیت بی بعد: $x/L$	$X^*$
		.....	نسبت کسر جرمی گونه $i$ ام: $Y_i/Y_j$	$Y^*$
		.....	کسر جرمی گونه $i$ ام: $\rho_i / \rho$	$Y_i$

### تعریف علائم ابعاد

$F$	نیرو
$L$	طول
$M$	جرم
$N$	مول
$Q$	گرما
$t$	زمان
$T$	دما

$L$	$\delta$ ضخامت لایه مرزی
$M/L^3$	$\rho$ چگالی
$Ft/L^2$	$\mu$ لزجت دینامیکی

### علائم یونانی

### مراجع

- [1] John D. Anderson, "Hypersonic and high temperature gas dynamics", McGraw-Hill, 1989.
- [2] H. Hurwics, "Aerothermochemistry studies in Ablation", Thermodynamics Analysis Section, Research and Advanced Development Division, Avco Corporation, Wilmington, Massachusetts, 1963.
- [3] Kenneth K. Kuo, "principles of combustion", Johon Wiley, 1986.

- [4] W. E. Welsh, Jr, and P. M. Chung, "A modified theory for the effect of surface temperature on the combustion rate of carbon surface in air", Proceeding of the 1963 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Roshko, A., et al, ed., Stanford University Press, Stanford, California, pp. 146-159, 1963.
- [5] P. M. Chung, "Chemically reacting nonequilibrium boundary layers", Advances in Heat Transfer, (J. P. Hartnett and T. F. Irvine, Jr., Eds.), pp. 109-270, Academic Press, New York, 1965.
- [6] S. M. Scala, "The ablation of graphite in dissociated air, Part I, Theory", Inst. of Aerospace sci., Paper No. 62-154, June 1962. Also, General Electric Co., Missile and Space Div., Tech. Info. Series R62SD72, September 1962.
- [7] N. S. Diaconis, P. D. Garsuch, and R. A. Sheridan, IAS Paper No. 62-155, 1962.