

افراز شبکه‌های المان‌های محدود توافقی با استفاده از روش تنصیف طیفی

علی داوران
دانشجوی دکترا

علی کاوه
استاد

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران
و مرکز تحقیقات ساختمان و مسکن

چکیده

در این مقاله ابتدا مسئله افراز شبکه المان محدود توافقی به مسئله افراز گراف وزن دار متناظر آن تبدیل می‌گردد. سپس روش گراف تئوری جبری موسوم به «تنصیف طیفی»، برای تنصیف گراف‌های وزن دار تعمیم داده می‌شود. با استفاده از این روش می‌توان شبکه‌های المان محدود توافقی را قبل از ایجاد شبکه ریز نهایی افراز نمود و در نتیجه پروسه افراز را در زمان کمتر و با کارایی بیشتر انجام داد. برتری دیگر این روش در آن است که به جای ایجاد شبکه ریز برای کل دامنه می‌توان آن را به طور موازی و مجزا و برای هر یک از زیردامنه‌ها انجام داد. روش پیشنهادی با روش «ایجاد زیرناحیه‌ای» مقایسه گردیده و با ارائه مثال‌هایی عملکرد این روش نشان داده شده است.

Domain Decomposition of Adaptive Finite Element Meshes Using Spectral Bisection Method

A. Kaveh
Professor

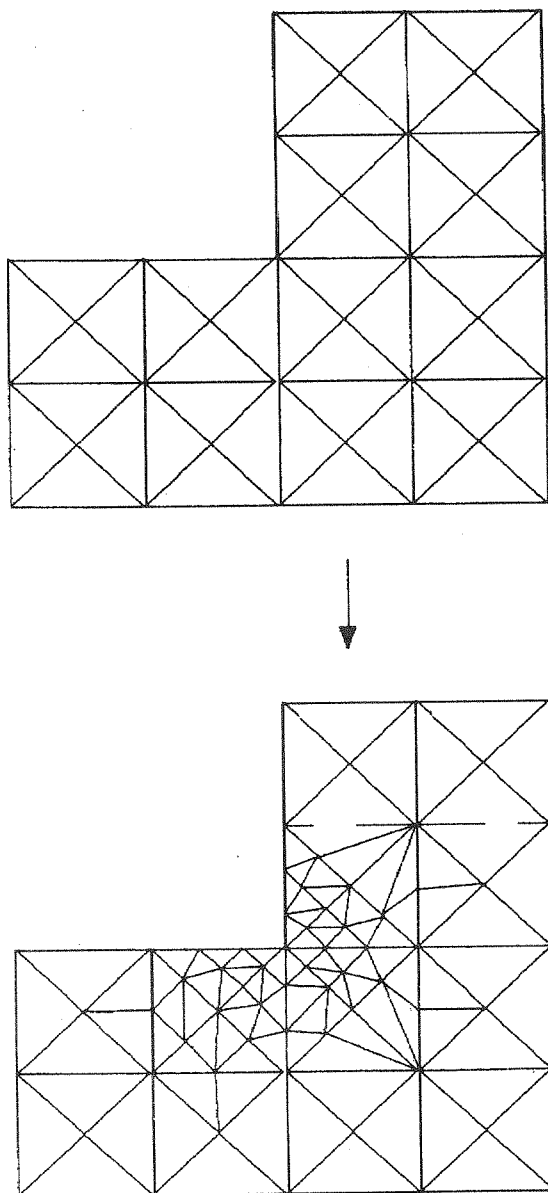
A. Davaran
P.h.D. Student

Iran University of Science and Technology
and Building and Housing Research Center

Abstract

In this paper, the problem of domain decomposition of finite element meshes is transferred into the bisection of weighted graphs. The application of the algebraic method known as spectral bisection is generalized to weighted graphs. Employing this method, finite element methods can be decomposed before refinement, and therefore decomposition can be performed in a much efficient and economical manner. An additional advantage of this method lies in its suitability for parallel mesh refinement. The proposed method is compared to subdomaining approach through examples.

صورت مستقل در زیردامنه‌ها انجام داد که این کار امکان پردازش موازی تولید داده را مهیا می‌سازد.



شکل (۱) شبکه درشت و شبکه ریز نوافقی.

روش تنصیف طیفی یکی از روش‌های مهم می‌باشد که برای افراز دامنه به کار رفته است [5]. این روش براساس نظریه گراف تئوریک جبری استوار است که در ابتدا برای جداسازی ماتریس‌های پرفسفر پیشنهاد شده بود [6]. روش مزبور برای شبکه‌های نامنظم (گراف نامنظم) غیر توافقی، قابل استفاده است. در این مقاله

هدف از تحلیل المان محدود توافقی، یافتن شبکه‌ای از المان‌های محدود است که در آن با حداقل درجه آزادی بتوان خطای تحلیل را به مقدار معین محدود نمود [1]. در حقیقت باتوجه به موقعیت گوشه‌های تیز و سایر ناهنجاری‌های هندسی که منشاء خطا هستند، باید توزیع المان‌ها به گونه‌ای باشد که خطا در کلیه المان‌ها تقریباً با هم مساوی گردد. مسلماً در جایی که تکینی محلی وجود دارد، خطا بیشتر خواهد بود و باید تعداد المان‌ها را افزایش داد.

در روش حلقه بندی توافقی ابتدا دامنه با یک شبکه درشت متشکل از تعداد کمی المان‌ها پوشانده می‌شود و سپس تحلیل صورت می‌گیرد. با استفاده از نتایج این تحلیل، خطا در المان‌ها تخمین زده می‌شود و پارامترهای تجدید شبکه برای المان‌ها و گره‌ها تعیین می‌گردد و سپس حلقه بندی ریز نهایی با چگالی متغیر ایجاد می‌شود. شبکه ریز ممکن است چندین صد یا هزار برابر بیش از شبکه درشت، المان داشته باشد.

در صورتی که تحلیل شبکه‌ای به صورت موازی و یا به روش زیرسازه‌ها انجام شود، افراز شبکه لازم خواهد بود. برای اولین بار در سال ۱۹۹۲، این فکر مطرح گردید که افراز بر روی شبکه درشت به گونه‌ای انجام شود که ملاک‌های بهینگی افراز برای شبکه ریز تأمین گردد [2-4]. این روش به روش ایجاد زیرناحیه‌ای (SGM) موسوم است و ملاک‌های اصلی بهینگی آن عبارتند از:

- ۱- تعداد المان‌ها در زیردامنه‌ها تا حد امکان با یکدیگر برابر باشند.
- ۲- تعداد گره‌ها یا لبه‌های واقع در فصول مشترک زیردامنه‌ها حداقل باشد.
- ۳- زیردامنه‌ها دارای اقطار تقریباً مساوی باشند، به عبارت دیگر ضریب شکلی هر چه نزدیکتر به واحد داشته باشند.

بدیهی است آگاهی قبلی از تعداد المان‌های ریز که در داخل المان‌های درشت تولید خواهند شد، ضروری است. برای این کار از تخمین‌های مختلفی می‌توان استفاده نمود که یکی از آنها بکارگیری شبکه عصبی تغذیه مستقیم است. در روش SGM برای تنصیف از الگوریتم ژنتیک استفاده می‌شود. یکی از مزایای این روش افراز یا تنصیف دامنه با تعداد خیلی از المان‌ها بوده و بنابراین آسان‌تر انجام می‌شود. دیگر اینکه بعد از افراز شبکه درشت، می‌توان تولید شبکه ریز را به

روش تنصیف طیفی برای حل مسائل افزاز گراف‌های وزن دار تعمیم داده شده است. با توجه به این که شبکه‌های توافقی را می‌توان به فرم گراف‌های وزن دار تبدیل نمود، بنابراین می‌توان از تنصیف این گراف‌ها، شبکه‌های توافقی متناظرشان را افزاز کرد. در بخش ۲ روش تنصیف طیفی توضیح داده می‌شود و در بخش ۳ نحوه گسترش این روش برای گراف‌های وزن دار شرح داده می‌شود. با ارائه دو مثال روش حاضر با روش SGM مقایسه می‌گردد و سپس سه مثال دیگر از مسائل تنش مستوی با روش پیشنهادی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲- روش تنصیف طیفی برگشتی

این روش ابتدا برای جداسازی ماتریس‌های پرفر به وسیله سیمون و پوتن^۲ ارائه شد و سپس سیمون روش مزبور را برای حل مسئله افزاز بکار گرفت [6]. در این روش خواص طیفی گراف‌ها استفاده شده و با حل مسئله مقدار ویژه ماتریسی، موسوم به لاپلاسین گراف، افزاز انجام می‌گیرد. لاپلاسین گراف، یک ماتریس $n \times n$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L = D - A \quad (1)$$

در این رابطه ماتریس D قطری بوده و درآیه‌های قطری آن، درجه گره‌های گراف را نشان می‌دهد. درجه هر گره تعداد اعضای متصل به گره بوده و n تعداد گره‌های گراف می‌باشد. A یک ماتریس متقارن متشکل از درآیه‌های ۱ و ۰ است و ماتریس مجاورت گرهی نامیده می‌شود:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر دو گره } i, j \text{ متصل باشند.} \\ 0 & \text{اگر دو گره } i, j \text{ متصل نباشند.} \end{cases} \quad (2)$$

گام‌های اصلی روش تنصیف طیفی برگشتی^۳ (RSB) به قرار زیر است:

الف - تبدیل شبکه المان محدود به گراف مزدوج یا وابسته^۴ و تشکیل لاپلاسین گراف مزدوج.

ب - یافتن مقدار ویژه و بردار ویژه دوم^۵ گراف [7].

ج - مرتب کردن صعودی درآیه‌های بردار ویژه دوم لاپلاسین. نیمی از المان‌ها که مربوط به درآیه‌های

کوچکتر به یک زیر دامنه و نیمه دیگر که شامل درآیه‌های بزرگترند، به زیر دامنه دوم تعلق می‌گیرند.

با اجرای این سه گام، تنصیف گراف کامل می‌شود. حال اگر روی هر کدام از نیمه‌های حاصل روش مزبور تکرار شود، تعداد $(N_p = 4)$ چهار زیر دامنه تولید خواهد شد. با تکرار این الگوریتم به صورت برگشتی N_p زیردامنه به دست خواهد آمد. NR نشانگر تعداد تکرارها می‌باشد.

مراحل انجام این الگوریتم روی یک شبکه کوچک در شکل ۲ نمایش داده شده است.

در مورد این روش توجه به چند نکته زیر ضروری است:

الف - لاپلاسین یک ماتریس، مثبت و نیمه معین است و بردار^۱ $V_1 = (1, 1, \dots, 1)$ و $\lambda_1 = 0$ زوج ویژه اول این ماتریس هستند [5].

ب - تعداد لبه‌های مشترک بین دو زیردامنه برابر است با:

$$|c(x)| = \frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in E} (x_i - x_j)^2 = \frac{1}{4} x^T L x \quad (3)$$

که I مجموعه کلیه لبه‌های مشترک بین هر دو المان از شبکه می‌باشد. بردار منصف x برداری است متشکل از تعداد مساوی ۱- و ۱+ که مؤلفه‌های ۱+ مربوط به المان‌های واقع در یک زیردامنه و مؤلفه‌های ۱- مربوط به المان‌های نصفه دیگر است.

ج - مقدار تابع $|c(x)|$ به ازای $v_2 = v$ کمینه می‌شود، ولی این به معنی یافتن جواب قطعی افزاز نیست. زیرا همانگونه که قبلاً اشاره شد، مسئله افزاز یک مسئله NP-Complete است و بهینه بودن جواب قطعیت ندارد. در حقیقت فکر ریاضی گونه‌ای که در این روش وجود دارد در گام (ج) نهفته است. ما در حقیقت در جستجوی برداری هستیم که فقط از دو عدد صحیح ۱+ و ۱- تشکیل شده باشد و در آن تعداد (۱+)‌ها با تعداد (۱-)‌ها مساوی و یا به مقدار واحد اختلاف داشته باشد، به طوری که اگر این بردار را با x نشان دهیم، رابطه زیر برقرار باشد:

$$V_1^T \cdot x = 0. \quad (4)$$

۳- تبدیل دامنه المان محدود توافقی به گراف وزن دار

در این بخش تبدیل مسئله افراز شبکه المان محدود توافقی به مسئله ریاضی افراز گراف های وزن دار مطرح می شود. برای این تبدیل باید از تعداد و توزیع المان ها در شبکه ریز نهایی یک آگاهی اولیه و تقریبی در اختیار باشد. این آگاهی اولیه از دو طریق حاصل می آید:

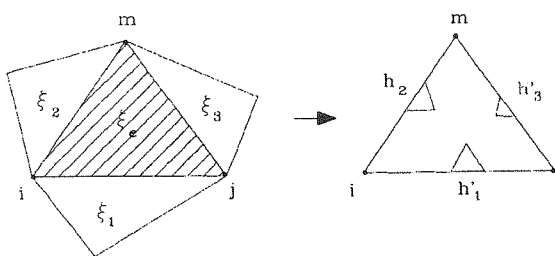
روش اول: استفاده از یک شبکه عصبی مستقیم که با داشتن ۶ پارامتر که ۳ تای آن مربوط به پارامترهای تجدید شبکه و ۳ تای دیگر مربوط به طول اضلاع هستند، تعداد المان های ریز داخل المان درشت تخمین زده می شود.

روش دوم: در این روش تعداد المان های ریز به صورت دیگری تخمین زده می شود که نتایج استفاده از آن در این مقاله نیز رضایت بخش بوده است. یک المان مثلثی در مجاورت ۳ المان دیگر در شکل ۳ نشان داده شده است. طول اضلاع z_j و im و mj به ترتیب با h_1 و h_2 و h_3 نشان داده شده اند. برای ضلع z_j واسطه توافقی e_{ij} و ζ_j به عنوان پارامتر ضلع z_j در نظر گرفته می شود:

$$\zeta_{z_j} = \frac{2\zeta_e \zeta_1}{\zeta_e + \zeta_1} \quad (5)$$

اگر نسبت h_2/h_1 را که تقریباً نشانگر تعداد لبه های ریز تشکیل شده روی لبه درشت است با e_{ij} نشان دهیم، در این صورت داریم:

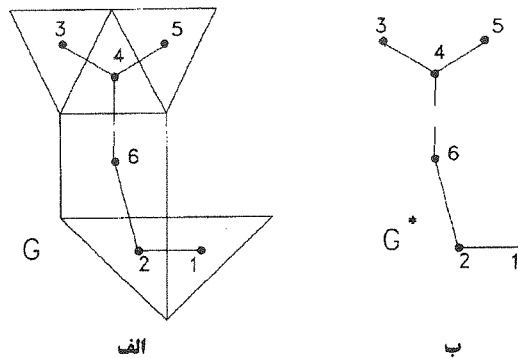
$$e_{ij} = \zeta_{z_j} = \frac{2\zeta_e \zeta_1}{\zeta_e + \zeta_1} \quad (6)$$



شکل (۳) یک المان مثلثی که توسط ۳ المان دیگر احاطه شده است.

به همین ترتیب تعداد لبه های ریز e_{jm} و e_{ij} حساب می شوند:

$$e_{im} = \frac{2\zeta_e \zeta_2}{\zeta_e + \zeta_2} ; e_{jm} = \frac{2\zeta_e \zeta_3}{\zeta_e + \zeta_3} \quad (7)$$



$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{G \times G}$$

$$\lambda_2 = 0.32487 ; V_2 = \begin{bmatrix} -1.0474 \\ -0.7071 \\ 0.7071 \\ 0.4774 \\ 0.7071 \\ -0.1371 \end{bmatrix}$$

شکل (۲) مراحل روش RSB روی یک شبکه کوچک (الف) شبکه FE، (ب) گراف مزدوج، (ج) لاپلاسیان گراف، (د) مقدار و بردار ویژه دوم لاپلاسیان.

این شرط تعامد، تعادل بین دو زیر ناحیه را از نظر تعداد المان ها برآورده می کند.

شرط دوم حداقل شدن تابع $lc(x)$ می باشد که معادل یافتن بردار ویژه دوم ماتریس L است. این بردار ویژه از اعداد حقیقی تشکیل یافته است. جایگزین کردن نصف کوچکتر با (-1) و نصف بزرگتر با $(+1)$ فرض معقولی است که فاقد استدلال ریاضی است و به همین علت به جواب زیربینه باید اکتفا نمود.

روش تنصیف طیفی غالباً به جواب های بسیار مطلوب می رسد و بنابراین در اکثر روش های مبنی بر پردازش موازی از آن استفاده می شود. همچنین افرازی که از این الگوریتم حاصل می شود از نوع انقطاع آشیانه ای است که قابلیت این روش در تحلیل سازه های بزرگ آشکار شده است. از مزایای دیگر این روش داشتن یک اساس ریاضی ساده و قابل قبول است. با بکارگیری این الگوریتم سازه هایی با بزرگی یک میلیون المان، با ۲۵۶ عدد پردازشگر موازی حل شده اند [8]. ایراد اصلی این روش حجم محاسبات آن در ارتباط با حل مسئله مقدار ویژه $Lx = \lambda x$ است. برای حل مسئله مقدار ویژه از روش لانزوس^۲ استفاده می شود.

پس از تعیین تعداد لبه‌های ریز بر روی هر ۳ ضلع مثلث درشت، می‌توان طول ضلع مثلث‌های کوچک نظیر هر ضلع را به ترتیب با h_1 ، h_2 و h_3 نشان داده و مساحت مثلث متساوی الاضلاع S_1 و S_2 و S_3 را که با آنها ساخته می‌شود، مشخص نمود.

$$S_1 = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{h_1^2}$$

$$S_2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{h_2^2}$$

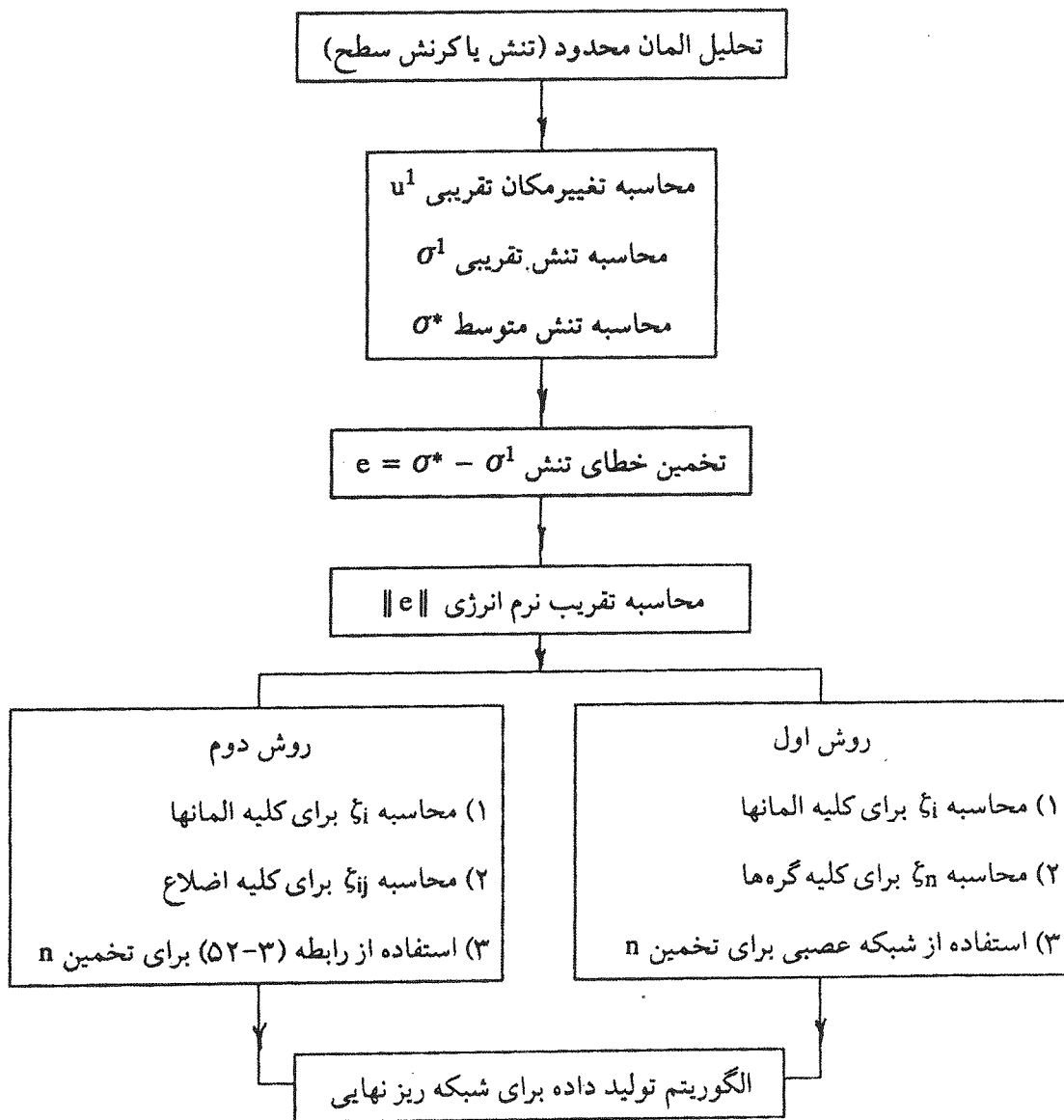
$$S_3 = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{h_3^2}$$

(۸)

به ازای هر یک از این مساحت‌ها، تعداد المان ریز را می‌توان محاسبه کرد و میانگین این سه عدد را تعداد تقریبی المان‌های ریز در داخل المان درشت فرض نمود.

$$\eta = \frac{1}{3} [S_1 + S_2 + S_3] \quad (۹)$$

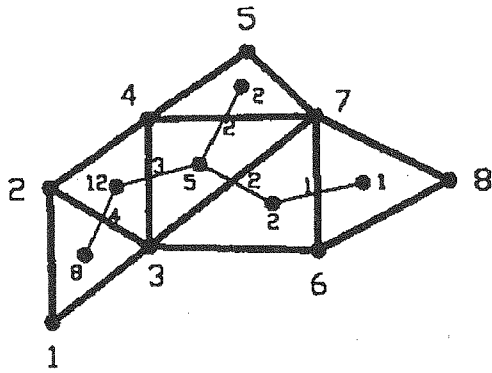
مقایسه این دو روش نشان داده است که روش دوم معمولاً مقدار η را در حدود ۱۰ درصد بیشتر حساب می‌کند. ولی این مسئله معمولاً در حل مسئله افراز بی‌تأثیر است. روند کلی تحلیل خطا و ریزسازی توافقی نوع h در شکل ۴ ملاحظه می‌شود.



شکل (۴) روند کلی روش تحلیل خطا و تخمین تعداد المان.

در شکل ۵ یک شبکه درشت و شبکه ریز شده ثانویه آن نشان داده شده است.

با در دست داشتن تعداد المان های ریز در داخل المان درشت و تعداد لبه ریز روی لبه المان درشت، یک گراف وزن دار را می توان از روی شبکه درشت تعریف نمود. گراف وزن دار نظیر یک شبکه در شکل ۶ نشان داده شده است.



(ب)

شکل (۶) الف) شبکه ریز نهایی، ب) گراف وزن دار نظیر شبکه ریز.

گراف وزن دار به این صورت ساخته می شود:
الف - گراف وابسته^۷ نظیر شبکه درشت ساخته می شود [10].

ب - وزن هر گره این گراف تعداد تقریبی المان های ریز و وزن هر لبه مساوی تعداد تقریبی لبه های ریز است.

۴ - تنصیف طیفی گراف وزن دار

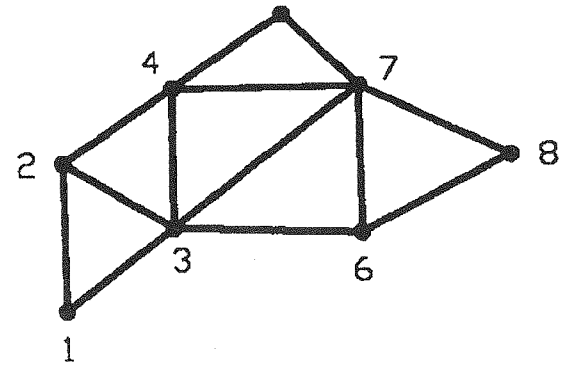
در این بخش روش تنصیف طیفی برای افزاین گراف های وزن دار تعمیم داده شده است [9]. یک گراف وزن دار در حالت کلی دارای اوزان گرهی m_i و اوزان لبه ای e^l است، شکل ۷.

اگر بردار وزن گرهی با M و ماتریس وزن دار لاپلاسیان با W نمایش داده شود، داریم:

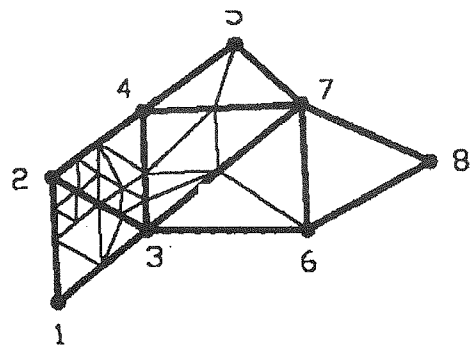
$$M = [M_i]; i = 1, \dots, n \quad (10)$$

$$W = [W_{ij}]; i, j = 1, \dots, n \quad (11)$$

$$W_{ij} = \begin{cases} e_i = \sum_{j=1}^{D_i} e_{ij} & \text{اگر } i=j \text{ باشد;} \\ -e_{ij} (= -e_{ji}) & \text{اگر گره های } i, j \text{ مجاور باشند;} \\ 0 & \text{در غیر این صورت;} \end{cases} \quad (12)$$

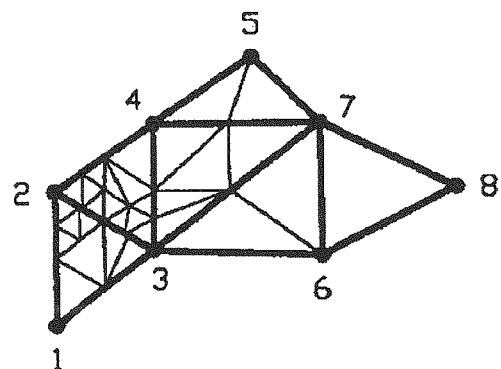


(الف)



(ب)

شکل (۵) الف) شبکه المان محدود درشت اولیه،
ب) شبکه المان محدود ریز شده نهایی.



(الف)

استفاده کرد.

$$Z = \frac{1}{4} x^T W x + r (x^T M) (M^T x) \quad (17)$$

$$Z = x^T \left(\frac{1}{4} W + r \cdot M M^T \right) x \quad (18)$$

$$Z = x^T L^* x \quad (19)$$

L^* لاپلاسیان اصلاح شده است. این ماتریس مثبت - معین است و می توان نشان داد که اولین بردار ویژه آن تابع Z در رابطه (۱۹) را حداقل می کند. به علت ریاضی گونه بودن فرمول بندی فوق، در چندین مثال مشاهده شده است که بردارهای دوم و گاهی سوم نیز بهتر از بردار اول جواب می دهند. بنابراین آخرین مرحله این الگوریتم، حل مسئله مقدار ویژه زیر است که به روش لانزوس انجام می گیرد:

$$L^* u = \lambda u \quad (20)$$

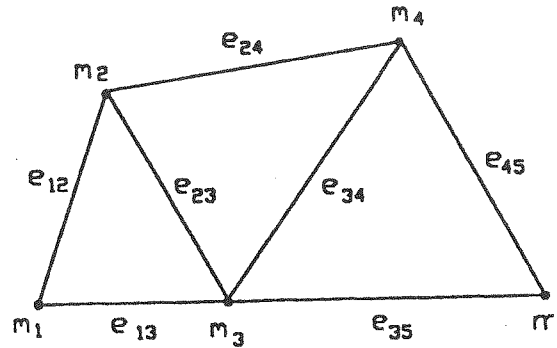
مثال های عددی نشان می دهد، جواب بهینه یکی از ۳ بردار ویژه اول معادله (۲۰) است. بعد از یافتن بردار x ، مؤلفه های آن را به ترتیب صعودی، مرتب می کنیم. به تعداد n_1 المان نظیر مؤلفه های کوچکتر را طوری انتخاب می کنیم که داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^{n_1} m_i \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \quad (21)$$

واضح است که n_1 رابطه خاصی با $n/2$ نخواهد داشت.

۵- مثال های عددی جهت مقایسه عملکرد روش پیشنهادی ISB و روش SGM

الف - یک دامنه المان محدود که از مرجع [4] انتخاب گردیده و در شکل ۸ نشان داده شده است. نتایج در جدول های ۲ و ۳ ارائه شده اند. نتایج روش ISB با خط پرنگ و روش SGN با خط چین ۲ مشخص شده است.



شکل (۷) يك گراف وزن دار در حالت کلی.

در این روابط n تعداد المان درشت، D_i درجه گره i که مجموع اوزان لبه های متصل به گره i است. بردار منصف x برداری با درآیه های -1 و $+1$ می باشد. برخلاف روش تنصیف طیفی، تعداد $(+1)$ ها و (-1) ها مساوی نیست. $(+1)$ ها المانهایی هستند که به زیردامنه اول و (-1) ها به المانی مربوطند که به زیردامنه دوم تعلق می گیرند. برای اینکه دو زیردامنه حتی الامکان هم وزن باشند، باید Z در رابطه زیر کمینه گردد:

$$\text{Min} . Z = |M^T x| \quad (12)$$

مجموع وزن لبه های فصل مشترک بین زیردامنه ها به صورت زیر حساب می شود:

$$|c(x)| = \frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in E} (x_i - x_j)^2 e_{ij} \quad (14)$$

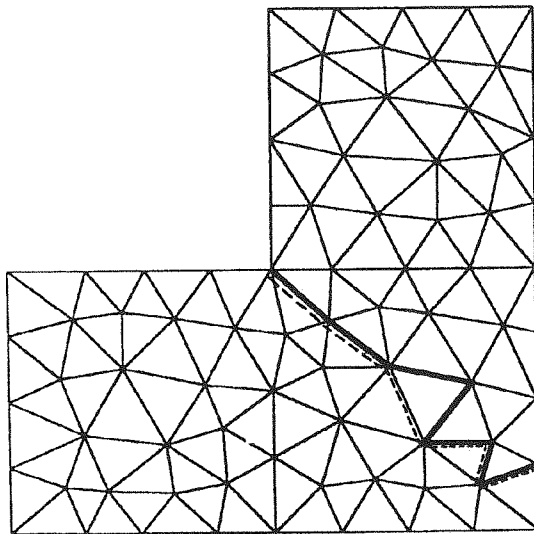
و به راحتی می توان صحت رابطه زیر را نشان داد:

$$|c(x)| = \frac{1}{4} x^T W x \quad (15)$$

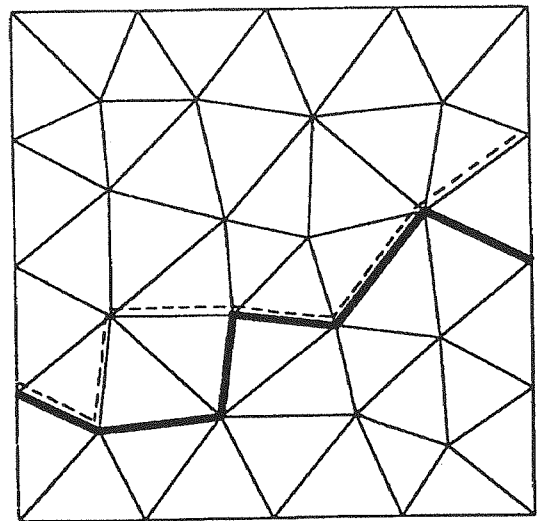
برای اینکه ملاک های بهینگی برقرار شوند، روابط (۱۳) و (۱۵) باید به طور همزمان کمینه شود، که معادل با کمینه شدن تابع جریمه زیر است:

$$Z = \frac{1}{4} x^T W x + r |M^T x| \quad (16)$$

r پارامتر جریمه است، که معمولاً برابر واحد در نظر گرفته می شود، به جای جزء دوم، می توان از مربع آن



شکل (۹) یک دامنه L شکل.



شکل (۸) یک دامنه مربع شکل.

جدول (۳) افزایش‌های حاصل از چهار مود اول (رابطه ۲۱).

شماره مقدار ویژه	λ	(۱) فصل مشترك	(۲) اختلاف وزن	(۱) + (۲)
1	0.0088	17	8	25
2*	0.0181	17	6	23
3	0.0373	22	4	26
4	0.0485	23	2	25

جدول (۲) مقایسه روش‌های SGM و ISB.

روش	(۱) اختلاف وزن	(۲) فصل مشترك	(۱) + (۲)
SGM	16	15	31
ISB	8	17	25

۶- مثال‌هایی برای افزایش دامنه المان محدود توافقی به روش پیشنهادی

مثال ۱ - ۶ - یک تیر عمیق به صورت مسئله تنش مسطح مطابق شکل ۱۰ طرح شده است. این دامنه به NP = 4 قسمت افزایش می‌شود. ضخامت تیر $h = 0.10\text{cm}$ و $E = 100000\text{ kg/cm}^2$ و $\nu = 0.30$ فرض شده است. شبکه ریز و شبکه افزایش شده به ترتیب در شکل‌های ۱۱ - الف و ۱۱ - ب ملاحظه می‌گردند.

جدول (۱) افزایش‌های به دست آمده از چهار مود اول (رابطه ۲۱).

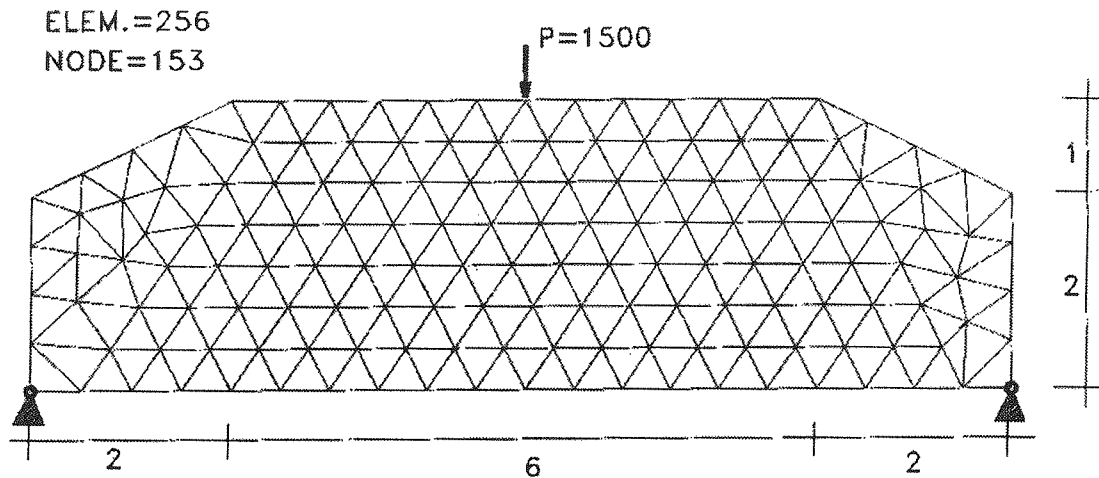
شماره مقدار ویژه	λ	(۱) فصل مشترك	(۲) اختلاف وزن	(۱) + (۲)
1	0.0404	15	24	39
2	0.0472	10	6	16
3	0.1214	16	14	30
4	0.1414	20	20	40

جدول (۲) مقایسه روش‌های SGM و ISB.

روش	(۱) اختلاف وزن	(۲) فصل مشترك	(۱) + (۲)
SGM	18	11	29
ISB	6	10	16

منظور از اختلاف وزن، اختلاف در تعداد المان‌های دو زیر دامنه است.

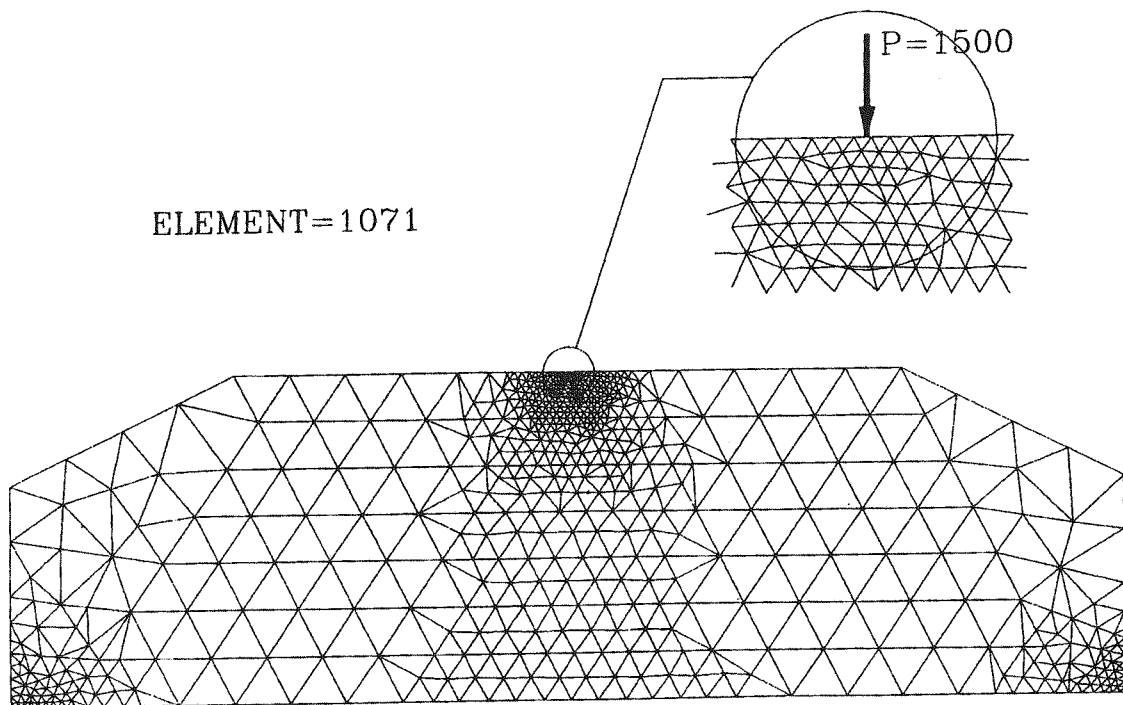
ب - یک دامنه L شکل از مرجع [4] در شکل ۹ نشان داده شده است. نتایج در جدول‌های ۳ و ۴ ارائه شده‌اند.



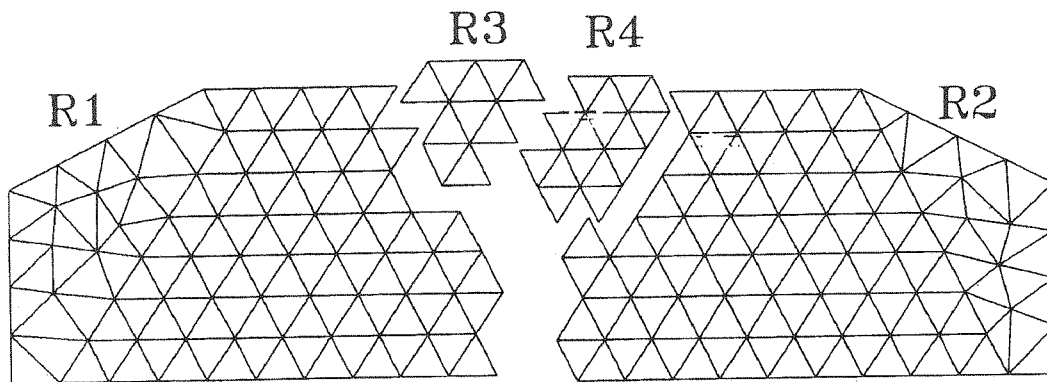
شکل (۱۰) شبکه درشت اولیه برای مدل سازی تیر عمیق.

مثال ۲-۶ - در شکل ۱۲ یک دامنه L شکل با شبکه درشت مثلثی پوشانده شده است. کلیه مشخصات فیزیکی مشابه مثال ۱-۶ است. شبکه ریز و شبکه درشت افزاز شده به ترتیب در شکل های ۱۲-الف و ۱۳-ب ملاحظه می گردند.

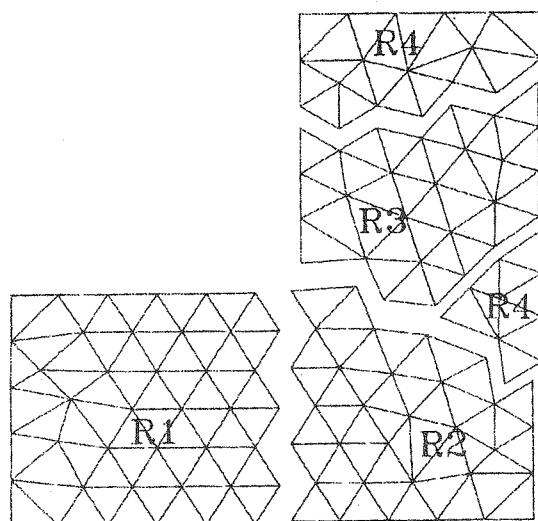
تعداد المان ریز در زیر دامنه های اول تا چهارم به ترتیب (269, 268, 271, 263) به دست آمده است و تعداد کل لبه واقع در فصل مشترک برابر ۵۹ می باشد. در تنصیف اول، مود دوم و در تنصیف دوم و سوم، مود اول تعیین کننده بوده است.



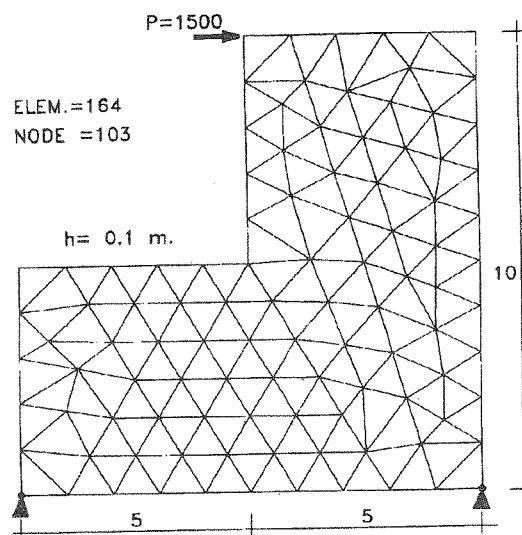
شکل (۱۱) الف) شبکه ریز نهایی مربوط به مثال ۶.۱.



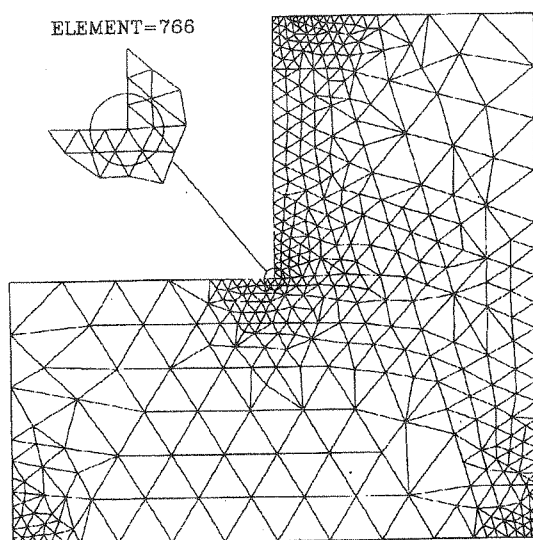
شکل (۱۱) ب) دامنه های افراز شده از شبکه درشت، (NP = 4).



شکل (۱۳) الف) شبکه ریز نهایی مربوط به مثال ۶.۲

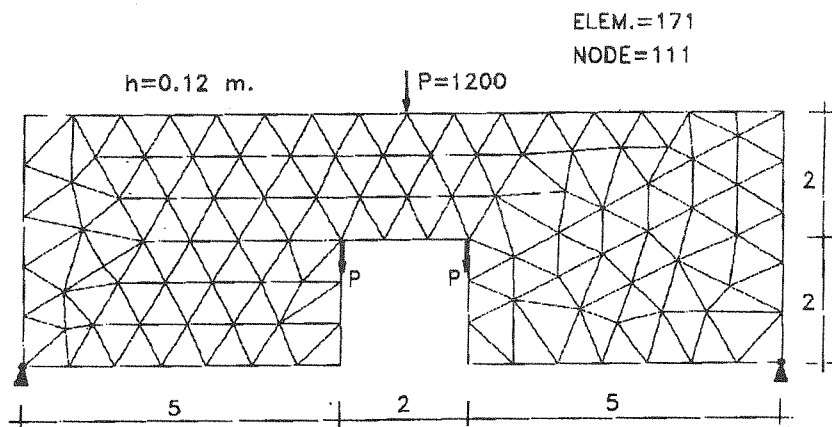


شکل (۱۲) یک مسئله تنش مستوی با دامنه L شکل.

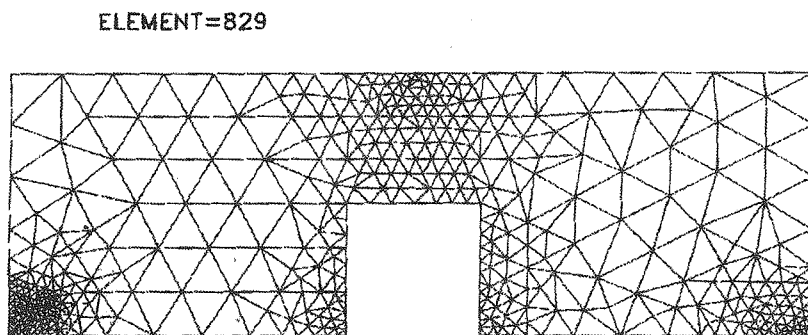


شکل (۱۳) ب) دامنه های افراز شده از شبکه درشت، (NP = 4).

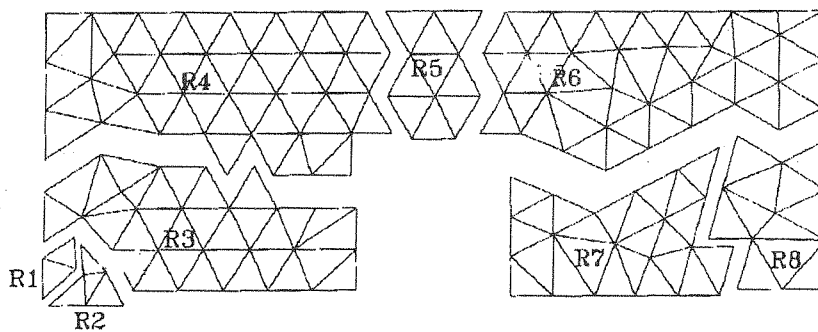
تعداد المان های ریز در زیردامنه های اول تا چهارم به ترتیب (191, 190, 192, 193) به دست آمده است و تعداد کل لبه واقع در فصل مشترک برابر ۴۱ می باشد. برای تنصیف بار اول، مود اول و برای تنصیف های دوم و سوم به ترتیب مودهای اول و سوم تعیین کننده بوده اند. مثال ۳ - ۶ - یک تیر عمیق با ناحیه توخالی در شکل ۱۴ ملاحظه می شود. ضخامت $h = 0.12\text{cm}$ و مشخصات فیزیکی تیر مشابه مثال ۱ - ۶ است. شبکه ریز و شبکه افراز شده به ترتیب در شکل های ۱۵ - الف و ۱۵ - ب ملاحظه می گردند.



شکل (۱۴) يك تير عميق با ناحیه توخالی.



شکل (۱۵) الف) شبکه ریز نهایی مربوط به مثال ۶.۳.



شکل (۱۵) ب) دامنه های افزاز شده از شبکه درشت، $(NP = 8)$.

SGM برتری دارد:

- ۱ - در این روش تعداد المان‌ها در شبکه درشت اولیه می‌تواند بسیار زیاد باشد.
- ۲ - این روش روی گراف نظیر شبکه عمل می‌کند. بنابراین هیچ محدودیتی از نظر محذب بودن هندسی دامنه وجود ندارد.
- ۳ - این روش برای مسائل سه بعدی نیز قابل استفاده است.

زیر نویس‌ها

- 1 - Subdomain Generation Method
- 2 - Simon and Pothen
- 3 - Recursive Spectral Bisection
- 4 - Dual or Associate
- 5 - Fiedler vector
- 6 - Lanczos
- 7 - Associate Graph

- [1] O.C. Zienkiewicz, The Finite Element Method, Vol. 1, McGraw-Hill, 1989.
- [2] A. I. Khan and B.H.V. Topping, Parallel adaptive mesh generation, Computing Systems in Engineering, Vol. 2, No. 1, 75-102, 1991.
- [3] A. I. Khan and B. H. V. Topping, Subdomain generation for parallel finite element analysis, Computing Systems in Engineering., Vol. 4, Nos 4-6, 473-488, 1993.
- [4] B. H. V. Topping and J. Sziveri, Parallel subdomain generation method, Civil-Comp. Press. Edinburgh, U.K., 449-457, 1995.
- [5] H. D. Simon, Partitioning of unstructured problems for parallel processing, Computing Systems in Engineering, 2, Nos2/3, 135-148, 1991.
- [6] A. Pothen, H. D. Simon and K. P. Liou, Partitioning sparse matrices with eigenvectors of

تعداد المان ریز در زیردامنه‌های اول تا هشتم به ترتیب (107, 104, 101, 104, 97, 108, 105, 103) به دست آمده است و تعداد کل لبه واقع در فصل مشترک برابر ۷۰ می‌باشد. در تنصیف اول، مود اول تعیین کننده است. در تنصیف دوم و سوم به ترتیب مودهای اول و دوم حاکم هستند. در تنصیف چهارم مود دوم و در تنصیف‌های پنجم و ششم و هفتم مود اول تعیین کننده می‌باشند.

نتایج تحقیق

در این مقاله یک روش گراف تئوریک جبری برای تنصیف گراف‌های وزن دار ارائه گردید. سپس با استفاده از این روش گراف‌های وزن دار نظیر شبکه المان محدود توافقی افزاز شد. این روش با روش متداول دیگری موسوم به SGM که در آن از الگوریتم ژنتیک برای تنصیف استفاده می‌شود، مقایسه گردید. بررسی و مثال‌ها نشان می‌دهد که تنصیف به دست آمده از این روش بسیار خوب بوده و از چند نظر نسبت به روش

مراجع

- graphs, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 11, 430 - 452, 1990.
- [7] J. H. Wilkinson, The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendon Press, Oxford, 1965.
- [8] Z. Johan, K. K. Mathur and S. L. Johnson, Scalability of finite element applications on distributed-memory parallel computers, Comput, Meths Appl. Mech. Eng., 119, 61-72, 1994.
- [9] A. Kaveh and A. Davaran, Spectral bisection of adaptive finite element meshes for parallel processing, to appear in Comput. Struct., 1998.
- [10] A. Kaveh, Structural Mechanics; Graph and Matrix Methods, RSP (John Wiley), 2nd ed., U.K., 1995.
- [11] A. Kaveh, Optimal Structural Analysis, RSP (John Wiley), U.K. 1997.