

# آنالیز عددی نویز در لیزر نیمه هادی تک مد

عباس ظریفکار  
استادیار  
مرکز تحقیقات مخابرات ایران

محمد کاظم مروج فرشی  
دانشیار  
دانشگاه تربیت مدرس

وحید احمدی  
استادیار  
دانشگاه تربیت مدرس

## چکیده

در این مقاله معادلات نرخ لنج وین حاکم بر رفتار لیزر نیمه هادی تک مد به صورت عددی حل شده و مشخصه های مختلف نویز لیزر از نتایج حل عددی استخراج می گردد. با مد نظر قرار دادن معادلات دینامیکی تصادفی مربوط به میدان و وارونگی جمعیت و با در نظر گرفتن بهره غیر خطی، تابع خود همبستگی شدت، تغییرات نویز شدت با جریان تزریقی لیزر، طیف نویز شدت، طیف نویز فرکانس، شکل خط و پهنای خط لیزر مورد بررسی قرار می گیرد.

## کلمات کلیدی

لیزر نیمه هادی، نویز، نویز شدت، نویز فاز، شکل خط، آنالیز عددی، منابع لنج وین.

## Numerical Analysis of Noise in a Single-Mode Semiconductor Laser

M.K. Moravvej-Farshi  
Associate Professor  
Tarbiat Modarres University

A. Zarifkar  
Assistant Professor  
Iran Telecommunication Research Center

V. Ahmadi  
Assistant Professor  
Tarbiat Modarres University

## Abstract

*In this paper, Langevin rate equations governing the behavior of a single-mode semiconductor laser are solved numerically and various noise characteristics are calculated from the results of numerical solution. Using the stochastic dynamic equations of field and population inversion, including nonlinear gain, we obtain intensity autocorrelation function, intensity noise versus injection current characteristic, intensity and frequency noise spectra, lineshape, and linewidth of laser.*

## Keywords

*semiconductor laser, noise, intensity noise, phase noise, lineshape, numerical analysis, Langevin sources*

یعنی، داریم:

$$E = \sqrt{P} e^{-i\varphi} \quad (2)$$

که در آن  $P$  تعداد فوتونها در داخل ناحیه فعال و  $\varphi$  فاز میدان الکتریکی است. در رابطه (۱)،  $\omega_0$  فرکانس لیزر و  $\Omega$  فرکانس مد طولی کاواک است. در حقیقت  $\omega_0 - \Omega$  عدم تطابق فرکانس زاویه ای بین مد کاواک و فرکانس نوسان واقعی لیزر است.  $G$  بهره مد است و اگر چه اغلب تابعی خطی از تعداد حامل ها در داخل ناحیه فعال در نظر گرفته می شود اما با  $P$  نیز تغییر می کند. این اثر به عنوان بهره غیر خطی شناخته شده است. به منظور لحاظ کردن اثر بهره غیر خطی، شکل زیر را برای بهره در نظر می گیریم [۵-۶]:

$$G(N, P) = \frac{\Gamma c a}{\mu_g V} (N - N_0) / \sqrt{1 + \frac{P}{P_s}} \quad (3)$$

که در آن  $\Gamma$  ضریب محدودیت مد است و به وسیله آن، کاهش بهره در نتیجه گسترش مد نوری در خارج از ناحیه فعال، در نظر گرفته می شود. در حقیقت  $\Gamma$  بیانگر کسری از انرژی مد است که در داخل ناحیه فعال قرار دارد.  $c$  سرعت نور در خلأ و  $\mu_g$  ضریب شکست گروه است.  $a$  ضریب بهره است و از شیب نمودار بهره خطی برحسب چگالی حامل تزریقی تعیین می شود.  $V$  حجم ناحیه فعال،  $N$  تعداد حامل ها در داخل ناحیه فعال،  $N_0$  تعداد حامل لازم برای شروع وارونگی جمعیت و  $P_s$  تعداد فوتون اشباع است. توضیح این نکته لازم است که در توان های زیاد که نرخ گسیل برانگیخته با معکوس زمان واهلش حامل ها در داخل نوار، قابل مقایسه می شود، بهره نوری شروع به اشباع شدن می کند، چون حامل ها نمی توانند با آن سرعتی که دینامیک لیزر ایجاب می کند واهلش یابند. در رابطه (۱)،  $\gamma$  نرخ کاهش فوتون و برابر است با:

$$\gamma = v_g (\alpha_m + \alpha_{int}) = \tau_p^{-1} \quad (4)$$

که در آن  $\alpha_m = (1/2L) \ln(1/R_1 R_2)$  تلفات آینه،  $v_g = c/\mu_g$  سرعت گروه،  $L$  طول کاواک و  $R_1$  و  $R_2$  ضرایب انعکاس دیواره ها است.  $\alpha_{int}$  بیانگر تلفات داخلی ناشی از مکانیزم هایی از قبیل جذب حامل آزاد و پراکنش در مرزهای ساختار ناهمجنس می باشد.  $\tau_p$  نیز طول عمر فوتون در کاواک لیزر است.  $\beta_c$  ضریب افزایش پهنای خط است و به صورت ذیل تعریف می شود [۴ و ۷]:

لیزرهای نیمه هادی به واسطه عواملی از قبیل ابعاد کوچک، توان مصرفی کم و قابلیت مدوله شدن به طور مستقیم، منابع نوری بسیار مناسبی برای سیستم های مخابراتی نوری اند. در شدت و فاز نور خروجی لیزرهای نیمه هادی، حتی به ازای تزریق جریان ثابت، نوساناتی وجود دارد [۱]. گسیل خود به خودی که فرایندی تصادفی است منبع اصلی نویز در لیزرهای نیمه هادی می باشد [۲]. در حقیقت تغییرات تصادفی چگالی فوتون ها منجر به تغییر دامنه توان خروجی لیزر یا نویز شدت می شود. تغییر تصادفی چگالی حامل ها نیز منجر به تغییر طول موج نور خروجی لیزر یا به عبارتی نویز فاز می شود. نویز فاز، تعیین کننده مقدار کمینه پهنای خط طیفی مد لیزر است [۳].

تجزیه و تحلیل رفتار نویزی این گونه لیزرها به لحاظ اثری که بر انتقال اطلاعات یا به عبارتی کارایی سیستم مخابرات نوری دارد، حائز اهمیت بسیار است. هدف این مقاله محاسبه مشخصه های مهم نویز در لیزر نیمه هادی تک مد با در نظر گرفتن بهره غیرخطی و با استفاده از حل عددی معادلات نرخ تصادفی لنج وین است. بنابراین ابتدا معادلات اساسی استفاده شده در آنالیز را معرفی می کنیم. سپس روش عددی برای انتگرال گیری از این معادلات و چگونگی شبیه سازی عددی منابع نویز ذکر می شود. پس از به دست آوردن تغییرات زمانی میدان، تعداد فوتون ها، فاز و تعداد حامل ها، چگونگی محاسبه تابع خود همبستگی شدت، طیف نویز شدت نسبی، تغییرات نویز شدت نسبی با جریان تزریقی، طیف نویز فرکانس، شکل خط و پهنای خط را بیان می کنیم.

## ۱- مروری بر معادلات نرخ لنج وین

یکی از روش های معمول تجزیه و تحلیل مشخصه های استاتیک، دینامیک و طیفی لیزرهای نیمه هادی استفاده از معادلات نرخ است. این معادلات بیانگر بر هم کنش میدان الکترومغناطیسی (فوتون ها) و حامل های باردار می باشند. معادله نرخ میدان الکتریکی که با تقریب از معادلات ماکسول به دست می آید عبارت است از [۴]:

$$\frac{dE(t)}{dt} = i(\omega_0 - \Omega) E(t) + \frac{1}{2} (G - \gamma) (1 - i\beta_c) E(t) \quad (1)$$

که در آن  $E(t)$  دامنه مختلط میدان لیزر است و فرض می شود که دارای تغییراتی آهسته است. میدان  $E(t)$  طوری نرمالیزه شده که کمیتی بدون بُعد است و مجذور قدر مطلق آن بیانگر تعداد فوتون ها در داخل کاواک لیزر می باشد.

کرد بلکه به منظور بررسی صحیح دینامیک لیزر باید این سهم را در نظر گرفت.

معادلات کوپل شده (۱) و (۶) که برای تعیین تغییرات زمانی میدان (یعنی تغییرات تعداد فوتون ها و فاز) و همچنین تغییرات تعداد حامل ها به کار می روند، طبیعت معینتی دارند. در واقع این دو معادله درباره رفتار نویزی میدان و وارونگی جمعیت، هیچ گونه اطلاعی به ما نمی دهد. بنابراین، برای دست یابی به نوسانات آماری کمیات مورد نظر، معادلات مذکور باید به نحو مناسب اصلاح شوند. بدین منظور، نیروها یا منابع تصادفی لنج وین به طرف دوم این معادلات اضافه شده، معادلات نرخ لنج وین به صورت ذیل بیان می شوند [۴]:

$$\frac{dE(t)}{dt} = i(\omega_0 - \Omega) E(t) + \frac{1}{2} (G - \gamma) (1 - i\beta_c) E(t) + F_E(t) \quad (11)$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I}{q} - \gamma_e N - GP + F_N(t) \quad (12)$$

در این روابط،  $F_E(t)$  و  $F_N(t)$  منابع نویز لنج وین اند. از نظر فیزیکی،  $F_E(t)$  از گسیل خودبه خودی ناشی می شود در حالی که  $F_N(t)$  از فرایندهای تولید و ترکیب حامل نشأت می گیرد. این منابع نویز، هر دو گوسی و دارای میانگین صفرند [۴ و ۱۰].  $F_E$  مختلط بوده، به صورت  $F_E = F_{ER} + iF_{EI}$  در نظر گرفته می شود و  $F_N$ ، حقیقی است. برای  $F_E$  توابع همبستگی ذیل را داریم:

$$\langle F_E(t) F_E(t') \rangle = R_{sp}(\bar{N}) \delta(t-t') \quad (13)$$

$$\langle F_{ER}(t) F_{EI}(t') \rangle = 0$$

علامت  $\langle \rangle$  بیانگر متوسط مجموعه ای است. تابع همبستگی برای  $F_N(t)$  عبارتست از:

$$\langle F_N(t) F_N(t') \rangle = 2 \left[ R_{sp}(\bar{N}) \bar{P} + \gamma_e (\bar{N}) \bar{N} \right] \delta(t-t') \quad (14)$$

توابع همبستگی متقابل نویز  $F_E$  و  $F_N$  عبارتست از:

$$\langle F_{ER}(t) F_N(t') \rangle = \frac{R_{sp}(\bar{N})}{2} \sqrt{\bar{P}} \delta(t-t') \quad (15)$$

$$\langle F_{EI}(t) F_N(t') \rangle = \frac{R_{sp}(\bar{N})}{2} \sqrt{\bar{P}} \delta(t-t') \quad (16)$$

$$\beta_c = \frac{d\chi_r / dN}{d\chi_i / dN} = \frac{\Gamma_c}{\mu_g} \frac{\partial \mu / \partial N}{\partial G / \partial N} \quad (5)$$

که در آن  $\chi_r$  و  $\chi_i$  به ترتیب قسمت های حقیقی و موهومی پذیرفتاری الکتریکی محیط نیمه هادی و  $\mu$  ضریب شکست ماده نیمه هادی است.

علاوه بر معادله نرخ میدان الکتریکی، به یک معادله نرخ برای وارونگی جمعیت نیز نیاز داریم. وارونگی، به جریان تزریقی  $I$  وابسته است. معادله نرخ برای تعداد حامل ها در داخل ناحیه فعال ( $N$ ) عبارتست از [۱]:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I}{q} - \gamma_e N - GP \quad (6)$$

که در آن  $q$  بار الکترون و  $\gamma_e$  نرخ ترکیب حامل ها در غیاب گسیل برانگیخته است که برابر است با:

$$\gamma_e = (A_{nr} + Bn + Cn^2) = \tau_e^{-1} \quad (7)$$

در رابطه اخیر، نرخ ترکیب  $A_{nr}$  بیانگر ترکیب غیر تشعشعی مربوط به فرایندهایی از قبیل ترکیب سطحی و ترکیب توسط تله ها،  $B$  ضریب ترکیب خود به خودی و  $C$  ضریب ترکیب اوزه است.  $n = N/V$  چگالی حامل ها در داخل ناحیه فعال و  $\tau_e$  نیز طول عمر حامل است.

معادلات نرخ برای تعداد فوتون ها و فاز را می توان از جایگذاری (۲) در (۱) به دست آورد. نتیجه، عبارت است از [۴]:

$$\frac{dP}{dt} = (G - \gamma) P + R_{sp} \quad (8)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -(\omega_0 - \Omega) + \frac{1}{2} \beta_c (G - \gamma) \quad (9)$$

که در آن  $R_{sp}$  نرخ است که فوتون های گسیل شده به صورت خودبه خودی به فوتون های داخل کاواک افزوده می شود. این نرخ برابر است با:

$$R_{sp} = \beta_{sp} B \frac{N^2}{V} \quad (10)$$

$\beta_{sp}$ ، ضریبی است که توسط مکانیزم محدودیت جانبی در لیزر تعیین می شود و بیانگر کسری از فوتون های گسیل شده به صورت خودبه خودی است که در مد لیزر وارد می شوند. از سهم گسیل خودبه خودی در مد لیزر، نمی توان صرف نظر

در روابط (۱۲) تا (۱۶)  $\bar{P}$  و  $\bar{N}$  به ترتیب بیانگر مقادیر متوسط حالت پایدار تعداد حامل ها و فوتون ها در داخل ناحیه فعال اند.

به منظور به دست آوردن نوسانات مد لیزر باید از معادلات دیفرانسیل تصادفی (۱۱) و (۱۲) به صورت عددی انتگرال گیری کنیم. یعنی با استفاده از شرایط اولیه معین، تغییرات زمانی میدان و نیز تغییرات تعداد حامل ها را دنبال می کنیم. به منظور لحاظ کردن منابع نویز لنج وین، نوسانات تصادفی را در هر پله زمانی انتگرال گیری وارد می کنیم. از آنجا که این کار مستلزم داشتن توابع همبستگی منابع نویز است و این توابع نیز بر طبق روابط (۱۳) تا (۱۶) به مقادیر متوسط حالت پایدار بستگی دارند، بنابراین ابتدا باید این مقادیر را محاسبه کنیم.

## ۲- محاسبه مقادیر متوسط در حالت پایدار

به منظور به دست آوردن مقادیر متوسط در حالت پایدار باید مشتقات زمانی در معادلات نرخ بدون منابع لنج وین یعنی معادله های (۶)، (۸) و (۹) را برابر صفر قرار داد. در این صورت با استفاده از روابط (۳)، (۷) و (۱۰) نتیجه می گیریم:

$$\frac{\Gamma c a (N - N_0) P}{\mu_g V \sqrt{1 + P/P_s}} - \gamma P + \beta_{sp} B \frac{N^2}{V} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{I}{q} - A_{nr} N - B \frac{N^2}{V} - C \frac{N^3}{V^2} - \frac{\Gamma c a (N - N_0) P}{\mu_g V \sqrt{1 + P/P_s}} = 0 \quad (18)$$

از حل دستگاه معادلات (۱۷) و (۱۸) مقادیر متوسط در حالت پایدار به دست می آید. حل این دستگاه معادلات غیر خطی را به روش نیوتن انجام می دهیم [۸]. همگرایی روش نیوتن مستلزم انتخاب تقریب اولیه مناسب برای  $N$  و  $P$  است. به علاوه دستگاه معادلات مورد بحث شدیداً غیر خطی است و همین مسأله نیز همگرایی روش را دچار مشکل می کند. به منظور به دست آوردن تقریب اولیه مناسب برای حل این دستگاه، از وابستگی بهره به تعداد فوتون ها صرف نظر کرده و بهره را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$G(N) = G_N (N - N_0) \quad (19)$$

که در آن  $G_N = \Gamma c a / \mu_g V$  است. از رابطه های (۶) و (۸) در حالت پایدار نتیجه

می گیریم:

$$P = \frac{R_{sp}}{\gamma - G} \quad (20)$$

$$\gamma_e N + GP = \frac{I}{q} \quad (21)$$

با جایگذاری روابط (۷)، (۱۰)، (۱۹) و (۲۰) در رابطه (۲۱)، معادله درجه چهارم زیر بر حسب  $N$  به دست می آید:

$$-\frac{qCG_N}{V^2} N^4 + \left[ \frac{qC\gamma}{V^2} + \frac{qCG_N N_0}{V^2} + (\beta_{sp}-1) \frac{qBG_N}{V} \right] N^3 + \left[ \frac{qB\gamma}{V} - qA_{nr} G_N + (1-\beta_{sp}) \frac{qBG_N N_0}{V} \right] N^2 + (q\gamma A_{nr} + qA_{nr} G_N N_0 + IG_N) N - (I\gamma + IG_N N_0) = 0 \quad (22)$$

ابتدا با حل این معادله به ازای مقادیر مختلف جریان تزریقی  $I$ ، تعداد حامل ها در داخل ناحیه فعال یعنی  $N$  به دست می آید. سپس با استفاده از رابطه (۲۰) تعداد فوتون ها ( $P$ ) محاسبه می شود. از مقادیری که به این طریق به دست می آیند به عنوان تقریب اولیه برای حل دستگاه معادلات (۱۷) و (۱۸) استفاده می شود. شایان ذکر است که توان خروجی از هر یک از دیواره های لیزر با رابطه ذیل به  $P$  مربوط می شود [۱]:

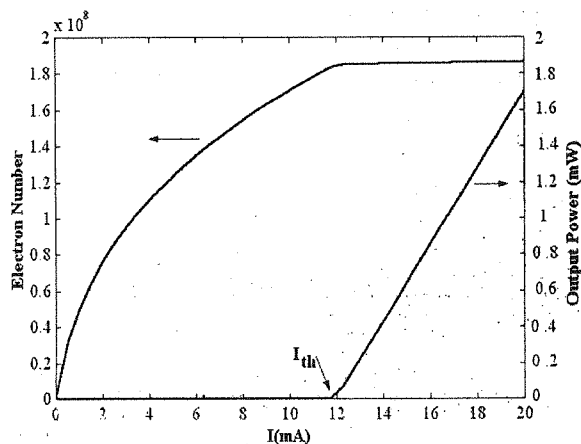
$$P_{out} = \frac{1}{2} h\omega \sigma v_g \alpha_m P \quad (23)$$

که در آن  $\bar{h} = \frac{h}{2\pi}$  و  $\bar{h}$  ثابت پلانک است.

شکل ۱ تغییر توان خروجی و تغییر تعداد حامل ها بر حسب جریان تزریقی  $I$  را برای لیزری با ساختار هدایت شده با ضریب شکست (index-guided) از جنس  $In_{0.63}Ga_{0.37}As_{0.82}P_{0.18}$  با طول موج  $1.55 \mu m$  با استفاده از پارامترهای جدول ۱ نشان می دهد.

همانطور که در شکل دیده می شود وقتی جریان به حدود ۱۲ میلی آمپر می رسد،  $P$  یا به عبارتی توان خروجی سریعاً شروع به افزایش می کند. این جریان، جریان آستانه لیزر نامیده می شود. تغییر شیب ناگهانی منحنی در مجاورت آستانه نشان دهنده این موضوع است که گسیل برانگیخته بر گسیل خودبه خودی غالب شده است. در نزدیکی آستانه در

یک گستره کوچک جریان، توان خروجی به سرعت تغییر می کند. تغییر تعداد حامل  $N$  برحسب جریان  $I$  نشان می دهد که بالاتر از آستانه،  $N$  تقریباً ثابت است و با افزایش جریان، افزایش چندانی پیدا نمی کند. به بیان دیگر بالاتر از آستانه، یک تغییر کوچک در  $N$  یا به عبارت دیگر  $G$  منجر به یک تغییر بزرگ در  $P$  می شود.



شکل (۱) تغییرات توان خروجی لیزر و تغییرات تعداد حامل ها در داخل ناحیه فعال برحسب جریان تزریقی.

جدول (۱) مقادیر پارامترها برای لیزری با ساختار هدایت شده با ضریب

شکست از جنس  $\text{In}_{0.63}\text{Ga}_{0.37}\text{As}_{0.82}\text{P}_{0.18}$   
با طول موج  $1.55 \mu\text{m}$  /  $1.55 \mu\text{m}$  و  $9.4 \mu\text{m}$ .

| نام پارامتر                    | نماد           | مقدار                                       |
|--------------------------------|----------------|---|
| طول کاراک                      | $L$            | $250 \mu\text{m}$                           |
| عرض ناحیه فعال                 | $w$            | $2 \mu\text{m}$                             |
| ضخامت ناحیه فعال               | $d$            | $0.2 \mu\text{m}$                           |
| ضریب محدودیت                   | $\Gamma$       | 0.4   |
| ضریب شکست گروه                 | $\mu_r$        | 4   |
| ضریب افزایش پهنای خط           | $\beta_c$      | 5   |
| ضریب گسیل خود به خودی          | $\beta_{sp}$   | $4 \times 10^{-5}$                          |
| تلفات دیواره                   | $\alpha_m$     | $45 \text{ cm}^{-1}$                        |
| تلفات داخلی                    | $\alpha_{int}$ | $40 \text{ cm}^{-1}$                        |
| ضریب بهره                      | $a$            | $2.5 \times 10^{-16} \text{ cm}^2$          |
| تعداد حاملها برای شروع وارونگی | $N_0$          | $10^8$                                      |
| ضریب ترکیب غیر تشعشی           | $A_{nr}$       | $6.7 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$            |
| ضریب ترکیب تشعشی               | $B$            | $0.9 \times 10^{-10} \text{ cm}^3/\text{s}$ |
| ضریب ترکیب اوره                | $C$            | $5 \times 10^{-29} \text{ cm}^6/\text{s}$   |

### ۳- انتگرال گیری عددی از معادلات نرخ لنج وین

از آنجا که هدف ما به دست آوردن نوسانات لیزر حول حالت پایدار است پس از محاسبه مقادیر متوسط شدت مد و وارونگی جمعیت در حالت پایدار، این مقادیر را به عنوان شرایط

اولیه برای انتگرال گیری عددی از معادلات نرخ لنج وین به کار می گیریم. روشی که در اینجا برای انتگرال گیری عددی از معادلات دیفرانسیل تصادفی استفاده می شود، روش رانج - کوتا (Runge-Kutta) مرتبه چهارم است [۸]. در پیاده سازی این روش، پله زمانی را  $5 \text{ psec}$  و تعداد آنها را بین ۱۰۰۰۰ تا ۴۰۰۰۰۰ در نظر می گیریم یعنی انتگرال گیری بر روی بازه زمانی ۵۰ تا ۲۰۰ نانو ثانیه انجام می شود. برای اینکه متوسط های آماری که از محاسبات به دست می آیند دقت مناسبی داشته باشند لازم است که ۱۰ تا ۵۰ بار انتگرال گیری عددی را انجام دهیم. منابع نویز در معادلات نیز با تولید اعداد تصادفی با توابع همبستگی روابط (۱۳) تا (۱۶) شبیه سازی می شوند. یعنی در هر پله انتگرال گیری، اعداد تصادفی گوسی با واریانس مناسب به طرف دوم معادلات نرخ اضافه می شوند. این روش که تحت عنوان روش مونت کارلو شناخته می شود مقادیر میدان (یا شدت و فاز) و نیز تعداد حامل ها را در هر پله زمانی به دست می دهد. در اینجا لازم است که در خصوص نحوه وارد کردن اعداد نویز مناسب در هر پله زمانی در معادلات نرخ صحبت کنیم. از رابطه (۱۴) داریم:

$$\langle F_N(t) F_N(t') \rangle = 2 \left[ R_{sp}(\bar{N}) \bar{P} + \gamma_e (\bar{N}) \bar{N} \right] \delta(t-t') = V_N^2 \delta(t-t') \quad (24)$$

که در آن  $V_N^2$  واریانس  $F_N$  می باشد.

از آنجا که در انتگرال گیری عددی از معادلات نرخ لنج وین لازم است که توابع بر روی فواصل زمانی گسسته  $\Delta t$  ملاحظه شود لذا می توان نوشت [۱۰]:

$$\langle F_N(t) F_N(t') \rangle = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} V_N^2 & |t-t'| < \Delta t \\ 0 & |t-t'| > \Delta t \end{cases} \quad (25)$$

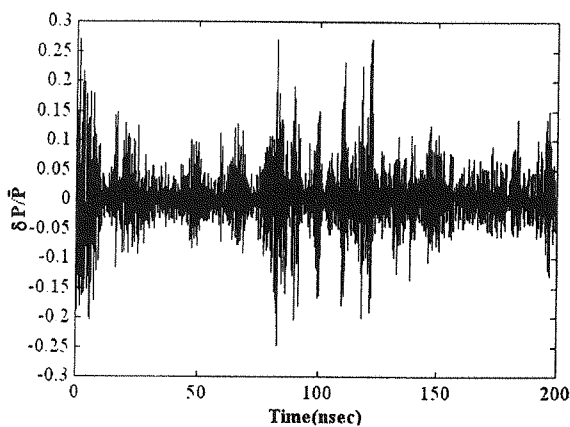
بنابراین می توان تابع تصادفی  $F_N$  را در هر بازه زمانی مشخص  $\Delta t$  به صورت زیر بیان کرد:

$$F_N = \frac{V_N}{\sqrt{\Delta t}} \times I \quad (26)$$

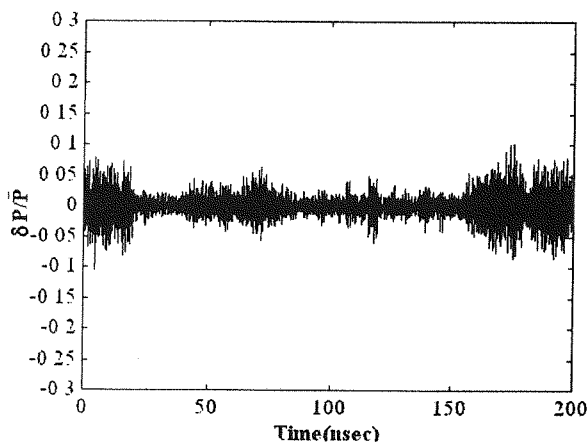
در این رابطه  $X_I$  یک متغیر تصادفی گوسی با میانگین صفر و واریانس یک است.

برای تولید متغیرهای تصادفی  $F_{ER}$  و  $F_{EI}$  فرض می کنیم که:

که در آن  $\sigma^2$  واریانس تغییرات تعداد فوتون هاست، محاسبه کنیم به ازای جریان های ۱۴، ۱۹ و ۲۴ میلی آمپر به ترتیب مقادیر ۹/۹۵/۶، ۳۳/۶ و ۱۹ به دست می آید که نشان دهنده باریک تر شدن توزیع احتمال تعداد فوتون ها می باشد.



(الف)



(ب)

شکل (۲) نسبت نوسانات تعداد فوتون ها به مقدار متوسط تعداد فوتون ها در حالت پایدار به ازای دو جریان تزریقی مختلف، (الف)  $I=14\text{mA}$  و (ب)  $I=19\text{mA}$ .

### ع - نویز شدت

در این قسمت، نتایج بدست آمده در مورد نویز شدت، بیان و تجزیه و تحلیل می شود. چندین معیار مختلف در خصوص نویز شدت وجود دارد که هر یک در بردارنده اطلاعاتی درباره جنبه های متفاوت رفتار نویزی لیزر اند. یکی از این معیارها، تابع خود همبستگی  $C_{pp}(\tau)$  است که توصیف کننده نویز در دامنه زمان می باشد. تغییرات زمانی تعداد فوتون های گسیل شده از لیزر (P) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$F_N = \frac{V_N}{\sqrt{\Delta t}} x_1 = a_{11} x_1 \quad (27)$$

$$F_E = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \quad (28)$$

$$F_{ER} = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \quad (29)$$

در این روابط  $x_1, x_2, x_3$  متغیرهای تصادفی گوسی مستقل با میانگین صفر و واریانس یک اند. با مشخص بودن  $a_{ij}$  دیگر ضرایب را طوری تعیین می کنیم که روابط (۱۲)، (۱۵) و (۱۶) را ارضا کنند. نتیجه عبارت است از:

$$a_{21} = a_{31} = a_{22} = \frac{R_{sp}}{2V_N \sqrt{\Delta t}} \sqrt{P}$$

$$a_{32} = -a_{21}$$

$$a_{33} = \frac{\sqrt{R_{sp}}}{\sqrt{\Delta t}} \quad (30)$$

با در نظر گرفتن ضرایب  $a_{ij}$  به شکل فوق و تولید اعداد تصادفی گوسی  $x_1, x_2, x_3$ ، منابع نویز  $F_N$  و  $F_E$  ساخته می شوند. به این ترتیب با تولید اعداد تصادفی مناسب و انتگرال گیری از معادلات نرخ لنج وین به روشی که در ابتدای این بخش توضیح داده شد تغییرات میدان (یعنی تغییرات تعداد فوتون ها و فاز) و همچنین تغییرات تعداد حامل ها برحسب زمان محاسبه می شود. با استفاده از نتایج محاسبات، در شکل های ۲ (الف) و ۲ (ب) نسبت نوسانات تعداد فوتون ها ( $\delta P$ ) به مقدار متوسط تعداد فوتون ها در حالت پایدار ( $\bar{P}$ ) به ازای دو جریان تزریقی مختلف نشان داده شده است. دیده می شود که نوسانات شدت ناشی از نویز، برای نقطه کار نزدیک به آستانه شدیدتر است. در توجیه این رفتار باید گفت که در نزدیکی آستانه، گسیل خودبه خودی که منشأ نویز است با گسیل برانگیخته قابل مقایسه است اما هر چه از آستانه بالاتر می رویم غلبه گسیل برانگیخته، بیشتر و آثار نویز ضعیف تر می شود.

با استفاده از تغییرات زمانی تعداد فوتون ها می توان چگالی احتمال تعداد فوتون ها را محاسبه کرد. نتایج حاصل از حل عددی نشان می دهد که پایینتر از آستانه، چگالی احتمال تعداد فوتون ها به صورت توزیع بوز-اینشتین است و با افزایش جریان تزریقی به مقادیر بالاتر از جریان آستانه، به صورت توزیع پواسن در می آید. چنانچه مقدار  $\sigma^2 / \bar{P}$  را

$$P(t) = \bar{P} + \delta P(t) \quad (31)$$

که در آن  $\delta P(t)$  بیانگر نوسانات نسبت به مقدار متوسط در حالت پایدار می باشد.

تابع خودهمبستگی به صورت ذیل تعریف می شود [۱]:

$$C_{pp}(\tau) = \frac{\langle \delta P(t) \delta P(t + \tau) \rangle}{\bar{P}^2} \quad (32)$$

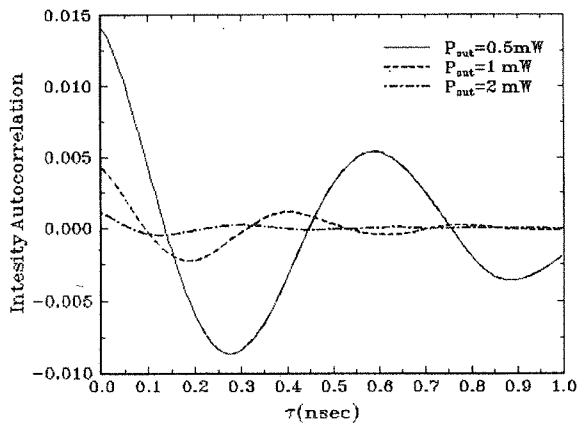
این رابطه بیان می دارد که برای به دست آوردن تابع خودهمبستگی باید مقادیر انحراف نسبت به مقدار متوسط در حالت پایدار را با در نظر گرفتن تأخیرهای زمانی مختلف بر روی کل محدوده زمانی انتگرال گیری در هم ضرب کرده و سپس متوسط گیری کنیم. برای داشتن دقت کافی در مقدار تابع خود همبستگی باید طول مسیرهای زمانی انتگرال گیری چندین برابر از بیشترین زمان تأخیری که تابع به ازای آن محاسبه می شود بزرگتر باشد. در انجام محاسبات، طول کل مسیر یعنی  $T$  برابر با ۱۰۰ نانو ثانیه و بیشترین مقدار  $\tau$  برابر با ۱ نانو ثانیه در نظر گرفته شده است. به منظور محاسبه رابطه اخیر از نتایج حل عددی داریم:

$$C_{pp}(\tau) = \frac{\sum_n \delta P(t_n + \tau) \delta P(t_n) \Delta}{T \bar{P}^2} \quad (33)$$

که در آن  $\Delta$  پله زمانی انتگرال گیری است و برابر با ۵psec در نظر گرفته می شود.

در شکل ۳، تابع خود همبستگی به ازای سه توان خروجی مختلف نشان داده شده است.  $C_{pp}(\tau)$  رفتاری نوسانی دارد که ناشی از نوسانات واهلش می باشد. توضیح اینکه هنگامی که جریان تزریقی لیزر به طور ناگهانی به مقداری بالاتر از آستانه پرش می کند تعداد فوتون ها و حامل ها در داخل ناحیه فعال پیش از رسیدن به حالت پایدار، نوسانات تناوبی مستهلک شونده ای را از خود نشان می دهند. این نوسانات تحت عنوان نوسانات واهلش شناخته می شود و ناشی از تشدید ذاتی در لیزر، که یک سیستم غیر خطی است می باشد. تشدید ذاتی به این معنی است که انرژی ذخیره شده در سیستم بین الکترون ها و فوتون ها نوسان می کند. فرکانس و نرخ کاهش نوسانات واهلش نقش مهمی را در تعیین پاسخ گذرای لیزر ایفا می کنند. روابط تحلیلی تقریبی برای فرکانس و نرخ کاهش نوسانات واهلش با در نظر گرفتن بهره غیر خطی در مرجع [۶] آمده است. همانطور که در شکل دیده می شود، در توان های بالاتر،  $C_{pp}(\tau)$  سریعتر به صفر میل می کند. با توجه به اینکه تابع خودهمبستگی  $C_{pp}(\tau)$

معیاری از شباهت مقادیر تابع  $\delta P(t)$  در لحظات  $t$  و  $t+\tau$  است، در واقع میل کردن سریعتر  $C_{pp}(\tau)$  به صفر، بدین معنی است که به ازای یک  $\tau$  مشخص، شباهت بین مقادیر در لحظات  $t$  و  $t+\tau$  کمتر است و این به مفهوم تغییرات سریعتر سیگنال تصادفی  $\delta P(t)$  است یعنی در توان های بالاتر، مؤلفه های فرکانسی بالا در سیگنال نویزی، بزرگتر می باشند. نتایج به دست آمده از حل عددی توافق خوبی را با نتایج تحلیلی به دست آمده از خطی سازی معادلات نرخ در مرجع [۱۱]، از خود نشان می دهند.



شکل (۳) تابع خودهمبستگی شدت به ازای سه توان خروجی مختلف.

تابع خود همبستگی به ازای  $\tau=0$  واریانس نویز را نتیجه می دهد یعنی:

$$C_{pp}(0) = \frac{\sigma^2}{\bar{P}^2} \quad (34)$$

که در آن  $\sigma^2$  واریانس نویز است. نسبت سیگنال به نویز (SNR) نور لیزر را که معیار دیگری از نویز شدت لیزر است، می توان به صورت ذیل تعریف نمود [۱]:

$$SNR = \frac{1}{\sqrt{C_{pp}(0)}} \quad (35)$$

در شکل ۴، تغییر SNR برحسب توان خروجی لیزر برای حالات بهره خطی و نیز بهره غیر خطی به ازای سه مقدار مختلف توان اشباع، نشان داده شده است. همانطور که دیده می شود چنانچه ویژگی غیر خطی بودن بهره در نظر گرفته نشود SNR با افزایش توان لیزر به بهبود خود ادامه می دهد اما بهره غیر خطی منجر به اشباع SNR می شود. مقدار اشباع توسط  $P_s$  تعیین می شود و به ازای مقادیر کمتر توان اشباع، کوچکتر است. نتایج به دست آمده، با نتایج تحلیلی

مرجع [۱۸] همخوانی دارند.

در شکل ۵، تغییر SNR برحسب توان خروجی، برای سه مقدار مختلف  $\beta_{sp}$  نشان داده شده است. در شکل، مشاهده می شود که با افزایش  $\beta_{sp}$  یا به عبارتی نرخ گسیل خودبه خودی، SNR کاهش می یابد زیرا همانطور که پیش از این نیز بیان شد گسیل خودبه خودی، منبع اصلی نویز در لیزر نیمه هادی است.

براساس قضیه وینر-خینچین (Wiener-Khintchine) می توانیم برای یک فرایند تصادفی ایستاد، RIN را به صورت زیر بیان کنیم:

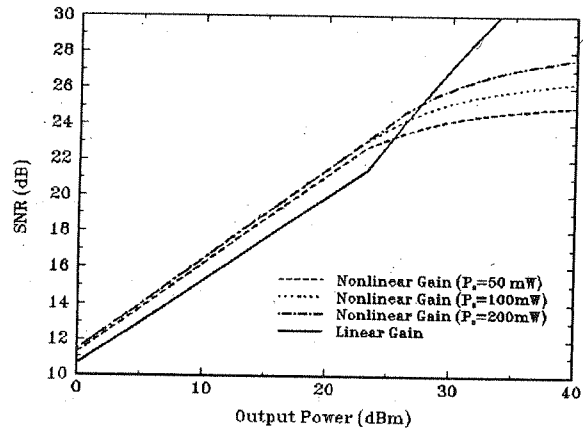
$$RIN(\omega) = \frac{\left\langle \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \delta P(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \right\rangle}{\bar{P}^2} = \frac{\langle |\delta P(\omega)|^2 \rangle}{\bar{P}^2} \quad (۲۷)$$

که در آن  $\delta P(\omega)$  تبدیل فوریه  $\delta P(t)$  است. برای محاسبه RIN از نتایج حل عددی، از رابطه ذیل استفاده می کنیم [۴]:

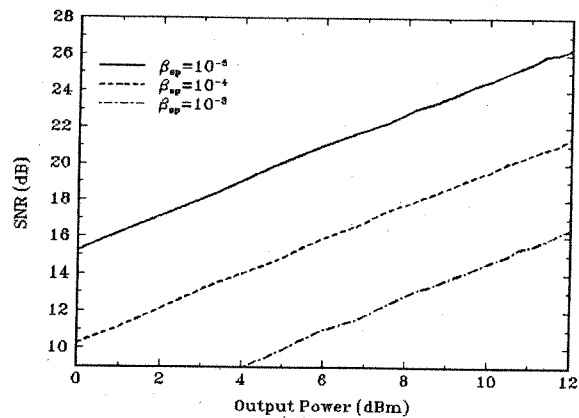
$$RIN(\omega) = \frac{1}{T} \frac{\left\langle \left| \sum_n \delta P(t_n) e^{-i\omega t_n} \Delta \right|^2 \right\rangle}{\bar{P}^2} = \frac{\Delta^2}{TP} \left| \text{FFT}(\delta P(t_n)) \right|^2 \quad (۲۸)$$

منظور از  $\text{FFT}(\delta P(t_n))$ ، تبدیل فوریه سریع (Fast Fourier Transform) تغییر تعداد فوتون ها نسبت به مقدار متوسط در حالت پایدار است.

بنابراین برای محاسبه RIN، FFT یک مسیر زمانی مربوط به تعداد فوتون ها را به دست آورده و از رابطه قبل استفاده می کنیم. عدم قطعیت RIN محاسبه شده به این طریق را می توان با متوسط گیری بر روی تعداد زیادی مسیر، کاهش داد. در استفاده از FFT برای محاسبه طیف، فرکانس نایکویست  $f_c = 1/2\Delta$  تعیین کننده بالاترین فرکانس طیف است. دقت فرکانسی حاصل از حل عددی نیز با رابطه  $\Delta f = 1/N_s \Delta$  مشخص می شود که در آن  $N_s$  تعداد کل پله های زمانی در هر مسیر انتگرال گیری است. در شکل ۶، RIN به ازای چند توان خروجی مختلف نشان داده شده است. به ازای یک توان خروجی مشخص، در فرکانس های پایین، نویز نسبتاً کم است و در فرکانس نوسانات واهلش به واسطه تشدید ذاتی لیزر، نویز به بیشترین مقدار خود می رسد. به ازای فرکانس های بیش از فرکانس نوسانات واهلش، نویز به سرعت کاهش می یابد. رفتار مشاهده شده، با نتایج تحلیلی [۱۸] و نتایج تجربی [۱۲] همخوانی دارد. به علاوه همانطور که از منحنی متناظر با توان ۰/۵ میلی وات دیده می شود، هنگامی که لیزر نزدیک به آستانه عمل می کند قله مربوط به نوسانات واهلش در فرکانس کمتری واقع می شود و مقدار آن نیز بزرگتر است. این همان رفتاری است که با توجه به نتایج تحلیلی [۶] انتظار می رود. درحقیقت با کاهش جریان تزریقی و نزدیک شدن به آستانه، فرکانس نوسانات واهلش کاهش



شکل (۴) تغییر SNR برحسب توان خروجی لیزر برای بهره خطی و به ازای سه مقدار مختلف توان اشباع برای بهره غیر خطی.



شکل (۵) تغییر SNR برحسب توان خروجی لیزر به ازای سه مقدار مختلف برای ضریب گسیل خود به خودی.

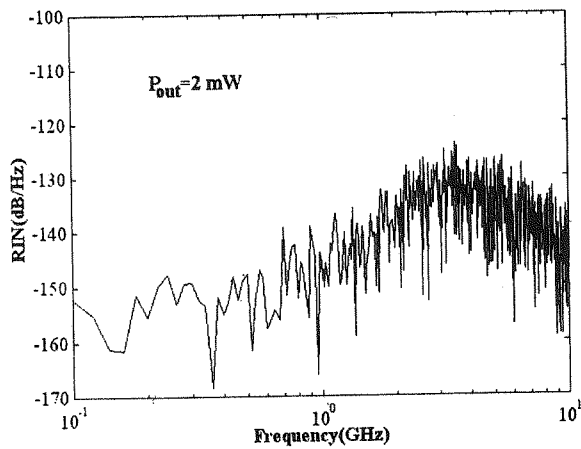
کمیت مهم دیگری که محتوای فرکانسی نوسانات شدت را مشخص می کند، نویز شدت نسبی (Relative Intensity Noise  $\equiv$  RIN) است که به صورت ذیل برحسب تبدیل فوریه تابع خود همبستگی تعریف می شود [۴]:

$$RIN(\omega) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \langle \delta P(t) \delta P(t + \tau) \rangle e^{-i\omega \tau} dt}{\bar{P}^2} \quad (۲۹)$$



می یابد و به علاوه به دلیل قابل توجه بودن نرخ گسیل خود به خودی، نویز بیشتری مشاهده می شود.

از جنبه دیگری نیز می توان نویز شدت را مورد توجه قرار داد. چنانچه به ازای یک فرکانس مشخص، RIN را بر حسب جریان تزریقی لیزر محاسبه کنیم، مشاهده می شود که نویز شدت در نزدیکی آستانه لیزر به بیشترین مقدار خود می رسد و سپس با افزایش جریان تزریقی به سرعت کاهش می یابد. چنین رفتاری در شکل ۷ (الف) دیده می شود و به طور تجربی نیز مشاهده شده است [۲]. از نظر فیزیکی نیز علت این مسأله این است که با افزایش جریان تزریقی لیزر از مقدار صفر، هر چه به آستانه نزدیکتر می شویم نرخ گسیل خود به خودی که منشأ نویز است بیشتر می شود و پس از گذر از آستانه تقریباً ثابت می ماند، در حالی که بالاتر از آستانه نرخ گسیل برانگیخته افزایش سریعی پیدا می کند و بر گسیل خودبه خودی غالب می شود. به علاوه نرخ خطای بیت، BER، رابطه ای به شکل زیر با RIN دارد [۱۳] که بر اساس آن، تغییرات BER بر حسب جریان تزریقی در شکل ۷ (ب) نشان داده شده است.

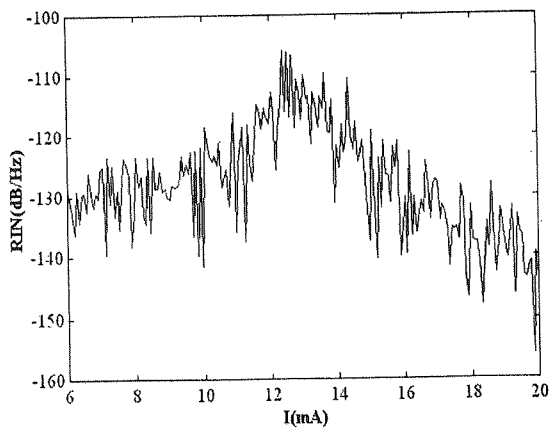


(ج)

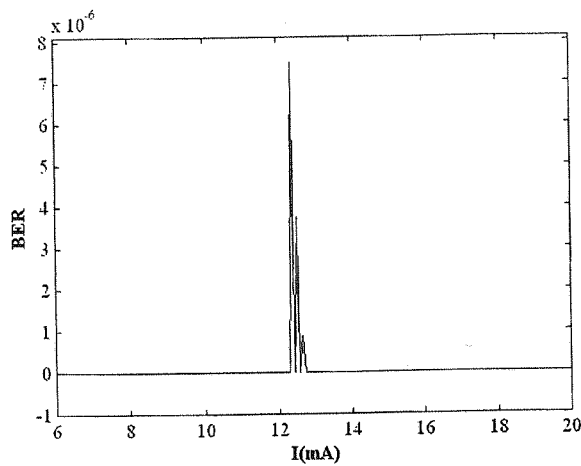
شکل (۶) طیف نویز شدت نسبی به ازای سه توان خروجی مختلف:

(الف)  $P_{out}=0.5mW$ ، (ب)  $P_{out}=1mW$  و (ج)  $P_{out}=2mW$ .

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{1}{2\sqrt{2} RIN^{1/2}} \right) \quad (39)$$



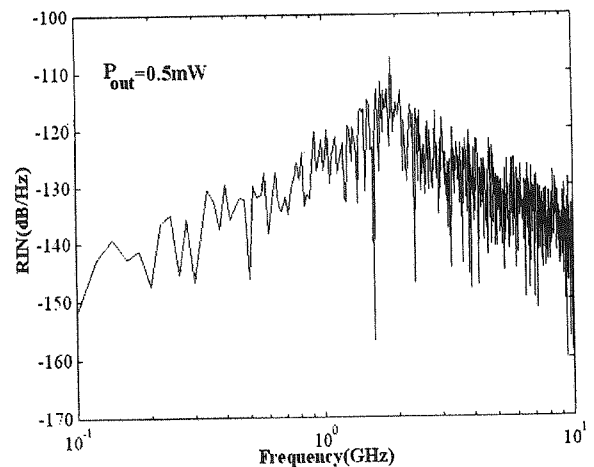
(الف)



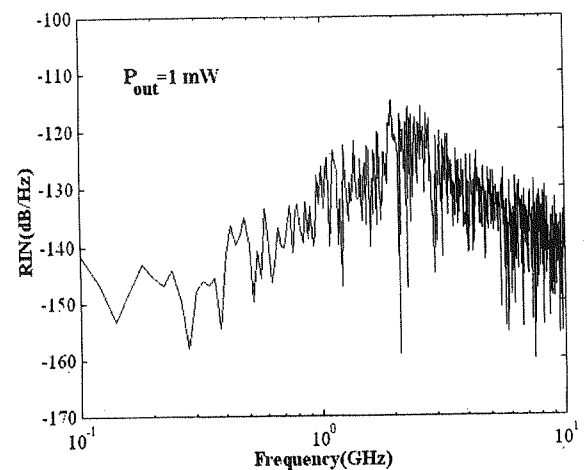
(ب)

شکل (۷) تغییرات نویز شدت نسبی بر حسب جریان تزریقی و

(ب) تغییرات نرخ خطای بیت بر حسب جریان تزریقی.



(الف)



(ب)

## ۵- نویز فاز

شکل خط یا طیف میدان، عبارت است از تبدیل فوریه تابع خود همبستگی میدان، یعنی:

$$S_E(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle E^*(t+\tau) E(t) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (42)$$

که در آن  $E(t) = \sqrt{P(t)} e^{-i(\omega_0 t + \phi(t))}$  است. طیف میدان یا شکل خط به طور تحلیلی با روش خطی سازی به دست آمده است [۱۷]. محدودیت روش تحلیلی این است که از سهم نوسانات شدت در شکل خط صرفنظر می شود. مزیت روش عددی ارائه شده این است که ما را قادر می سازد که شکل خط را با لحاظ کردن اثر نوسانات شدت محاسبه کنیم. سادگی روش عددی برای محاسبه شکل خط از آنجا ناشی می شود که ما را معادلات میدان الکتریکی برای انتگرال گیری استفاده می کنیم. از رابطه (۴۲) داریم:

$$S_E(\omega) = \left\langle \left| \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \right\rangle = \langle |E(\omega)|^2 \rangle \quad (43)$$

که در آن  $E(\omega)$  تبدیل فوریه  $E(t)$  است. بنابراین برای محاسبه طیف میدان از نتایج حل عددی، از رابطه زیر بهره می گیریم:

$$S_E(\omega) = \frac{\left| \sum_n E(t_n) e^{-i\omega_n t_n} \Delta \right|^2}{T} = \frac{\Delta^2}{T} |FFT(E(t_n))|^2 \quad (44)$$

یعنی مجذور قدر مطلق FFT میدان الکتریکی، شکل خط را به دست می دهد.

در شکل ۹ شکل خط لیزر به ازای جریان  $I=18\text{mA}$  نشان داده شده است. این طیف شامل یک قله مرکزی در فرکانس مد ( $\omega_0$ ) و دو قله کناری است. قله های کناری از نوسانات واهلش ناشی می شوند و به طور تجربی نیز مشاهده شده اند [۱۶]. به منظور محاسبه پهنای خط لیزر، برآزشی به شکل لورنتسی و به صورت حداقل مجذور انحرافات به شکل دست آمده از حل عددی انجام می دهیم و با استفاده از آن پهنای خط را به دست می آوریم. این کار در شکل ۹ انجام شده است.

در شکل ۱۰ به منظور مقایسه، طیف میدان به ازای سه توان خروجی مختلف نشان داده شده است. همانطور که دیده می شود با افزایش توان لیزر، قله مرکزی باریک می شود و دامنه قله های کناری کاهش می یابد. علت این امر این است که به ازای جریان های زیاد، گسیل برانگیخته کاملاً غالب است.

نوسانات کوانتومی مربوط به فرایند لیزش، هم بر روی شدت و هم بر روی فاز میدان نوری اثر می گذارد. تغییر فاز به اندازه  $\delta\phi(t)$  منجر به تغییر فرکانس به اندازه  $\delta\omega = d\delta\phi / dt$  می شود. در حقیقت پهنای خط لیزر، نمودی از نوسانات فاز است. نویز فاز یا فرکانس در ارزیابی کارایی سیستم های مخابرات نوری هم دوس نقش تعیین کننده ای دارد. دومکانیزم در نوسانات فاز دخالت دارند. اولاً، هرفوتونی که به طور خودبه خودی گسیل می شود فاز نوری را به اندازه مقداری تصادفی تغییر می دهد. ثانیاً، نوسانات جمعیت حامل ها نیز منجر به تغییر فاز می شود. از نظر فیزیکی این بدان علت است که تغییر  $N$  علاوه بر بهره نوری، برضریب شکست (یا عبارتی طول مسیر نوری) نیز اثر می گذارد و در نتیجه روی فاز مؤثر است [۱ و ۷]. همانطور که از رابطه (۵) مشخص است پارامتر  $\beta_3$  بیانگر تناسب بین تغییرات بهره و ضریب شکست است.

طیف نویز فرکانس (Frequency Noise Spectrum  $\equiv$  FNS) به صورت زیر تعریف می شود [۱۴]:

$$S_f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \delta\dot{\phi}(t) \delta\dot{\phi}(t+\tau) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau = \langle |\omega\delta\phi(\omega)|^2 \rangle \quad (40)$$

که در آن  $\delta\dot{\phi} = d\delta\phi / dt$  و  $\delta\phi(\omega)$  تبدیل فوریه  $\delta\phi(t)$  است. بنابراین مشابه آنچه که در مورد RIN بیان شد برای محاسبه  $S_f(\omega)$  از نتایج حل عددی، از رابطه ذیل استفاده می کنیم:

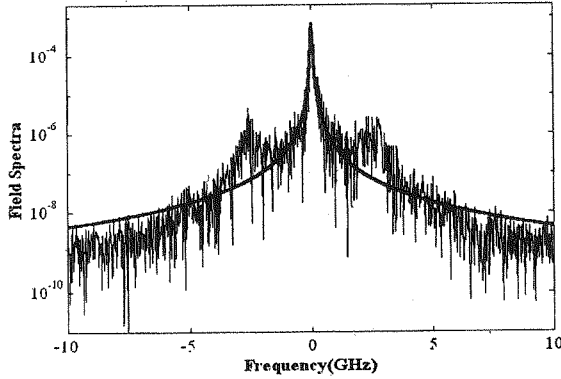
$$S_f(\omega) = \frac{\left| \sum_n \omega_n \delta\phi(t_n) e^{-i\omega_n t_n} \Delta \right|^2}{T} = \frac{\Delta^2 \omega_n^2}{T} |FFT(\delta\phi(t_n))|^2 \quad (41)$$

شکل ۸ طیف نویز فرکانس به دست آمده از نتایج حل عددی را به ازای سه توان خروجی مختلف نشان می دهد. طیف نویز فرکانس برای فرکانس های خیلی کوچکتر از فرکانس نوسانات واهلش، نسبتاً تخت است و در فرکانس نوسانات واهلش به بیشترین مقدار خود می رسد. رفتار کیفی به ازای توان های خروجی مختلف، همانند نویز شدت است که در شکل ۶ نشان داده شد. این رفتار هم از روش تحلیلی و هم به طور تجربی مشاهده شده است [۱۵ و ۱۶].

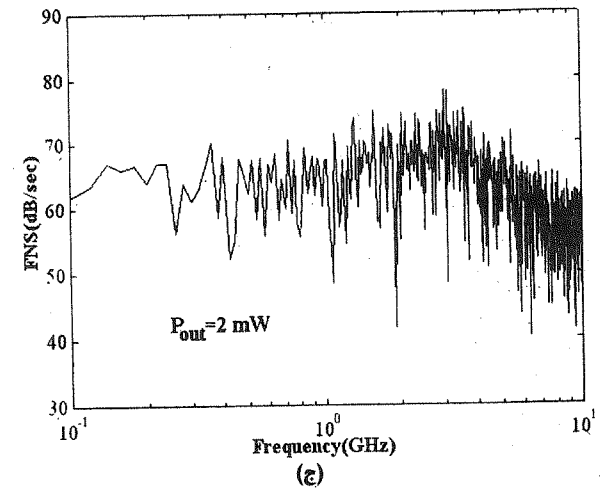
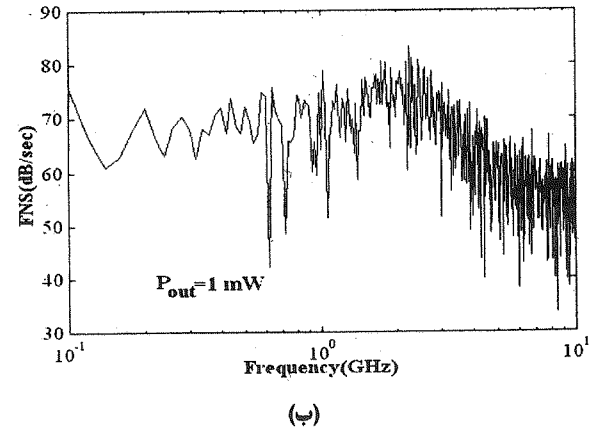
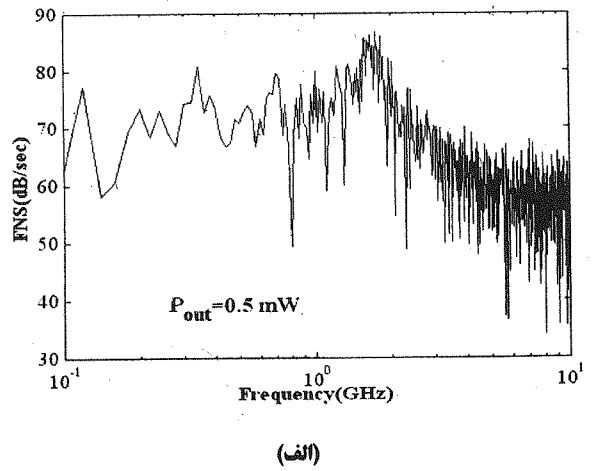
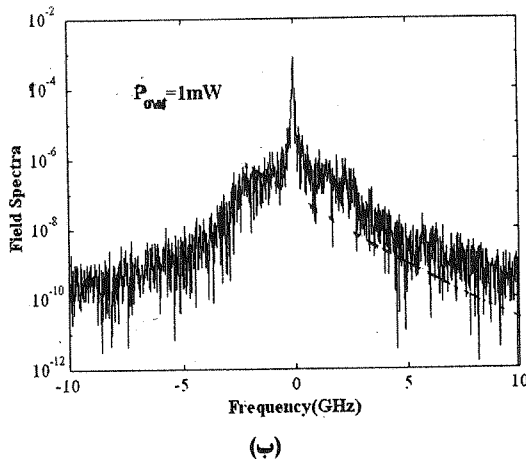
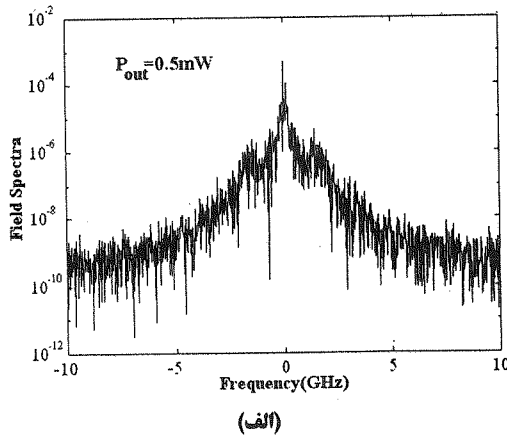
## ۶- شکل خط و پهنای خط

$$\Delta f = \frac{R_{sp}}{4\pi P} (1 + \beta_c^2) \quad (۲۵)$$

پهنای خط به دست آمده از شبیه سازی عددی توافق خوبی با پهنای خط به دست آمده از رابطه اخیر دارد. به عنوان نمونه به ازای جریان تزریقی ۱۳ میلی آمپر، پهنای خط به دست آمده از رابطه فوق برابر با ۶۵/۲MHz و از شبیه سازی عددی برابر با ۶۵/۱MHz است.



شکل (۹) طیف میدان یا شکل خط لیزر (ترسیم شده به مرکز صفر) به ازای جریان  $I=18\text{mA}$  برآزش به صورت لورنسی نیز در شکل نشان داده شده است.



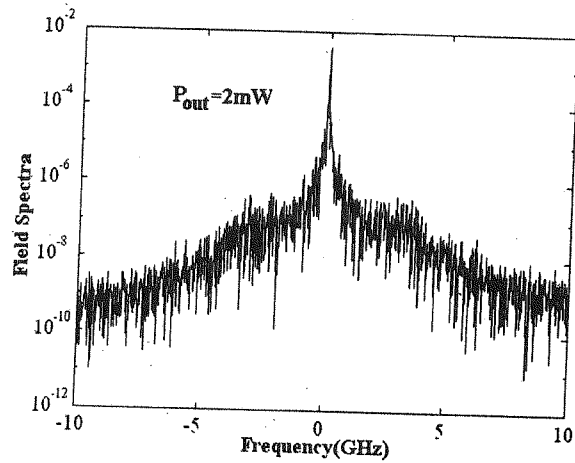
شکل (۸) طیف نویز فرکانس به ازای سه توان خروجی مختلف: (الف)  $P_{out}=0.5\text{mW}$  (ب)  $P_{out}=1\text{mW}$  و (ج)  $P_{out}=2\text{mW}$ .

پهنای خط، با پهنای کامل در نیم بیشینه (Full Width at Half Maximum  $\equiv$  FWHM) تعریف می شود. فرمول تصحیح شده شاولو-تاونز (Schawlow - Townes) برای پهنای خط لیزر نیم هادی به شکل زیر است [۱]:

به دست آمد. به طور خلاصه نویز شدت در مجاورت آستانه لیزر بیشترین مقدار را دارد و با افزایش جریان عملی در بالای آستانه، به سرعت کاهش می یابد.

طیف نویز شدت دارای قله ای در فرکانس نوسانات واهلش است. با افزایش جریان تزریقی یا توان خروجی لیزر مکان این قله به سمت فرکانس های بالاتر انتقال پیدا کرده، دامنه آن کاهش می یابد. نسبت سیگنال به نویز لیزر با افزایش توان لیزر بهبود می یابد و در نهایت به واسطه بهره غیر خطی اشباع می شود. به علاوه، نسبت سیگنال به نویز با افزایش نرخ گسیل خودبه خودی کاهش می یابد.

در پایان ملاحظه شد که نویز فاز موجب پهن شدن طیف میدان لیزر می شود. به بیان دیگر پهنای خط لیزر ناشی از نویز فاز است. طیف نویز فاز از نظر کیفی رفتاری شبیه به نویز شدت دارد و در فرکانس نوسانات واهلش، بیشینه می شود. با به دست آوردن طیف میدان دیده می شود که طیف از یک قله مرکزی غالب در فرکانس کارکرد لیزر و نیز قله های کناری که فاصله شان با قله مرکزی به اندازه فرکانس نوسانات واهلش است، تشکیل می شود. با افزایش توان لیزر، قله مرکزی باریک می شود و دامنه قله های کناری کاهش می یابد.



(ج)

شکل (۱۰) طیف میدان در سه توان خروجی مختلف:

$P_{out}=2mW$  (ج) و  $P_{out}=1mW$  (ب) ،  $P_{out}=0.5mW$

## ۸ نتیجه گیری

در این مقاله به منظور تجزیه و تحلیل رفتار لیزر نیمه هادی از نظر نویز، روشی عددی برای حل معادلات نرخ لنج وین ارائه شد و مشخصه های مختلف نویز از نتایج حل

## مراجع

- [1] G. P. Agrawal and N. K. Dutta, Semiconductor Lasers, 2nd ed., New York: Van Nostrand Reinhold, 1993.
- [2] K. Petermann, Laser Diode Modulation and Noise, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic, 1988.
- [3] L. A. Coldern and S. W. Corzine, Diode Lasers and Photonic Integrated Circuits, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [4] G. Gray and R. Roy, "Noise in Nearly-Single-Mode Semiconductor Lasers," Phys. Rev. A, vol. 40, pp. 2452-2562, 1989.
- [5] G. P. Agrawal, "Spectral Hole-Burning and Gain Saturation in Semiconductor Lasers: Strong Signal Theory," J. App. Phys., vol. 63, pp. 1232-1235, 1988.
- [6] G. P. Agrawal, "Effect of Gain and Index Nonlinearities on Single-Mode Dynamics in Semiconductor Lasers," IEEE J. Quantum Electron., vol. 26, pp. 1901-1909, 1990.
- [7] M. Fukuda, Optical Semiconductor Devices, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [8] R. L. Burden and J. D. Faires, Numerical Analysis, 6th ed., Brooks/Cole publishing Company, 1997.
- [9] G. P. Agrawal, "Power Spectrum of Directly Modulated Single-Mode Semiconductor Lasers: Chirp-Induced Fine Structure," IEEE J. Quantum Electron., vol. QE-21, pp. 680-686, 1985.
- [10] D. Marcuse, "Computer Simulation of Laser Photon Fluctuations: Theory of Single-Cavity Laser," IEEE J. Quantum Electron., vol. QE-20, pp. 1139-1148, 1984.
- [11] G. P. Agrawal, "Effect of Nonlinear Gain on Intensity Noise in Single-Mode Semiconductor Lasers," Electron. Lett., vol. 27, pp. 232-233, 1991.
- [12] Y. Yamamoto, S. Saito and T. Mukai, "AM and FM Quantum Noise in Semiconductor Lasers-Part II: Comparison of Theoretical and Experimental Results for AlGaAs Lasers," IEEE J. Quantum Electron., vol. QE-19, pp. 47-58, 1983.
- [13] A. Yariv, Optical Electronics, 4th ed., Ch. 10, Saunders College publishing, Philadelphia, 1991.
- [14] K. Vahala and A. Yariv, "Semiclassical Theory of Noise in Semiconductor Lasers-Part I," IEEE J. Quantum Electron., vol. QE-19, pp. 1096-1101, 1983.
- [15] K. Vahala and A. Yariv, "Semiclassical Theory of Noise in Semiconductor Lasers-Part II," IEEE J. Quantum Electron., vol. QE-19, pp. 1102-1109, 1983.
- [16] B. Daino, P. Spano, M. Tamburrini and S. Piazzolla, "Phase Noise and Spectral Line Shape in Semiconductor Lasers," IEEE J. Quantum Electron., vol. QE-19, pp. 266-270, 1983.
- [17] C. H. Henry, "Phase Noise in Semiconductor Lasers," J. Lightwave Technol., vol. LT-4, pp. 298-311, 1986.

[۱۸] محمد کاظم مروج فرشی، عباس ظریفکار و وحید احمدی، «تجزیه و تحلیل نویز شدت در لیزر نیمه هادی تک مد» مجموعه مقالات هشتمین کنفرانس مهندسی برقی ایران، ج. اول، صص. ۳۴-۴۲، ۱۳۷۸.