

تحلیل مرتبه دوم کشسان قابها با اعضای تحت اثر بارگذاری نامتقارن جانبی و بار محوری

علی سلامی
دانشجوی کارشناسی ارشد

فریدون ایرانی
دانشیار

گروه عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی

چکیده

در بیشتر قابهایی که مورد تحلیل و طراحی قرار می گیرند، علاوه بر نیروهای اعمالی برگره ها، بارهایی هم بر طول اعضای قاب اعمال می گردند. اکثر محققینی که مطالعاتی در زمینه تحلیلهای غیر خطی انجام داده اند، نیروها را به صورت گرهی در نظر می گیرند. در تحلیل مرتبه دوم، تنشهای ناشی از نیروها و لنگرهای گرهی را نمی توان به طور ساده با تنشهای ناشی از بارهایی که در طول اعضا توزیع شده اند، جمع نمود. در این مقاله با استفاده از اصل انرژی و روش اجزاء محدود جزئی پیشنهاد می شود که در روابط سختی و تری آن جزء اثرات غیر خطی بارهای جانبی که در طول المان به صورت نامتقارن توزیع شده اند، در نظر گرفته می شود. این امر باعث می گردد تا نتایج تحلیل غیر خطی به نتایج واقعی نزدیکتر شود. در انتها، با استفاده از جزء مذکور برنامه رایانه ای که براساس روش کنترل طول قوس است، چندین مثال مورد ارزیابی قرار می گیرد.

Second Order Elastic Analysis of Frames Under Axial and Nonsymmetrical Lateral Loads

F. Irani
Associate Professor

A. Salami
Graduate Student

School of Engineering, Civil Engineering Department,
Ferdowsi University

Abstract

It is well-known that the most of frames are under lateral loads along their members as well as nodal loads. But the majority of researchers who work on nonlinear analysis consider only nodal loads in their study. In second order analysis, the stress of nodal loads cannot simply be added to stress of lateral loads. In this paper by principle of energy and finite element method we present an element with its stiffness while non linearity effects of non symmetrical lateral loads are considered. Finally some numerical examples have been solved by prepared a computer program by using the above described element.

Keyword

Finite element, Second order analysis, Nonlinear

اجراء محدود، تحلیل مرتبه دوم، تحلیل غیرخطی.

مقدمه

تحلیل غیر خطی مرتبه دوم قابها توسط آیین نامه های پیشرفته ای همچون LRFD و آیین نامه استاندارد ۴۱۰۰ استرالیا (۱۹۹۰) مورد بررسی قرار گرفته اند.

یکی از روش های کارا و توانمند در مهندسی استفاده از اصل انرژی و روش اجزاء محدود است. علیرغم تحقیقات فراوانی که در زمینه تحلیل مرتبه دوم صورت گرفته است ولی به نظر می رسد هنوز جزء کاملاً مناسبی برای تحلیل مرتبه دوم قاب ها ارائه نشده است. پژوهشگران متعددی از جزء درجه سه مکعبی برای این منظور استفاده کرده اند. در جزء مذکور، هنگامی که نیروی محوری بزرگ باشد جواب های بدست آمده از تحلیل دارای خطای محسوسی است. به عنوان نمونه هنگامی که یک ستون دو سر مفصل توسط جزء درجه سه مورد تحلیل قرار می گیرد، بار کمانشی آن ۲۰٪ بیش از بار کمانشی واقعی ستون به دست می آید. بنابراین ضروری است از یک جزء مناسب تر برای تحلیل استفاده شود.

این جزء باید قادر به مدل کردن هر عضو بایک جزء باشد. زیرا تقسیم نمودن یک عضو به چند جزء باعث افزایش زمان محاسبات، افزایش داده های ورودی و مشکل نمودن تفسیر خروجی های تحلیل می شود.

و دیگر آن که ماتریس سختی جزء پیشنهادی برای هنگامی که نیروی محوری اعضاء کششی، فشاری یا صفر هستند، یکی باشد. به عبارت دیگر برای هر سه حالت نیروی محوری یک ماتریس جداگانه تعریف نشود.

بالاخره باید که تابع تغییر مکان جزء مذکور در محدوده غیر خطی، اثر متقابل بین نیروی محوری و لنگر خمشی را شامل شود. به عبارت دیگر تابع تغییر شکل جزء باید وابسته به نیروی محوری باشد.

ساده ترین جزء ای که در ارتباط با تحلیل مرتبه دوم قاب ها ارائه گردید و مورد استفاده بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است، جزء درجه سه هرمیت (Hermite) است. پژوهشگرانی همچون گالاگر و بار سوم در سال (۱۹۷۰)، میک و تان (۱۹۸۴)، چاو و کیتی پرنچی (۱۹۸۷)، ون و سوهندر (۱۹۹۱) از این جزء برای تشکیل روابط سختی استفاده کرده اند. در این روش برای رسیدن به نتایج بادقت مناسب، از چندین جزء برای مدل کردن یک عضو استفاده نمودند. همچنین در این رابطه چن (۱۹۹۱)، وایت و چن در سال (۱۹۹۳) نشان دادند، هنگامیکه نیروی محوری جزء دارای

مقدار بزرگی باشد نتایج نادرستی از تحلیل بدست می آید. در سال ۱۹۹۱ سو و چن یک ستون دو سر مفصل را توسط جزء درجه سه مورد تحلیل قرار دادند و به این نتیجه رسیدند که بار کمانشی آن ۲۰٪ بیش از بار کمانشی واقعی به دست می آید. در سال ۱۹۹۰ آتلی و کاندن جزء دیگری برای تحلیل مرتبه دوم پیشنهاد نمودند که نتایج خوبی ارائه می دهد. با این حال چنانچه بخواهیم یک عضو با نقص اولیه مورد بررسی قرار گیرد باید آن را به دو یا چند قسمت تقسیم نمود.

در سال ۱۹۹۱ کیتی پرنچی و برمانی روشی ارائه دادند که از کمترین جزء برای مدل کردن یک عضو استفاده می شود. همچنین آنها اثرات نیروی محوری و تغییر شکلهای بزرگ را در روابط جزء پیشنهادیشان در نظر گرفتند. در سال ۱۹۹۱ تلاشهایی توسط سو و چن برای اصلاح تابع تغییر مکان جزء تیر-ستون، انجام گرفت، آنها یک گره در وسط عضو در نظر گرفتند و اصلاحاتی روی جزء مورد نظرشان انجام دادند. یادآوری می شود که هر قدر تابع تغییر مکان پیشنهادی به تابع تغییر شکل واقعی جزء نزدیکتر باشد به همان نسبت دقت تحلیل افزایش می یابد. در سال ۱۹۹۳، الناشی و عزالدین از تابع تغییر مکان چند جمله ای درجه پنج برای ارائه جزء سختی مرتبه بالا استفاده نمودند.

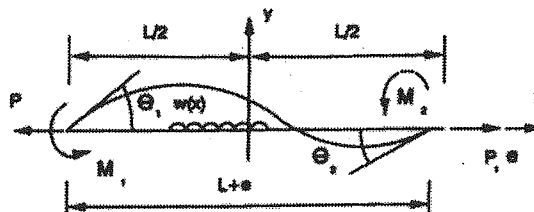
در سال ۱۹۹۴، چن و زو یک روش جدید برای فرمول بندی تعادلیشان که ارتباطی بین اثرات نیروی محوری و لنگر خمشی برقرار می کند، پیشنهاد کردند، آنها با استفاده از جزء مذکور، برای مثال های شناخته شده جوابهایی بادقت بالا به دست آوردند که نتایج بعلت بالایشان کمتر دچار واگرایی می شوند. اختلاف اصلی بین جزء پیشنهادی محققین فوق و دیگران در منظور نمودن نیروی محوری در تابع تغییر مکان جزء می باشد. در سال ۱۹۹۵، همان پژوهشگران چن و زو جزء جدید دیگری ارائه نمودند. این جزء علاوه بر فرضیات قبلی، اثرات ناشی از نقص اولیه عضو را هم در نظر می گیرد. در این جزء فرض می شود که تابع نقص اولیه عضو به صورت سهمی است. در سال ۱۹۹۶، محققین فوق جزء دیگری پیشنهاد نمودند که در آن اثرات غیر خطی ناشی از بارهای گسترده یا متمرکز را در نظر می گیرد، دانستنی است که این بارها به صورت متقارن و عمود بر محور طولی عضو هستند. مزیت این جزء مانند حالتی قبل در دقت بالای نتایج تحلیل است. تابع تغییر شکل جزء مذکور برای هر سه حالتی که نیروی محوری صفر یا فشاری یا کششی باشد صدق می کند.

فرضیات

- فرضیات در نظر گرفته شده برای جزء پیشنهادی به شرح زیر است.
- ۱- اعضاء منشوریند و مقاطع در دو جهت متقارن هستند.
 - ۲- رفتار مواد در طول مدت بارگذاری به صورت کشسان خطی است.
 - ۳- از تغییر شکلهای برشی و تابیدگی صرف نظر می شود.
 - ۴- رابطه بین کرنش و تغییر مکان به صورت غیر خطی است.
 - ۵- بارگذاری در جهت عرضی و نامتقارن می باشد.

تابع تغییر مکان

تابع چند جمله ای تغییر شکلهای محوری و عرضی انتخاب شده برای جزء پیشنهادی شکل «۱» در حالت کلی به صورت زیر است.



شکل (۱) نیروها و درجات آزادی جزء پیشنهادی در سیستم مختصات محلی

$$EIv''_0 = Pv_0 - \frac{M_1 - M_2}{2} + M_{0y} \quad (۶)$$

v_0 : تغییر مکان جانبی در وسط جزء M_{0y} : لنگر بارهای جانبی در وسط جزء

معادله دیگری که در وسط جزء می توان نوشت، رابطه برش است و از رابطه زیر حاصل می شود:

$$EIv'''_0 = Pv'_0 + \frac{M_1 + M_2}{L} + v_{0y} \quad (۷)$$

v_{0y} : برش بارهای جانبی در وسط جزء

رابطه تغییر شکل محوری با استفاده از شرایط مرزی رابطه (۳) به صورت زیر به دست می آید:

$$u = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2x}{L} \right) e = N_u e \quad (۸)$$

N_u : تابع شکل محوری است.

ضرایب ثابت b_i در رابطه کلی تغییر شکل جانبی (۲) با استفاده از روابط شرایط مرز، (۴) و (۵) و روابط دیفرانسیلی لنگر و برش، به دست می آیند و این تابع در نهایت به صورت زیر نوشته می شود:

$$v = N_1(L\theta_1) + N_2(L\theta_2) + N_W(L\bar{M}_0) + N_V(L\bar{V}_0) \quad (۹)$$

در رابطه فوق، N_1 و N_2 توابع شکل لنگر و برش ناشی از بارهای جانبی هستند و به صورت زیر بیان می شود.

$$N_1 = \frac{A}{H_1} + \frac{B}{H_2} \quad (۱۰)$$

$$N_2 = \frac{A}{H_1} - \frac{B}{H_2} \quad (۱۱)$$

$$A = -20 \left(\frac{X}{L} \right) + (80 - q) \left(\frac{X}{L} \right)^3 + 4q \left(\frac{X}{L} \right)^5 \quad (۱۲)$$

$$B = 6 - (48 - q) \left(\frac{X}{L} \right)^2 - 2q \left(\frac{X}{L} \right)^4 \quad (۱۳)$$

در رابطه (۹)، N_W و N_V به ترتیب توابع شکل لنگر و برش ناشی از بارهای جانبی است و به صورت زیر بیان می شود.

$$u = a_0 + a_1 x \quad (۱)$$

$$v = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 \quad (۲)$$

برای به دست آوردن ضرایب ثابت a و b در روابط فوق از شرایط مرزی دو انتهای جزء و روابط تعادل لنگر و برش در وسط جزء استفاده می شود. شرایط مرزی در دو انتهای جزء به شرح زیر است.

$$u(-L/2) = 0, \quad u(L/2) = e \quad (۳- الف و ب)$$

$$v(-L/2) = 0, \quad v(L/2) = 0 \quad (۴- الف و ب)$$

$$v'(-L/2) = \theta_1, \quad v'(L/2) = \theta_2 \quad (۵- الف و ب)$$

در روابط فوق علامت (') نشان دهنده مشتق نسبت به x است.

رابطه لنگر در وسط جزء مزبور از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$V_W + V_V = N_W (L \bar{M}_0) + N_V (L \bar{V}_0) \quad (22)$$

مشاهده می شود که تغییر مکانهای خطی از حل معادلات تعادل بدون جمله مرتبه دوم حاصل می شود، بطوری که این تابع تغییر مکان، مشابه تابع جزء درجه سه (Hermite) است. جمله های غیر خطی تغییر مکان - رابطه (21) - توسط نیروی محوری ایجاد می شود. هنگامی که مقدار نیروی محوری صفر باشد، این تغییر مکان حذف می شود.

ماتریس سختی وتری

با استفاده از اصل انرژی پتانسیل کل می توان روابط سختی و تری را به دست آورد. تابع انرژی پتانسیل کل برای جزء پیشنهادی به صورت زیر بیان می شود.

$$\Pi = U - W_f - W_w \quad (23)$$

رابطه انرژی کرنشی در حالت کلی به صورت زیر است.

$$U = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} EA \left(u' + \frac{V'^2}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} EI v''^2 dx \quad (24)$$

چنانچه رابطه فوق بسط داده شود، از عبارت $\frac{V'^4}{4}$

به علت کوچک بودن نسبت به جملات دیگر می توان صرف نظر نمود، بنابراین رابطه (24) به صورت زیر نوشته می شود،

$$U = \frac{EA}{2} \int_{-L/2}^{L/2} (u'^2 + u'v'^2) dx + \frac{EI}{2} \int_{-L/2}^{L/2} v''^2 dx \quad (25)$$

روابط انرژی بارهای گرمی و گسترده برای جزء مذکور به صورت زیر تعریف می شود.

$$W_f = P_e + M_1 \theta_1 + M_2 \theta_2 \quad (26)$$

$$W_w = \int_{-L/2}^{L/2} w(x) v dx \quad (27)$$

با استفاده از روابط «24» و «25» و انجام محاسبات ریاضی، رابطه نهایی انرژی کرنشی ذخیره ای به صورت زیر نوشته می شود:

$$N_W = -\frac{1}{H_2} \left[1 - 8 \left(\frac{X}{L} \right)^2 + 16 \left(\frac{X}{L} \right)^4 \right] \quad (14)$$

$$N_V = -\frac{1}{H_2} \left[\left(\frac{X}{L} \right) - 8 \left(\frac{X}{L} \right)^3 + 16 \left(\frac{X}{L} \right)^5 \right] \quad (15)$$

در روابط فوق پارامترهای بدون بعد به صورت زیر تعریف می شوند.

$$q = \frac{PL^2}{EI} \quad (16)$$

$$H_1 = 80 + q, \quad H_2 = 48 + q \quad (17 \text{ الف و ب})$$

$$\bar{M}_0 = \frac{M_{0y}L}{EI}, \quad \bar{V}_0 = \frac{V_{0y}L^2}{EI} \quad (18 \text{ الف و ب})$$

همانطور که ملاحظه می شود توابع شکل فوق، علاوه بر متغیر x به نیروی محوری P وابسته اند، برای نشان دادن اثر نیروی محوری روی سختیهای جانبی خطی و غیر خطی، تابع تغییر مکان - رابطه (19) - به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$V = (V_L) + (V_N) + (V_W + V_V) \quad (19)$$

در رابطه فوق، تغییر مکان خطی V_L براساس فرضیات خطی به دست می آید و به قرار زیر است:

$$V_L = \left[\frac{1}{8} \left(1 - \frac{2X}{L} \right) \left(1 - \frac{4X^2}{L^2} \right) \right] (L \theta_1) + \left[-\frac{1}{8} \left(1 + \frac{2X}{L} \right) \left(1 - \frac{4X^2}{L^2} \right) \right] (L \theta_2) \quad (20)$$

تغییر مکان غیر خطی V_N وابسته به نیروی محوری بوده و به صورت زیر به دست می آید:

$$V_N = \left[\frac{q}{8} \left(1 - \frac{4X^2}{L^2} \right)^2 \left(\frac{2X}{LH_1} - \frac{1}{H_2} \right) \right] (L \theta_1) + \left[\frac{q}{8} \left(1 - \frac{4X^2}{L^2} \right)^2 \left(\frac{2X}{LH_1} - \frac{1}{H_2} \right) \right] (L \theta_2) \quad (21)$$

تغییر مکان (V_W) و (V_V) وابسته به بارهای جانبی بوده و به صورت زیر بیان می شود:

رابطه بین کوتاه شدگی محوری و نیروی محوری با صرف نظر کردن از اثر خمش، به صورت زیر است:

$$e = \frac{PL}{EA} \quad (33)$$

با استفاده از رابطه فوق، می توان نوشت:

$$q = \frac{AL}{l} e \quad (34)$$

مشقتات پارامتر بدون بعد q نسبت به درجات آزادی به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{\partial q}{\partial \theta_1} = \frac{\partial q}{\partial \theta_2} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{\partial q}{\partial e} = \frac{AL}{l} \quad (36)$$

روابط نهایی ماتریس سختی پس از انجام محاسبات طولانی، به صورت زیر بدست می آید:

$$M_1 + M_1^{EQV} = \frac{EI}{L} [C_1(\theta_1 + \theta_2) + C_2(\theta_1 - \theta_2) + C_w \bar{M}_0 + C_v \bar{V}_0] \quad (37)$$

$$M_2 + M_2^{EQV} = \frac{EI}{L} [C_1(\theta_1 + \theta_2) + C_2(\theta_1 - \theta_2) + \bar{C}_w \bar{M}_0 + C_v \bar{V}_0] \quad (38)$$

$$P + P^{EQV} = EA \left[\frac{e}{L} + b_1(\theta_1 + \theta_2)^2 + b_2(\theta_1 - \theta_2)^2 + b_s(\theta_1 - \theta_2) \right. \quad (39)$$

$$\left. \bar{M}_0 + b_u(\theta_1 + \theta_2)\bar{V}_0 + b_w \bar{M}_0^2 + b_v \bar{V}_0^2 \right] \quad (39)$$

در رابط فوق، بالانویس EQV لنگر یا نیروی محوری خطی است و به صورت زیر بیان

$$M_1^{EQV} = - \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial v}{\partial \theta_1} \frac{L}{L} W(X) dx \text{ می شوند.}$$

ضرایب $c_w, c_v, b_u, b_w, b_s, b_1, b_2$ در روابط (37) الی (39) ناشی از بارهای جانبی و دوران گرهی هستند. این ضرایب ارتباط بین بارهای جانبی و سختی جزء را نشان می دهند. در صورتیکه در روابط سختی و تری جزء درجه

$$U = \frac{EAe^2}{2L} + \frac{EI}{L}$$

$$\left[\frac{1}{H_1^2} \left(9600 + 400q + \frac{61}{14}q^2 + \frac{23}{2520}q^3 \right) (\theta_1 + \theta_2)^2 \right]$$

$$+ \left[\frac{1}{H_2^2} \left(1152 + 144q + \frac{29}{10}q^2 + \frac{11}{840}q^3 \right) (\theta_1 - \theta_2)^2 \right] +$$

$$\left[\frac{8q^2 \bar{M}_0}{105H_2^2} (\theta_1 - \theta_2) \right] + \left[\frac{4q^2 \bar{V}_0}{315H_1^2} (\theta_1 + \theta_2) \right] +$$

$$\left[\left(\frac{512}{5} + \frac{256}{105}q \right) \frac{\bar{M}_0^2}{H_2^2} \right] + \left[\left(\frac{128}{7} + \frac{64}{315}q \right) \frac{\bar{V}_0^2}{H_1^2} \right] \quad (28)$$

همانطور که قبلاً اشاره شد تغییر مکان جانبی V از سه قسمت خطی و غیر خطی و بارهای جانبی تشکیل شده است. لذا انرژی حاصل از بارهای جانبی رامی توان به صورت زیر تفکیک نمود.

$$W_w = \int_{-1/2}^{1/2} W(X)V_L dx + \int_{-1/2}^{1/2} w(x)v_N dx +$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} W(x)v_w dx + \int_{-1/2}^{1/2} W(x)v_v dx \quad (29)$$

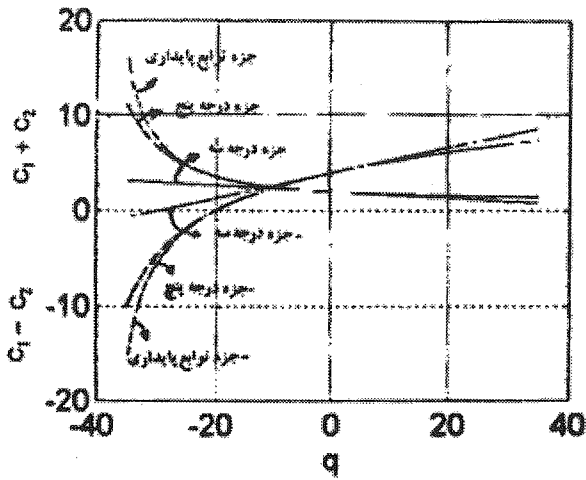
$$W_w = (W_{wL}) + (W_{wN}) + (W_{ww} + W_{wv}) \quad (30)$$

مقدار کار انجام شده توسط بارگذاری خارجی به توزیع بار $W(X)$ روی عضو بستگی دارد. لذا برای این منظور دو حالت کلی بارگذاری گسترده خطی و نیروی متمرکز در نظر گرفته می شود.

برای به دست آوردن روابط سختی و تری، از کمینه کردن تابع انرژی پتانسیل کل استفاده می شود. برای این منظور باید مشتق جزئی تابع انرژی پتانسیل کل برابر صفر گردد لذا خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \pi}{\partial d_i} + \frac{\partial \pi}{\partial q} \frac{\partial \theta}{\partial d_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (31)$$

$$d_1 = \theta_1, \quad d_2 = \theta_2, \quad d_3 = e \quad (32)$$



شکل (۲) تغییرات ضرایب سختی C_1 و C_2 در مقابل نیروی محوری.

شایان ذکر است که بارهای گرهی معادل ناشی از بارهای جانبی روی عضو باید به بردار نیروهای گرهی افزوده شود این بارهای گرهی معادل از روابط (۴۰) الی (۴۲) به دست می آید. بنابراین مقادیر نیروی F_i و درجات آزادی d_i برای جزء مذکور به صورت زیر تعریف می شود:

$$F_1 = M_1 + M_1^{EQV}, \quad F_2 = M_2 + M_2^{EQV}, \quad F_3 = P \quad (48)$$

$$d_1 = \theta_1, \quad d_2 = \theta_2, \quad d_3 = e \quad (49)$$

اکنون با استفاده از رابطه (۲۹) بخش پیشین، پارامتر بدون بعد q را می توان به صورت زیر نتیجه گرفت:

$$q = \lambda_2 \left[\frac{e}{L} + b_1(\theta_1 + \theta_2)^2 + b_2(\theta_1 - \theta_2)^2 + b_s(\theta_1 - \theta_2) \right]$$

$$\left[\bar{M}_0 + b_u(\theta_1 + \theta_2) \bar{V}_0 + b_w \bar{M}_0^2 + b_v \bar{V}_0^2 \right] \quad (50)$$

$$\lambda = \frac{AL^2}{I} \quad (51)$$

قبل از ارائه روابط بعدی، لازم به ذکر است که بین مشتقات ضرایب روابط زیر قرار است:

$$C_1' = 2b_1, \quad C_2' = 2b_2 \quad (52)$$

$$C_w' = b_s, \quad C_v' = b_u \quad (53)$$

سه، این ارتباط در نظر گرفته نشده است. شایان ذکر است که در روش تحلیل غیر خطی می توان مانند روش خطی از اصل روی هم گواری برای جمع نمودن لنگرهای ناشی از بارهای جانبی سود جست.

$$\dot{M}_1^{EQV} = - \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial v}{\partial \theta_1} \frac{\partial v}{\partial x} W(X) dx \quad (40)$$

$$M_2^{EQV} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial v}{\partial \theta_2} \frac{\partial v}{\partial x} W(X) dx \quad (41)$$

$$P^{EQV} = 0 \quad (42)$$

در روابط (۴۰) الی (۴۲) ضرایب وابسته به لنگرها و دورانهای انتهایی بوده و b_1 و b_2 ضرایب وابسته به نیروی محوری و دورانهای انتهایی است که به صورت زیر بدست می آیند:

$$C_1 = \frac{1}{H_1^2} \left[19200 + 800q + \frac{61}{7} q^2 + \frac{23}{1260} q^3 \right] \quad (43)$$

$$C_2 = \frac{1}{H_2^2} \left[2304 + 288q + \frac{29}{5} q^2 + \frac{11}{420} q^3 \right] \quad (44)$$

$$b_1 = \frac{1}{H_1^3} \left[12800 + \frac{2080}{7} q + \frac{46}{21} q^2 + \frac{23}{2520} q^3 \right] \quad (45)$$

$$b_2 = \frac{1}{H_2^3} \left[4608 + \frac{672}{5} q + \frac{66}{35} q^2 + \frac{11}{840} q^3 \right] \quad (46)$$

تغییرات ضرایب سختی روش ارائه شده و جزء درجه سه هرمیت و روش دقیق در مقابل (q) در شکل زیر نشان داده شده است.

ماتریس سختی مماسی

ماتریس سختی مماسی بین بار نموی وارد بر سازه و تغییر شکل های نموی ایجاد شده رابطه برقرار می کند. برای تشکیل در آیه های ماتریس سختی مماسی، باید از معادلات حاکم وابسته به ماتریس سختی و تری نسبت به درجات آزادی، مشتق جزئی گرفته شود. در حالت کلی در آیه های ماتریس سختی مماسی از رابطه زیر به دست می آید.

$$K_{ij} = \frac{\partial F_i^T}{\partial u_j} + \frac{\partial F_i^T}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial u_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (47)$$

مشتقات پارامتر بدون بعد q نسبت به درجات آزادی جزء به صورت زیر است:

$$\frac{\partial q}{\partial \theta_1} = \frac{G_1}{H} \quad (54)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \theta_2} = \frac{G_2}{H} \quad (55)$$

$$\frac{\partial q}{\partial e} = \frac{1}{LH} \quad (56)$$

در روابط فوق، ضرایب G_1, H, G_2 به صورت زیر به دست می آیند.

$$H = \frac{1}{\lambda^2} - b'_1 (\theta_1 + \theta_2)^2 - b'_2 (\theta_1 - \theta_2)^2 - b'_s (\theta_1 - \theta_2) \bar{M}_0 - b'_u (\theta_1 + \theta_2) \bar{V}_0 - b'_w \bar{M}_0^2 - b'_v \bar{V}_0^2 \quad (57)$$

$$G_1 = 2b_1 (\theta_1 + \theta_2) + 2b_2 (\theta_1 - \theta_2) + b_s \bar{M}_0 + b_u \bar{V}_0 \quad (58)$$

$$G_2 = 2b_1 (\theta_1 + \theta_2) - 2b_2 (\theta_1 - \theta_2) - b_s \bar{M}_0 - b_u \bar{V}_0 \quad (59)$$

در رابطه (57) علامت (') نشان دهنده مشتق نسبت به q است. در آیه های ماتریس سختی مماسی بعد از مشتق گیری از روابط سختی وتری مطابق رابطه (47) - در نهایت به صورت زیر به دست می آیند.

$$[{}^c K] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} C_1 + C_2 + \frac{G_1^2}{H} & C_1 - C_2 + \frac{G_1 + G_2}{H} & \frac{G_1}{H} \\ C_1 - C_2 + \frac{G_1 + G_2}{H} & C_1 + C_2 + \frac{G_1 G_2}{H} & \frac{G_2}{LH} \\ \text{Symmetric} & & \frac{1}{L^2 H} \end{bmatrix} \quad (60)$$

ماتریس سختی مماسی فوق برای محورهای محلی جزء به دست آمده است. به منظور اینکه بتوان ماتریسهای سختی اعضای یک قاب را با هم ترکیب نمود، لازم است که این ماتریسها در محورهای کلی نوشته شود. برای تبدیل نمودن ماتریس سختی مماسی از سیستم محورهای محلی به سیستم محورهای کلی باید از ماتریسهای تبدیل استفاده کرد.

براین اساس Oran در سال (1973) ماتریسهای تبدیل در سیستم مختصات اولرین را برای فضای دو بعدی ارائه نمود. روابط وی براساس تغییر شکلهای بزرگ با کرنشهای کوچک بوده و با استفاده از توابع پایداری، اثر تیر-ستون را مدل نمود. Oran در فضای سه بعدی چرخشها را با توجه به کوچک بودن مقدارشان به عنوان بردار در نظر گرفت.

ماتریس سختی مماسی یک المان در سیستم مختصات کلی از رابطه نهایی به دست می آید: [02]

$$[{}^g K] = [L] [T]^T [{}^c K] [T] + [N] [L]^T \quad (61)$$

[L]: ماتریس تبدیل از سیستم مختصات محلی به کلی
[T]: ماتریس تبدیل شش نیروی اصلی به دوازده نیروی انتهایی جزء
[N]: ماتریس کار صورت گرفته توسط نیروها و تغییر شکلهای جزء

روش کنترل طول قوس

یکی از روشهای کارا برای تحلیل غیر خطی قابها استفاده از روش کنترل طول قوس است. محققین روشهای تحلیل غیر خطی تحقیقات وسیعی انجام داده اند و روشهای مختلفی همچون روش طول قوس استوانه ای، روش طول قوس کروی و روش صفحه قائم و... را پیشنهاد نموده اند. در ادامه این بخش روابط کلی روش کنترل طول قوس ارائه می گردد.

در این روش، مقدار ضریب نمودار به عنوان یک متغیر مجهول در نظر گرفته می شود. برای به دست آوردن ضریب نمودار علاوه بر رابطه کلی (62)، از رابطه اضافی دیگری که مربوط به طول قوس است استفاده می شود. با حل همزمان این دو رابطه متغیرهای مجهول ΔD_i و λ به دست می آیند. مانند روش کنترل تغییر مکان، برای اجتناب از نامتقارن بودن ماتریس سختی از روابط (63- الف و ب) استفاده می شود.

$$K_i^{-1} \Delta D_i = \lambda F + Q \quad (62)$$

$$K_i^{-1} \Delta D_i = F \quad (63- الف)$$

$$K_i^{-1} \Delta D_i = Q \quad (63- ب)$$

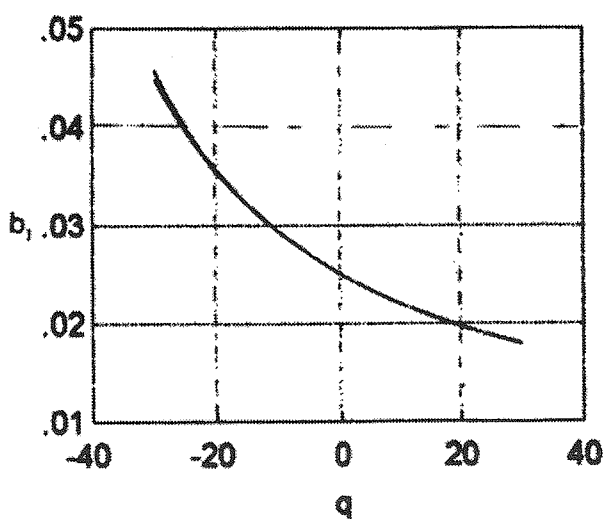
در روابط فوق ΔD_i و ΔD_i^0 به ترتیب نمو تغییر مکان مربوط به نیروی خارجی F و نیروهای نامیزان Q است. برای تعیین ضریب نمودار برای اولین تکرار در گام n ام

تحلیلهای تکراری عمود بر مماسی گذرنده از نقطه تعادلی پیشین است شکل (۴) متعاقب آن ضرب داخلی این دو بردار معادل صفر است. در نتیجه رابطه زیر را می توان نوشت:

$$\lambda_i^1 \lambda_i^j + \{\Delta D_i^1\}^T \{\Delta D_i^j\} = 0 \quad (66)$$

در نهایت رابطه ضریب نمو بار برای تکرارهای (z>2) از رابطه زیر بدست می آید:

$$\lambda_i^j = - \frac{\{\Delta D_i^1\}^T \{\Delta D_i^j\}}{1 + \{\Delta D_i^1\}^T \{\Delta D_i^j\}} \quad (67)$$



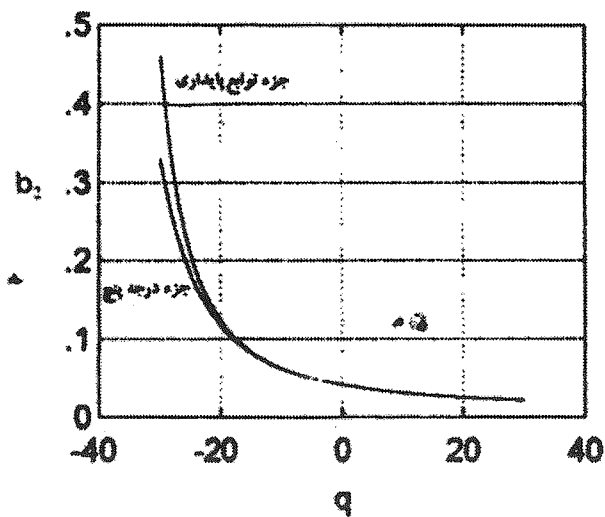
نمو بار از رابطه هندسی طول قوس که به صورت زیر است استفاده می گردد.

$$ds^2 = (\lambda_i^1)^2 + \{\Delta D_i^1\}^T \{\Delta D_i^1\} \quad (64)$$

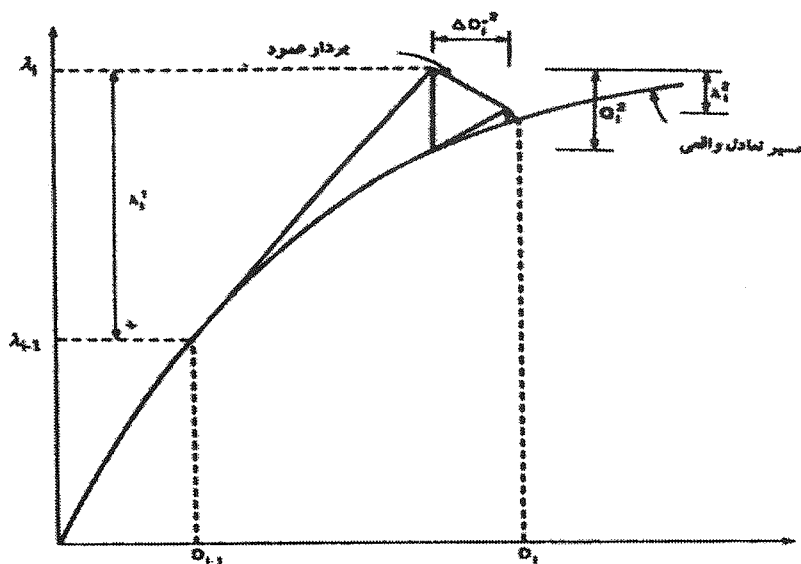
مقدار ضریب بار برای اولین تکرار با توجه به رابطه (۶۴) به صورت زیر است:

$$\lambda_i^1 = \sqrt{\frac{ds^2}{1 + \{\Delta D_i^1\}^T \{\Delta D_i^1\}}} \quad (65)$$

در روش مزبور، فرض براین است که مکان هندسی نتایج



شکل (۳) تغییرات ضرایب سختی b_1 و b_2 در مقابل نیروی محوری.



شکل (۴) روش کنترل طول قوس.

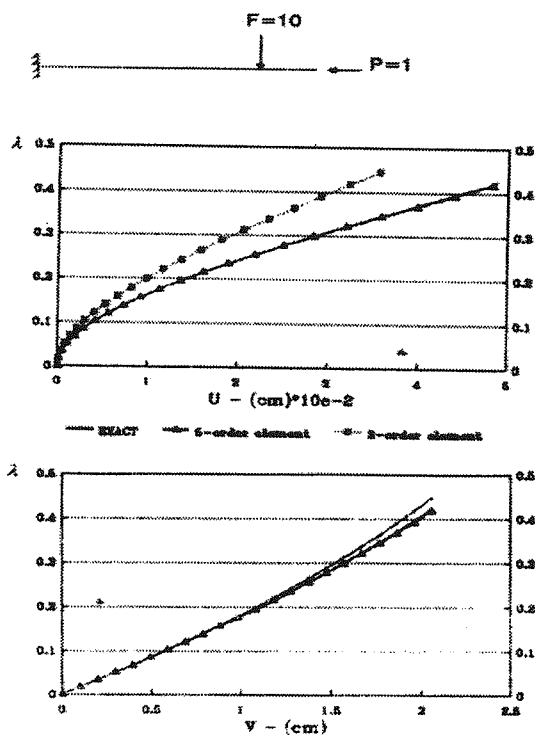
$$E = 100K \text{ g/cm}^2 \quad L = 100\text{cm} \quad A = 1\text{cm}^2 \quad I = 0.8333\text{cm}^4$$

(به جدول مراجعه شود)

۲- تیر ستون شکل زیر که تحت بار متمرکز 10(Kg) به فاصله 40(cm) از تکیه گاه و تحت نیروی فشاری 1(kg) است در نظر بگیرید. مطلوب است رسم نمودار بکار - تغییر مکان برای دو حالت زیر:

الف) تغییر مکان جانبی، ب) تغییر مکان محوری
مشخصات هندسی

$$E = 100000K\text{g/cm}^2 \quad L = 50\text{cm} \quad A = 1\text{cm}^2 \quad I = 0.5\text{cm}^4$$



شکل (۵)

۳- قاب متقارن (Toge) شکل زیر که تحت نیروی متمرکز 50(kg) قرار دارد در نظر بگیرید. مطلوب است رسم نمودار بار تغییر مکان جانبی:
مشخصات هندسی اعضاء به قرار زیر است.

$$E = 100000\text{kg/cm}^2 \quad A = 3.1\text{cm}^2 \quad I = 0.1\text{cm}^4$$

در این مقاله با استفاده از مفاهیم انرژی و روش اجزاء محدود از جزء ای با تابع تغییر شکل چند جمله ای درجه پنج استفاده گردیده است. در این تابع برای به دست آوردن ضرایب چند جمله ای علاوه بر شرایط مرزی دو انتهای جزء از دو رابطه لنگر و برش در وسط جزء نیز استفاده می گردد. این امر باعث می شود که تابع شکل جزء مذکور علاوه بر متغیر X به نیروی محوری P وابسته باشد و در نتیجه تابع از دو قسمت جملات خطی و غیر خطی تشکیل شده است. جملات غیر خطی این تابع به نیروی محوری وابسته بوده و جملات خطی آن همان جملات تابع چند جمله ای درجه سه بوده که با نیروی محوری وابسته نیست. لذا تابع مذکور در محدوده غیر خطی، اثرات متقابل نیروی محوری و لنگر خمشی را در نظر میگیرد. این موضوع باعث می شود که منحنی ضرایب سختی C_1, C_2, b_1, b_2 و مقابل نیروی محوری برای جزء پیشنهادی تطابق خوبی با جزء توابع پایداری داشته باشد در صورتی که برای جزء درجه سه هنگامی که نیروی محوری فشاری افزایش یابد منحنی دارای خطای نسبتاً زیادی نسبت به جزء توابع پایداری دارد. (شکلهای (۲) و (۳) را ببینید).

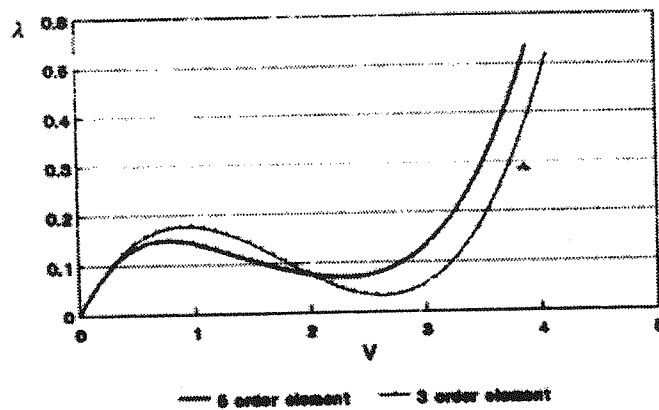
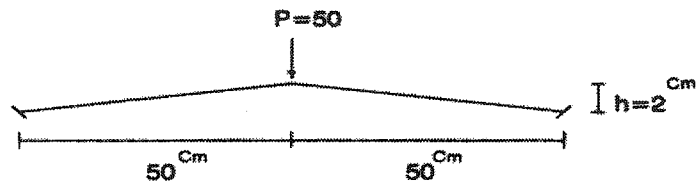
خصوصیت دیگر تابع چند جمله ای پیشنهادی این است که اثرات غیر خطی بارهای میانی که به صورت نامتقارن در طول دهانه عضو توزیع شده اند در روابط سختی جزء در نظر گرفته می شود. با مطالعه روابط سختی مشاهده می شود که با افزایش مقدار بارهای میانی اثرات غیر خطی بارها افزایش می یابد. قابل ذکر است که از این جزء پیشنهادی می توان برای قابهای لاغر و انعطاف پذیر با نیروی محوری زیاد استفاده نمود و محدودیتی در این رابطه وجود ندارد. در انتها چندین مثال برای هر یک از جزءها ارائه شده است و دقت هر یک از آنها در این مثالها نشان داده شده است. با مطالعه این مثالها مشاهده می شود که جزء درجه پنج پیشنهادی نسبت به جزء درجه سه جوابهای قابل قبولی ارائه می دهد و خطای آن نسبت به روابط روش تیر- ستون ناچیز است.

مثالها

۱- ستون منفردی که تحت اثر بار محوری فشاری است در نظر بگیرید. بار کمانشی این ستون را تحت شرایط مرزی زیر به دست آورید: (لازم به ذکر است که در تمامی مثالها واحدها بر حسب کیلو گرم و سانتیمتر است)
الف) مفصل - مفصل، ب) گیردار - مفصل، ج) گیردار - گیردار، د) گیردار - آزاد
مشخصات هندسی ستون

حل تحلیل	خطا %	جزء پیشنهادی	خطا %	جزء درجه سه	تعداد تکرار	شرایط مرزی
الف	۸/۲۲۲	۰/۲۲	۸/۲۲۲	۲۱/۶	۱	۹/۹۹۹
		۰/۰۲	۸/۲۲۶	۰/۸	۲	۸/۲۸۶
		۰/۰۰	۸/۲۲۴	۰/۱	۴	۸/۲۲۸
		۰/۰۰	۸/۲۲۴	۰/۰۰	۸	۸/۲۲۴
ب	۱۶/۸۲۲	۱/۰	۱۶/۹۹۵	۴۸/۶	۱	۲۲/۹۹۹
		۰/۳۲	۱۶/۸۳۳	۲/۶	۲	۱۷/۲۵۶
		۰/۰۰	۱۶/۸۲۷	۰/۲	۴	۱۶/۸۵۹
		۰/۰۰	۱۶/۸۲۵	۰/۰۰	۸	۱۶/۸۲۷
ج	۳۲/۸۹۷	—	—	—	۱	—
		۱/۳	۳۲/۳۳۲	۱/۳	۲	۳۲/۳۳۲
		۰/۰۱	۳۲/۹۰۱	۰/۸	۴	۳۲/۱۲۵
		۰/۰۰	۳۲/۸۹۷	۰/۱	۸	۳۲/۹۱۲
د	۲/۰۵۶	۰/۰۹	۲/۰۵۷	۰/۸	۱	۲/۰۷۲
		۰/۰۰	۲/۰۵۶	۰/۰۰	۲	۲/۰۵۶

جدول مثال (۱)



شکل (۶)

- [1] Batoz, J. L and Dhatt, G "Incremental displacement algorithms for nonlinear problems" International Journal for Numerical Methods in Engineering , 14: pp 1262-1266(1979)
- [2] Chan, S. L. "Geometric and Material nonlinear analysis of beam - columns and frames using the minimum residual displacement method" International Journal For Numerical Methods in Engineering , 29, pp 2657 - 2669 (1988).
- [3] Chan, S.L. and Zhou, Z. H "A pointwise equilibrium polynomial (PEP) element for nonlinear analysis of frame" journal of Structural Engineering , ASCE, 120(6): pp 1703-1717(1994)
- [4] Chan, S.L. and Zhou, Z. H "Refined Second - order analysis of frame with members under lateral and axial loads" Journal of Structural Engineering, ASCE, 122(5): pp 548-554 (1996).
- [5] Crisfield , M. A "An arc - length method including line searches and accelerations "International Journal For Numerical Methods in Engineering , 19: pp 1269-1289 (1983).
- [6] Lui, E. M and Chen , W.F "Stability design of steel frame": pp 145-157 (1991).
- [7] Lui, E.M and Chen , W.F "Stability design of steel frame" , pp 184-189 (1991)
- [8] Oran, C "Tangent stiffness in plane frame" Journal of Structural Div, ASCE, 89(4): pp 557 - 579 (1973)
- [9] Oran , C "Tangent stiffness in space frames" Journal of Structural Div, ASCE, 99(6) : pp 825-842 (1973)
- [10] Timoshenko, S.p. and Gere, J.M. "Theory of elastic stability" . 2nd Ed McGraw - Hill Book Co, New York, N.Y (1961)
- [11] Zienkiewicz, O.C. "Incremental displacement in nonlinear analysis" International Journal for Numerical Methods in Engineering , pp 587- 598 (1971)