

حل تقریبی معادلات لایه شوک لزج (VSL)

حول دماغه اجسام ماوراء صوت

سید محمد حسین کریمیان

دانشیار

دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مهدی معرفت

استادیار

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

مهرداد ملک زاده دیرین

دانشجوی دکتری مکانیک

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

چکیده

در این مقاله روشی تقریبی جهت حل عددی معادلات لایه شوک لزج (VSL) ارائه شده است. با استفاده از این روش می توان مشخصات جریان متقارن محوری را حول سر اجسام ماوراءصوت محاسبه نمود. تقریب به کار گرفته شده در این روش استفاده از رابطه مرتبه دوم فشار مزلن به جای حل معادله ممتوم قائم بر شوک می باشد. به این ترتیب به فرم ساده شده ای از معادلات لایه شوک لزج دست می یابیم که حل عددی آن بسیار سریع و ساده می باشد. همچنین جهت تبدیل مختصات تابع جریان به مختصات محاسباتی عمود بر شوک، به جای حل متداول یک معادله انتگرالی از برازش منحنی استفاده شده که بر سرعت محاسبات افزوده است. برخلاف کدهای استاندارد حل عددی معادلات لایه شوک لزج، در این روش نیازی به یک حدس اولیه برای تمام شکل شوک نیست. محاسبه شکل شوک با استفاده از یک روش معکوس انجام شده و به عنوان بخشی از الگوریتم حل عمل می نماید. در این مقاله برای حل جریان مغشوش از مدل توربولانس سبسی - اسمیت استفاده شده است و هوا نیز گاز کامل فرض می شود. با استفاده از روش حاضر جریان ماوراء صوت حول سر مخروطی با نوک کروی حل شده است و مشخصات جریان بر روی جسم، از قبیل نرخ انتقال حرارت و فشار استاتیک، با نتایج دیگران و نتایج تجربی مقایسه شده است. نتایج بدست آمده تطابق بسیار خوبی را نشان می دهند.

کلمات کلیدی

لایه شوک لزج - ماوراء صوت - حل تقریبی

Approximate Calculation Viscous Shock Layer for Hypersonic Flows About Blunt-Nosed Bodies

S. M. H. Karimian

Associate Professor

Amirkabir University of Technology

M. Maerefat

Assistant Professor

Tarbiat-Modares University

M. Malekzadeh Dirin

Ph. D Student

Tarbiat-Modares University

Abstract

An axisymmetric approximate viscous shock layer method has been developed to calculate laminar and turbulent hypersonic viscous flows of perfect gas over blunt-nosed bodies. In this method, Maslen's second-order pressure expression has been used instead of the normal momentum equation to obtain a simplified form of the axisymmetric viscous shock layer equations. In this approach, equations have been solved in a shock-oriented curvilinear coordinate system. The shock shape is obtained using an inverse method which provides a smooth shock shape in subsonic and supersonic regions. It is noted that the approximate pressure relation is given in the stream function coordinate. Since the governing equations are solved in the computational coordinate system, the relation between these two coordinate systems must be specified. In the present study an approximate relation between the computational and the stream function coordinate systems has been developed. This approximate relation, which is a third-order polynomial, is derived using four boundary conditions on the shock and the body surfaces. The very first gain one can benefit from it is the increase of computation speed. Since the present method is fast, it can be used for preliminary design or parametric study of hypersonic vehicles. Solutions have been presented for air flows over spherically blunted cones. The results of present method compare very well with the experimental data and detailed viscous shock layer solutions.

Keywords

Viscous Shock Layer- Hypersonic- Approximate Method

مقدمه

برای طراحی حرارتی و آیرودینامیکی اجسام ماوراء صوت نیاز به مشخصات میدان جریان سیال در اطراف جسم می‌باشد. چنین نتیجه ای را می‌توان با حل عددی معادلات ناویر-استوکس (NS) [۱] یا یکی از صورتهای ساده شده آن نظیر معادلات سه‌موی شده (PNS) [۲] ویا معادلات لایه شوک لزج^۱ (VSL) [۳] بدست آورد. متأسفانه زمان کامپیوتری حل عددی چنین روش‌هایی در حال حاضر زیاد بوده و استفاده از آنها مقرون به صرفه نمی‌باشد [۴]. چرا که جهت طراحی حرارتی یک جسم ماوراء صوت می‌باید بازه وسیعی از شکل‌های هندسی و شرایط پروازی جسم مورد مطالعه قرار گیرند. بنابراین نیاز به روشهایی است که بتوانند جوابهایی سریع و از نظر مهندسی دقیق را در اختیار قرار دهند. هنگامی که عدد رینولدز به اندازه کافی بزرگ باشد، ضخامت لایه مرزی نسبت به لایه غیر لزج بیرونی بسیار اندک است. در این حالت می‌توان از تقریب لایه نازک^۲ استفاده کرد. استفاده از این تقریب سرعت محاسبه خصوصیات جریان را افزایش می‌دهد. به این ترتیب که میدان جریان سیال اطراف جسم به دو ناحیه جریان در لایه مرزی و جریان غیر لزج در بیرون لایه مرزی تقسیم می‌گردد. ابتدا میدان جریان غیر لزج حل شده و خواص جریان غیر لزج روی بدنه به عنوان شرایط لبه لایه مرزی در نظر گرفته می‌شود. سپس با استفاده از یک کد لایه مرزی می‌توان اصطکاک پوسته و شار حرارتی را با دقت خیلی خوبی محاسبه نمود. مشکلی که این روشها دارا می‌باشند آن است که شوک منحنی^۳ ایجاد شده در جلوی اجسامی با نوک پخ باعث می‌شود تا در طول جسم همواره گرادیان قوی آنتروپی در جهت عمود بر جسم شکل گیرد. در این حالت تعیین شرایط لبه لایه مرزی به سادگی ممکن نمی‌باشد. برای رفع این مشکل روشهای متعددی پیشنهاد شده‌اند لکن در بیشتر آنها از تاثیر لایه مرزی بر روی جریان غیر لزج و شکل شوک صرف نظر شده است. علاوه بر این هنگامی که عدد رینولدز کم باشد، لایه مرزی قسمت اعظم لایه شوک را به خود اختصاص داده و بنابراین تاثیر قابل ملاحظه‌ای روی شکل شوک جریان غیر لزج خواهد داشت. در این شرایط تاثیر متقابل شوک و لایه مرزی حائز اهمیت می‌باشد و نمی‌توان از آن صرف نظر کرد. بنابر آنچه که گفته شد شرایطی از پرواز وجود دارد که در آن مجبور به حل هم زمان جریان لزج و غیر لزج هستیم. بدین منظور یکی از بهترین روشهای موجود، حل عددی معادلات لایه شوک لزج می‌باشد. حل عددی این معادلات نسبت به دیگر صورتهای ساده شده معادلات ناویر- استوکس به زمان کمتری نیاز دارد. در این تحقیق برای افزایش سرعت حل این معادلات، به جای حل عددی معادله ممنتوم قائم بر شوک، از رابطه مرتبه دوم فشار مرزن^۴ [۵] استفاده شده است. برای بدست آوردن این رابطه ابتدا معادله ممنتوم قائم بر شوک به مختصات تابع جریان^۵

منتقل شده و پس از اعمال فرضیات ساده‌کننده‌ای که در جریان‌های ماوراء صوت صادق‌اند [۶ و ۵] و از آن به صورت تقریبی انتگرال گرفته می‌شود. فرضیات ساده‌کننده‌ای که برای انتگرال‌گیری تقریبی از معادله ممنتوم قائم مورد استفاده قرار می‌گیرند، عبارتند از:

$$\begin{aligned} \rho &\approx \rho_s & A &\approx 1 \\ u &\approx u_s & B &\approx 1 \\ \frac{\partial \rho_s}{\partial \xi} &\approx 0 & \frac{\partial v_s}{\partial \xi} &\approx 0 \\ n &\approx \left(\frac{\partial n}{\partial \eta} \right)_s (\eta - 1) \end{aligned}$$

این فرضیات در جریان‌های ماوراء صوت که لایه شوک نازک است، صادق می‌باشند. در نتیجه این تحلیل رابطه‌ای مرتبه دومی بدست می‌آید که به وسیله آن می‌توان فشار را به صورت صریح در امتداد خط عمود بر شوک محاسبه نمود. محاسبه صریح فشار کاهش قابل توجهی را در زمان لازم جهت حل عددی معادلات لایه شوک لزوج باعث می‌گردد. چرا که در صورت مشخص بودن فشار، معادلات پیوستگی، انرژی و ممنتوم در جهت جریان، به راحتی قابل حل بوده و دیگر نیازی به حل کوپل معادله ممنتوم قائم و معادله پیوستگی مانند آنچه در حل استاندارد معادلات لایه شوک لزوج مرسوم است نمی‌باشد. در قسمتهای بعدی مقاله، معادلات حاکم، شرایط مرزی و روش حل تشریح شده‌اند.

معادلات حاکم

در حقیقت معادلات لایه شوک لزوج، تقریبی از معادلات ناویر استوکس می‌باشند که اولین بار توسط دیویس^۶ [۳] برای حل جریان‌های ماوراء صوت، حول اجسامی با نوک پخ^۷، مورد استفاده قرار گرفتند. مزیت اصلی این معادلات طبیعت هذلولوی سهموی آنهاست که اجازه می‌دهد این معادلات در نوک اجسام ماوراء صوت که جریان زیر صوت می‌باشد نیز مورد استفاده قرار گیرند. معادلات لایه شوک لزوج برای جریان دائم متقارن محوری^۸ در سیستم مختصات منحنی الخط (s, n) که در شکل (۱) نشان داده شده است، به صورت زیر نوشته می‌شود [۴].

الف - معادله پیوستگی

$$\frac{\partial}{\partial s}(\rho u h_3) + \frac{\partial}{\partial n}(\rho v h_3) = 0 \quad (1)$$

ب - معادله ممنتوم در امتداد s

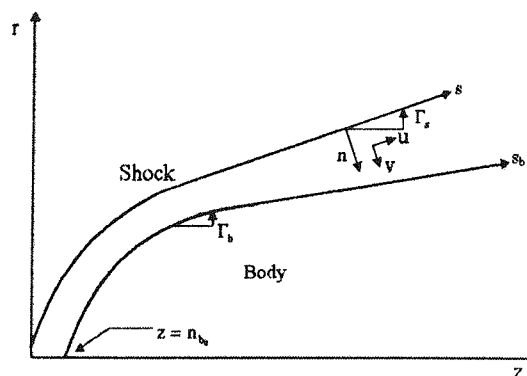
$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{u}{h_1} \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} + uv \frac{\partial h_1}{\partial n} \right) + \frac{1}{h_1} \frac{\partial p}{\partial s} = \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left[\mu(1 + \varepsilon^+) \frac{\partial u}{\partial n} - \mu \frac{u}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial n} \right] \right. \\ \left. + \left(\frac{2}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial n} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial n} \right) \left[\mu(1 + \varepsilon^+) \frac{\partial u}{\partial n} - \mu \frac{u}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial n} \right] \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

ج - معادله انرژی

$$\rho \left(\frac{u}{h_1} \frac{\partial h}{\partial s} + v \frac{\partial h}{\partial n} \right) - \frac{u}{h_1} \frac{\partial p}{\partial s} - v \frac{\partial p}{\partial n} = \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{\mu}{Pr} \left(1 + \varepsilon^+ \frac{Pr}{Pr_1} \right) \frac{\partial h}{\partial n} \right] \right. \\ \left. + \frac{\mu}{Pr} \left(1 + \varepsilon^+ \frac{Pr}{Pr_1} \right) \frac{\partial h}{\partial n} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial n} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial n} \right) \right. \\ \left. + \mu (1 + \varepsilon^+) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 - 2 \frac{u}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial n} \right] + \mu \left(\frac{u}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial n} \right)^2 \right\} \quad (3)$$

که در آن $\varepsilon^2 = \frac{\mu_{ref}^*}{\rho_{\infty}^* u_{\infty}^* R_{nose}^*}$ و h_1 و h_3 متریک‌های سیستم مختصات می‌باشند که متعاقباً تعریف خواهند شد. کمیت

$\varepsilon^+ = \frac{\mu_1}{\mu}$ بوده و برای جریان آرام $\varepsilon^+ = 0$ است. همچنین عدد پراتل جریان مغشوش Pr_1 برابر ۰/۹ در نظر گرفته شده است.



شکل (۱) سیستم مختصات منحنی الخط شوک.

معادلات بالا به شکل بی‌بعد بوده و متغیرهای آن به صورت زیر بی‌بعد شده‌اند:

$$s = \frac{s^*}{R_{nose}^*} \quad n = \frac{n^*}{R_{nose}^*} \quad p = \frac{p^*}{P_{ref}^*} \quad u = \frac{u^*}{V_{\infty}^*} \quad v = \frac{v^*}{V_{\infty}^*} \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_{\infty}^*} \\ h = \frac{h^*}{h_{ref}^*} \quad \mu = \frac{\mu^*}{\mu_{ref}^*} \quad P_{ref}^* = \rho_{\infty}^* V_{\infty}^{*2}$$

در روابط فوق بالانویس * و زیرنویس ∞ به ترتیب معرف متغیرهای با بعد و مشخصات جریان آزاد بوده و انتالپی مرجع عبارت است از $h_{ref}^* = V_{\infty}^{*2}$ و R_{nose}^* شعاع انحنای نوک جسم می‌باشد. همچنین برای محاسبه نرخ گرمایش در قسمت نتایج، سه متغیر بی‌بعد زیر و مقادیر مرجع هر یک معرفی می‌گردند.

$$q = \frac{q^*}{q_{ref}^*} \quad T = \frac{T^*}{T_{ref}^*} \quad k = \frac{k^*}{k_{ref}^*} \\ q_{ref}^* = \rho_{\infty}^* V_{\infty}^{*3} \quad k_{ref}^* = \mu_{ref}^* C_{p\infty}^* \quad T_{ref}^* = \frac{V_{\infty}^{*2}}{C_{p\infty}^*}$$

جهت استخراج معادلات لایه شوک لزج ابتدا معادلات ناویر- استوکس به سیستم مختصات منحنی الخط منتقل شده و سپس از ترمهایی که ضریب آنها بالاتر از ε^2 است صرف نظر می‌شود. جزئیات بیشتر در مرجع [۳] ارائه شده است. معادلات حاکم را می‌توان در سیستم مختصات عمود بر شوک و یا عمود بر بدنه نوشت. در سیستم مختصات عمود بر شوک که در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است متریک‌های سیستم مختصات به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$h_1 = 1 - nk_s \qquad h_3 = r_s - n \cos \Gamma_s$$

که در آنها n فاصله عمودی از شوک به سمت بدنه، k_s شعاع انحناء شوک و r_s فاصله شعاعی شوک از محور می‌باشد. رابطه مرتبه دوم فشار مزین [۵] که قبلاً راجع به آن توضیح داده شد به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$p = p_s + \frac{k_s r_s u_s}{2} (\eta - 1) - \frac{v_s \sin \Gamma_s}{4} \left[1 + \frac{k_s r_s}{u_s} \right] (\eta^2 - 1) \quad (4)$$

که در آن $\eta = \frac{\psi}{\psi_s}$ ، ψ تابع جریان و اندیس (s) معرف مقادیر شوک می‌باشد. در صورت مشخص بودن شکل شوک مقادیر $p_s, k_s, u_s, r_s, v_s, \sin \Gamma_s$ معلوم خواهند بود و می‌توان با استفاده از رابطه (۴) فشار هر نقطه را بین شوک ($\eta = 1$) و بدنه ($\eta = 0$) محاسبه نمود. درحقیقت استفاده از رابطه فشار مزین به جای معادله ممنتوم در جهت عمود بر شوک باعث گردیده تا تقریبی از معادلات لایه شوک لزج بدست آید. همانطوری که قبلاً اشاره شد با مشخص بودن فشار، معادلات پیوستگی، انرژی و ممنتوم در جهت جریان، به راحتی قابل حل بوده و دیگر نیازی به حل کوپل معادلات ممنتوم قائم و پیوستگی نیست. این در صورتی است که اگر فشار معلوم نبود کوپل کردن این دو معادله جهت تضمین پایداری حل ضروری می‌باشد [۷].

از آنجا که رابطه مزین جهت محاسبه صریح فشار در جهت عمود بر شوک در سیستم مختصات تابع جریان $\eta = \frac{\psi}{\psi_s}$ می‌باشد، لازم است معادلات لایه شوک لزج به مختصات (s, η) منتقل گردند. لکن استفاده از این سیستم مختصات، محاسبه شار حرارتی روی سطح را با مشکل مواجه می‌نماید [۸]. بنابراین مطابق پیشنهاد مرجع [۴] معادلات حاکم از سیستم مختصات (s, n) به سیستم مختصات (ξ, η_n) تبدیل می‌شوند که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\xi = s \qquad \eta_n = 1 - \frac{n}{n_b} \quad (5)$$

که در آن زیر نویس b معرف مشخصات بدنه می‌باشد. در این سیستم مختصات $\eta_n = 1$ نقطه ای روی شک و $\eta_n = 0$ نقطه ای روی بدنه را نشان می‌دهد. برای تبدیل مشتقات در سیستم (s, n) به سیستم مختصات (ξ, η_n) از روابط زیر استفاده می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{(\eta_n - 1)}{n_b} \frac{dn_b}{d\xi} \frac{\partial}{\partial \eta_n} \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{1}{n_b} \frac{\partial}{\partial \eta_n} \quad (7)$$

این روابط با توجه به رابطه (۵) و استفاده از قاعده مشتقات زنجیره‌ای بدست آمده‌اند. کافی است تا با استفاده از روابط (۶ و ۷) مشتقات نسبت به s و n در معادلات (۱) تا (۳) جایگزین شده تا معادلات لایه شوک لزج در سیستم مختصات (ξ, η_n) بدست آید:

چنانکه مشاهده می‌شود فشار مزلن تابعی از η می‌باشد در حالیکه معادلات لایه شوک لزج در سیستم مختصات (ξ, η_n) نوشته می‌شوند. لذا می‌باید رابطه بین دو متغیر η و η_n تعیین گردد. در مرجع [۴] این رابطه با انتگرال‌گیری از معادله پیوستگی استخراج گردیده و به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\psi_s \eta = n_b^2 \left[u_s \int_0^{\eta_n} \rho u (\eta_n - 1) d\eta_n \right] + n_b \left[r_s \int_0^{\eta_n} \rho u d\eta_n \right] \quad (۸)$$

جهت مشخص نمودن η برای هر η_n در فاصله بین شوک و بدنه می‌باید معادله انتگرالی بالا حل گردد. متأسفانه حل این معادله به تعداد دفعات زیاد به زمان کامپیوتری قابل توجهی نیاز دارد. برای رفع این مشکل و تسریع در حل، در این تحقیق پیشنهاد نموده‌ایم تا برای تعیین رابطه بین η و η_n از یک چند جمله‌ای مرتبه سوم استفاده گردد. برای تعیین ضرایب این چند جمله‌ای نیاز به چهار شرط مرزی می‌باشد. دو شرط مرزی زیر با توجه به تعریف η و η_n بدست می‌آید:

$$\eta = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \eta_n = 1$$

$$\eta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \eta_n = 0$$

برای تعیین دو شرط مرزی دیگر از رابطه $\frac{\partial \eta}{\partial \eta_n}$ استفاده شده است. رابطه مورد نظر از تعریف تابع جریان که عبارت است از $\frac{\partial \psi}{\partial n} = -\rho u h_3$ و رابطه (۷) بدست می‌آید:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \eta_n} = \frac{\rho u h_3}{\psi_s} n_b \quad (۹)$$

با استفاده از این رابطه می‌توان دو شرط مرزی دیگر را بر روی شوک و بدنه به صورت زیر بدست آورد:

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial \eta_n} \right)_b = 0 \quad (۱۰)$$

اکنون با استفاده از چهار شرط مرزی بالا ثابت‌های چند جمله‌ای مرتبه سوم بدست آمده و پس از جایگزینی، تابع تغییرات η بر حسب η_n به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\eta = \frac{\rho_s u_s h_{3s}}{\psi_s} n_b (\eta_n^3 - \eta_n^2) - 2\eta_n^3 + 3\eta_n^2 \quad (۱۱)$$

رابطه صریح ارائه شده در بالا تاثیر قابل توجهی در زمان حل عددی معادلات خواهد داشت. زیرا در صورت معلوم بودن شکل شوک، ضرایب این رابطه شامل $n_b, h_{3s}, \psi_s, \rho_s, u_s$ همگی مشخص می‌باشند. در صورتی که برای حل معادله انتگرالی

(۸) ابتدا می باید مقادیر u, ρ را در لایه شوک تعیین می کردیم. این درحالی است که هنوز معادلات حاکم حل نشده اند و مقادیر u, ρ نامشخص می باشند. در مرجع [۴] جهت حل معادله (۸) متغیرهای u, ρ با استفاده از مقادیر خود در تکرار قبل جایگزین می گردند.

مدل توربولانس

برای تعیین ε^+ در معادلات ممنتوم وانرژی (روابط ۲ و ۳) باید از یک مدل توربولانس مناسب استفاده کرد. در این مقاله مدل سبسی - اسمیت^۹ [۹] به کار گرفته شده است. این مدل یک مدل توربولانس دو لایه ای است که در آن از روابط جداگانه ای برای لایه داخلی و لایه خارجی جریان استفاده می شود. مقدار لایه داخلی این مدل، ε_i^+ ، بر اساس مفهوم طول اختلاط پرانتل [۱۰] می باشد.

$$\varepsilon_i^+ = \frac{\rho \ell^2}{\varepsilon^2 \mu n_b} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta_n} - \frac{u}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial \eta_n} \right| \quad (12)$$

که در آن طول اختلاط از رابطه زیر بدست می آید

$$\ell = K_v n_b \eta_n \left[1 - \exp\left(\frac{-n^+}{A^+}\right) \right] \quad (13)$$

K_v ثابت ون کارامن بوده و مقدار آن ۰/۴ در نظر گرفته می شود. برای تعیین ضریب میرایی، A^+ ، از پیشنهاد مرجع [۱۱] استفاده شده است.

$$A^+ = 26 \left(\left| \frac{\tau}{\tau_w} \right| \right)^{-1/2} \quad (14)$$

که در آن تنش برشی برابر است با

$$\tau = \mu(1 + \varepsilon^+) \left| \frac{\partial u}{\partial \eta_n} - \frac{u}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial \eta_n} \right| \quad (15)$$

و پارامتر مختصات قائم، n^+ ، به صورت زیر است

$$n^+ = \frac{n_b \eta_n \rho}{\varepsilon \mu} \left[\frac{\mu_w}{\rho n_b} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta_n} \right| \right]^{1/2} \quad (16)$$

در روابط بالا زیر نویس w بیان گر آن است که آن کمیت بر روی دیواره محاسبه می شود. مقدار لایه خارجی این مدل، ε_n^+ ، از رابطه کلارز- کلبانوف^{۱۰} [۱۲ و ۱۳] تعیین می گردد:

$$\varepsilon_o^+ = 0.0168 \frac{\rho u_e \delta_k \gamma_{ij}}{\varepsilon^2 \mu} \quad (17)$$

که در آن ضخامت جابجایی برابر است با

$$\delta_k = n_b \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) d\eta_n \quad (18)$$

در رابطه بالا δ مقدار η_n در لبه لایه مرزی می‌باشد و ضریب تناوبی کلبانوف^[۱۴] از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\gamma_{ij} = \left[1 + 5.5 \left(\frac{\eta_n}{\delta}\right)^6\right]^{-1} \quad (19)$$

مقدار لایه داخلی این مدل، ε_i^+ ، تا زمانی مورد استفاده قرار خواهد گرفت که $\varepsilon_i > \varepsilon_o$ شود. همچنین برای مدل گذر جریان آرام به جریان مغشوش از ضریب تناوبی گذرای در جهت جریان^[۱۵] استفاده می‌شود.

$$\gamma_{i,\xi} = 1 - \exp(-0.412 \bar{\xi}^2) \quad (20)$$

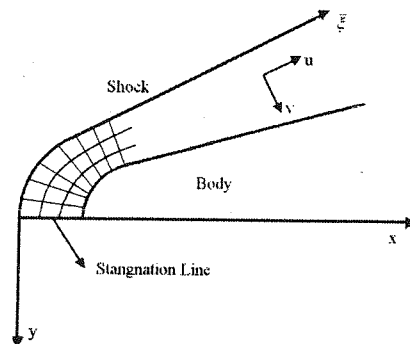
که در آن

$$\bar{\xi} = 2.96 \frac{(\xi - \xi_0)}{[\xi_0 (\bar{X} - 1)]} \quad (21)$$

در روابط بالا ξ_0 مختصات نقطه‌ای است که در آنجا گذر جریان آرام به مغشوش اتفاق می‌افتد. مقدار \bar{X} بستگی به شرایط جریان آزاد و شکل هندسی بدنه دارد و به صورت تجربی تعیین می‌گردد [۱۶]. در این تحقیق مقدار $\bar{X} = 2$ در نظر گرفته شده است.

در ناحیه گذر، مقدار ε^+ به طریق زیر اصلاح می‌شود.

$$\varepsilon^+ = \varepsilon^+ \gamma_{i,\xi} \quad (22)$$



شکل (۲) شکل شماتیک شبکه محاسباتی بین شوک و بدنه.

همچنین برای تعیین لبه لایه مرزی از پیشنهاد مرجع [۱۷] استفاده شده است. بدین صورت که لبه لایه مرزی در نقطه‌ای قرار دارد که در آنجا

$$\frac{d}{d\eta_n} \left(\frac{H}{H_\infty} \right) \leq 0.5 \quad (23)$$

$$H = h + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \quad \text{که در آن } H \text{ آنتالپی کل می‌باشد}$$

شرایط مرزی

میدان حل دارای دو مرز شوک و بدنه، و یک مرز در ناحیه سکون می‌باشد (شکل ۲). بر روی بدنه شرط عدم لغزش $u_w = v_w = 0$ اعمال شده و دمای بدنه نیز مشخص می‌باشد. بر روی شوک نیز می‌توان با مشخص بودن شکل آن خواص جریان در پشت شوک را با استفاده از روابط رانکین - هوگونیوت^{۱۳} [۴] محاسبه کرد. شروع محاسبات از روی مرز در ناحیه سکون می‌باشد که در ادامه به آن اشاره می‌شود.

حل در نقطه سکون

معادلات استاندارد لایه شوک لزج در نقطه سکون نامعین می‌باشند. بنابراین لازم است تا ابتدا فرم حدی این معادلات برای شرط $\xi \rightarrow 0$ بدست آیند و سپس با حل این معادلات در امتداد خط عمود بر نقطه سکون تا شوک، مشخصات جریان تعیین گردد (شکل ۲). طریقه بدست آوردن معادلات حدی لایه شوک لزج طولانی بوده و ارائه آن پیوستگی متن را مختل می‌کند. لذا از ذکر آن پرهیز گردیده و سه مرجع ۱۸ الی ۲۰ را جهت استفاده خوانندگان معرفی می‌کنیم.

روش حل

معادلات ممنتموم، انرژی، و پیوستگی را می‌توان به فرم کلی زیر نوشت:

$$A_0 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta_n^2} + A_1 \frac{\partial W}{\partial \eta_n} + A_2 W + A_3 + A_4 \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0$$

که در آن W می‌تواند h, u و یا v باشد و ضرایب A_0 تا A_4 با توجه به معادلات حاکم مشخص می‌شوند. برای حل این معادلات از تقریب اختلاف مرکزی برای انفصال مشتقات نسبت به η_n و از اختلاف پسر و برای انفصال مشتقات نسبت به ξ استفاده می‌شود. برای حل ضمنی این معادلات نیز از الگوریتم توماس^{۱۴} استفاده شده است. توجه کنید که برای انفصال معادله پیوستگی از اختلاف پسر و برای تمامی مشتقات استفاده می‌شود. میدان حل شامل دو مرز جانبی شوک و بدنه بوده و دارای یک مرز در ابتدای میدان که منطبق بر خط عمود بر بدنه از نقطه سکون تا شوک است، می‌باشد (شکل ۲). کلیه مشخصات جریان بر روی مرز ابتدایی میدان معلوم است. این مشخصات از حل معادلات حدی لایه شوک لزج بدست آمده‌اند. اکنون شکل شوک در ناحیه زیر صوت را به صورت یک منحنی مرتبه دو حدس می‌زنیم. یک قدم در جهت ξ پیش رفته و با استفاده از رابطه مزین و رابطه (۱۱) مقدار فشار را در امتداد خط ξ ثابت از شوک تا بدنه بدست می‌آوریم. باید توجه داشت که با مشخص بودن هندسه شوک کلیه مشخصات جریان در پشت شوک معلوم می‌باشد. اکنون می‌توان معادلات انرژی، ممنتموم و بقای جرم را بر روی این خط ξ ثابت حل نموده تا به ترتیب مقادیر انتالپی h ، مولفه سرعت u ، و مولفه سرعت v بدست آیند. دانسیته ρ با استفاده از رابطه گاز کامل بدست می‌آید. با پیشروی در جهت ξ تا انتهای ناحیه زیر صوت این محاسبات برای

خطوط ξ ثابت دیگر انجام می‌گیرد. برای آنکه مشخص گردد هندسه شوک حدس زده شده صحیح است فاصله شوک تا بدنه را برای تمام ξ ها با استفاده از معادله (۸) محاسبه می‌کنیم. این فاصله ها لزوماً با فاصله شوک حدس زده شده تا بدنه یکی نمی‌باشد. لذا لازم است تا شکل شوک اصلاح شود. این کار بر اساس روش رایلی و دوجارنت^{۱۵} [۲۱] انجام می‌پذیرد. اصلاح شوک تا زمانی که به دقت مناسب دست یابیم ادامه خواهد یافت.

در ناحیه بالای صوت نیازی به حدس شکل شوک در کل میدان نمی‌باشد. با پیشروی در جهت ξ در هر قدم شیب شوک حدس زده می‌شود و سپس معادلات حاکم به همان طریقی که در ناحیه زیر صوت گفته شد حل شده و مشخصات جریان بدست می‌آید. با استفاده از این پاسخ، فاصله شوک تا بدنه محاسبه می‌شود و در صورتی که شیب حدس زده شده برای شوک درست نباشد، در همین مرحله شیب شوک اصلاح شده و حل تکرار می‌گردد. این روند تا زمانی تکرار می‌گردد که پاسخ بدست آمده برای این خط ξ ثابت همگرا گردد. با همگرا شدن حل می‌توان یک قدم دیگر در جهت ξ پیش رفت. این پیشروی و محاسبه شکل شوک تا انتهای میدان مورد نظر ادامه می‌یابد.

جزئیات بیشتر در این خصوص را می‌توان در مرجع [۲۱] یافت. چنانکه ملاحظه شد بر خلاف روشهای استاندارد حل معادلات لایه شوک لزج دیگر نیازی به حدس شکل شوک برای کل میدان نمی‌باشد و لازم نیست تا برای اصلاح شکل شوک، کل میدان جریان بارها از ابتدا تا انتها حل گردد.

نتایج

در این قسمت به مقایسه نتایج بدست آمده از روش حاضر با نتایج تجربی و نتایج عددی دیگر خواهیم پرداخت. توجه کنید که نتایج به شکل بی بعد نمایش داده شده‌اند. در این تحقیق از روابط گاز ایده آل استفاده شده است. چنین فرضی ضروری نیست و می‌توان در روش حاضر فرض گاز غیر ایده آل را نیز اعمال کرد. تعداد نقاط شبکه محاسباتی بین شوک و بدنه برای جریان آرام $z_s = 51$ و برای جریان مغشوش $z_s = 101$ عدد در نظر گرفته شده است. همچنین در نزدیکی سطح بدنه، شبکه محاسباتی فشرده شده است. نتایج نسبت به محور بدنه (x, r) رسم شده‌اند (محور این سیستم مختصات در امتداد محور شوک می‌باشد و مبداء آن نوک جسم است).

در نمونه اول جریان هوا حول یک مخروط با نوک کروی و زاویه نیم راس ۱۵ درجه حل شده است. شعاع نوک کروی ۰/۰۲۸ متر می‌باشد و خواص جریان آزاد عبارتند از $M_\infty = 10.6$ ، $\rho_\infty = 0.00975 \text{ Kg/m}^3$ ، $T_\infty = 47.2^\circ \text{K}$ و درجه حرارت دیواره برابر 300°K در نظر گرفته شده است. چنانکه در شکل ۳ مشاهده می‌گردد شارحرارتی محاسبه شده از روش حاضر تطابق خوبی با نتایج آزمایشگاهی مرجع [۲۲] دارد. در شکل ۴ توزیع فشار روی سطح نمایش داده شده و با نتایج حل عددی معادلات لایه شوک لزج بدون تقریب مرجع [۱۱] مقایسه شده است. در اینجا نیز مشاهده می‌گردد که تطابق جوابها بسیار خوب است.

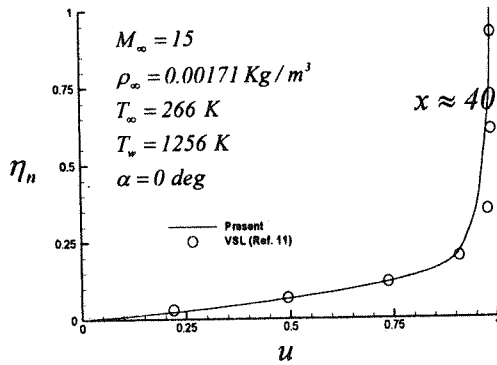
در نمونه دوم جریان هوا در اطراف یک مخروط با نوک کروی و زاویه نیم راس ۵ درجه حل شده است. شعاع نوک کروی ۰/۰۳۸۱ متر و دمای سطح آن برابر $T_w = 1256^\circ \text{K}$ می‌باشد. خواص جریان آزاد عبارتند از: $M_\infty = 15$ و $T_\infty = 266^\circ \text{K}$ ، $\rho_\infty = 0.00171 \text{ Kg/m}^3$ درشکلهای ۵ و ۶ سرعت و فشار در لایه شوک نمایش داده شده‌اند. همانطور که مشاهده می‌شود نتایج بدست آمده از روش حاضر با نتایج حل عددی مرجع [۱۱] تطابق خوبی دارند.

در شکل ۷ شار حرارتی بدست آمده از حل بدون تقریب معادلات لایه شوک لزج (VSL) [۱۱] و حل تقریبی معادلات لایه شوک لزج (AVSL) [۱۸] با نتایج بدست آمده از روش حاضر مقایسه شده است. نتایج بدست آمده مربوط به نمونه اول می‌باشد. در اینجا نیز مشاهده می‌گردد که نتایج روش حاضر با دقت بسیار خوبی با دیگر نتایج ارائه شده تطابق دارد.

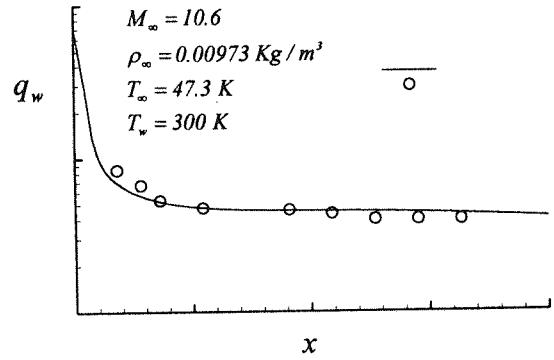
در نمونه سوم جریان مغشوش هوا در اطراف یک مخروط با نوک کروی به شعاع ۰/۲۲۸۶ متر و زاویه نیم راس ۵ درجه حل شده است. دمای سطح برابر $T_w = 1256^\circ \text{K}$ می‌باشد. خواص جریان آزاد عبارتند از $M_\infty = 15$ و $T_\infty = 266^\circ \text{K}$ ، $\rho_\infty = 0.00171 \text{ Kg/m}^3$. نقطه گذر جریان آرام به جریان مغشوش در $x = 72$ در نظر گرفته شده است. در شکل ۸ شار حرارتی بدست آمده از روش حاضر با نتایج حل بدون تقریب مرجع [۱۱] و حل تقریبی

مرجع [۱۸] مقایسه شده است.

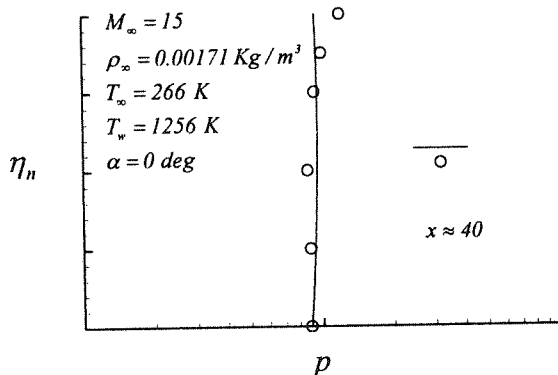
نکته جالب در این شکل آن است که نتایج بدست آمده از روش حاضر از دقت بهتری نسبت به نتایج حل تقریبی مرجع [۱۸] برخوردار است. احتمالاً دلیل این تفاوت، در نحوه پیاده‌سازی الگوریتم حل نهفته است. همانطوری که در شکل‌ها مشهود است، نتایج حاصل از حل تقریبی معادلات لایه شوک لزج تنها اندکی با نتایج آزمایشگاهی و نتایج حاصل از حل بدون تقریب معادلات لایه شوک لزج تفاوت دارند. تنها در شکل ۶ خطا قابل ملاحظه است (در حدود ۱۵ درصد). این خطا از آنجا ناشی می‌شود که در روش حاضر از رابطه تقریبی فشار مزین استفاده شده است و فشار حاصل از این رابطه اندکی خطا دارد.



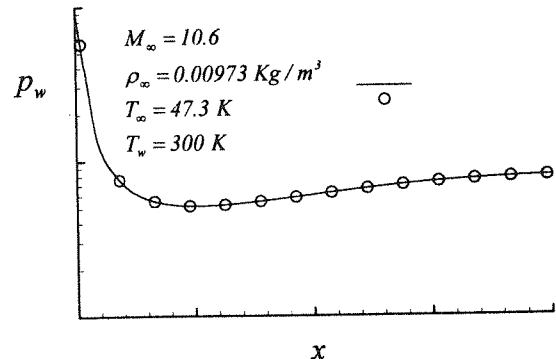
شکل (۵) مقایسه پروفیل سرعت مماسی برای یک مخروط ۵ درجه با نوک کروی به شعاع $R_{nose} = 0.0381 m$



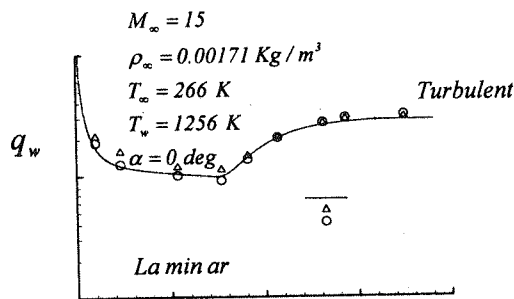
شکل (۳) مقایسه نرخ انتقال حرارت به بدنه یک مخروط ۱۵ درجه با نوک کروی به شعاع $R_{nose} = 0.028 m$



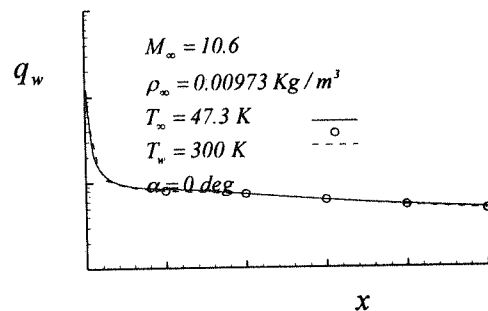
شکل (۶) مقایسه پروفیل فشار برای یک مخروط ۵ درجه با نوک کروی به شعاع $R_{nose} = 0.0381 m$



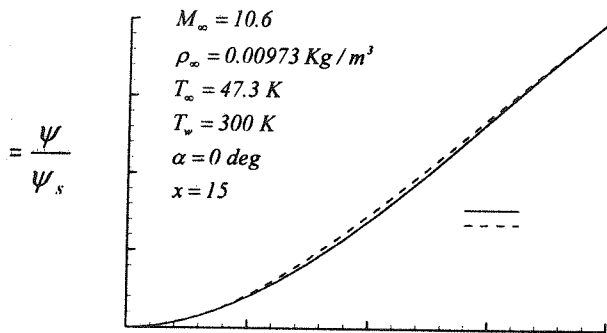
شکل (۴) مقایسه توزیع فشار بر روی بدنه یک مخروط ۱۵ درجه با نوک کروی به شعاع $R_{nose} = 0.028 m$



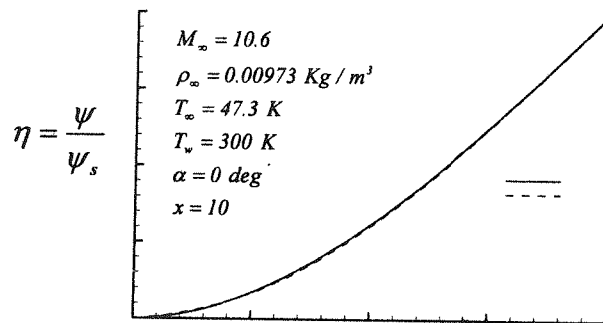
شکل (۸) مقایسه نرخ انتقال حرارت به بدنه برای یک مخروط ۵ درجه با نوک کروی به شعاع $R_{nose} = 0.2286 m$



شکل (۷) مقایسه نرخ انتقال حرارت به بدنه برای یک مخروط ۱۵ درجه با نوک کروی به شعاع $R_{nose} = 0.009525 m$



شکل (۱۰) مقایسه رابطه بین η و η_n برای یک مخروط ۱۵ درجه $R_{nose} = 0.0279 \text{ m}$.



شکل (۹) مقایسه رابطه بین η و η_n برای یک مخروط ۱۵ درجه $R_{nose} = 0.0279 \text{ m}$.

خوشبختانه این فشار در نزدیکی سطح بدنه ($\eta_n = 0$) دارای دقت کافی بوده و تاثیری قابل توجهی بر روی معادلات ممنتوم و انرژی جریان لزوج که در لایه مرزی دارای اهمیت می‌باشند ندارد.

در شکل های ۹ و ۱۰ نتایج بدست آمده از معادله صریح پیشنهادی (رابطه ۱۱) برای تعیین رابطه بین مختصات محاسباتی و مختصات تابع جریان، در دو موقعیت متفاوت ($x = 15$ و $x = 10$)، با نتایج دقیق بدست آمده از حل انتگرالی معادله پیوستگی (رابطه ۸) مقایسه شده است. همانطوری که مشاهده می‌شود رابطه صریح ارائه شده دارای دقت قابل قبولی می‌باشد (شرایط جریان آزاد در این مثال مانند نمونه اول می‌باشد).

هدف از این تحقیق آن است تا روشی توسعه یابد که مناسب طراحی اولیه اجسام ماوراء صوت باشد. بنابراین زمان اجرای کامپیوتری حائز اهمیت می‌باشد. در مرجع [۱۹] روشهای مختلف حل عددی معادلات لایه شوک لزوج (از نظر زمان حل) با یکدیگر مقایسه شده‌اند. بطور کلی روش تقریبی مرجع [۴] سه برابر سریع‌تر از روش های حل استاندارد معادلات لایه شوک لزوج می‌باشد.

تصحیحی که در این تحقیق صورت گرفته (رابطه ۱۱) موجب افزایش سرعت روش حل عددی مرجع [۴] می‌شود. به عنوان مثال در صورتیکه بخواهیم با استفاده از روش تقریبی مرجع [۴]، معادلات لایه شوک لزوج را بر روی یک مخروط کروی ۵ درجه که دارای نوکی با شعاع ۹ اینچ می‌باشد، در ماخ ۱۵ و تا طول بی بعد ۲۰۰ حل کنیم، به ۳۱۵۴ ثانیه با پردازنده Pentium III-550 وقت نیاز داریم. با تصحیحی که در این تحقیق صورت گرفته این زمان به ۲۱۴۴ ثانیه کاهش یافته است (یعنی در حدود ۳۰ درصد). در مرحله طراحی اولیه اجسام ماوراء صوت چنین کاهش در زمان حل بسیار مؤثر است. به یاد داشته باشیم که در مرحله طراحی می‌باید بازه وسیعی از شکل‌های هندسی و پارامترهای جریان مورد مطالعه قرار گیرند و در طول مسیر پرواز نیز باید دمای پوسته را در هر لحظه محاسبه نمود.

نتیجه گیری

یک روش تقریبی حل عددی معادلات متقارن محوری لایه شوک لزوج (VSL) برای جریان‌های ماوراء صوت توسعه یافته است که قادر به تعیین میدان جریان آرام و یا مغشوش می‌باشد. در این تحقیق از روابط گاز ایده آل استفاده می‌شود ولی چنین فرضی نیز ضروری نیست و می‌توان روش حاضر را برای در نظر گرفتن مدل های گاز تعادلی^{۱۶} و یا گاز غیر تعادلی^{۱۷} اصلاح نمود.

در این روش به جای حل عددی معادله ممنتوم قائم بر شوک از رابطه فشار مزین استفاده شده است. به این ترتیب یک فرم تقریبی از معادلات متقارن محوری لایه شوک لزوج بدست آمده است که حل عددی آنها بسیار ساده و سریع می‌باشد. چون در این روش فشار در لایه شوک توسط رابطه صریح مزین مشخص می‌شود، بنابراین نیازی نیست روش‌های استاندارد حل این معادلات، معادله ممنتوم قائم بر شوک و معادله پیوستگی را به صورت کوپل حل نمود.

به طور کلی برای حل معادلات لایه شوک لزج، شکل شوک مورد نیاز است. در روش‌های استاندارد حل این معادلات، شکل شوک تماماً حدس زده می‌شود و لازم است تا برای اصلاح شکل شوک، میدان جریان را بارها از ابتدا تا به انتهای جسم محاسبه نمود. اما در روش حاضر نیازی به یک حدس اولیه برای تعیین شکل شوک تمام میدان حل نیست و در آن شکل شوک توسط یک روش معکوس تعیین می‌گردد.

از آنجا که در روش حاضر معادلات حاکم در سیستم مختصات محاسباتی (ξ, η_n) نوشته و حل می‌شوند و رابطه صریح مزمن، فشار را در سیستم مختصات تابع جریان (ξ, η) مشخص می‌کند، بنابراین لازم است تا رابطه بین این دو سیستم مختصات مشخص گردد. در مرجع [۴] رابطه بین دو متغیر η و η_n توسط یک رابطه انتگرالی که از معادله پیوستگی استخراج شده است تعیین می‌گردد. حل این معادله انتگرالی در لایه شوک موجب صرف زمان کامپیوتری قابل توجهی خواهد شد. در این تحقیق برای تسریع حل از یک چند جمله‌ای مرتبه سوم استفاده شده است. این چند جمله‌ای توسط چهار شرط مرزی دقیق که بر روی شوک و بدنه تعریف می‌شوند بدست می‌آید.

در این تحقیق برای مدل کردن جریان مغشوش از مدل توربولانس دولایه ای سبسی - اسمیت استفاده شده است. نتایج برای دو مخروط نوک پخ ۵ و ۱۵ درجه و در دو ماخ جریان ۱۰ و ۱۵ ارائه شده‌اند. نتایج بدست آمده از روش حاضر تطابق بسیار خوبی با نتایج عددی دیگران و نتایج آزمایشگاهی دارد. مقایسه زمان اجرای کامپیوتری روش حاضر با روش مرجع [۴] نشان می‌دهد که رابطه صریح ارائه شده در این تحقیق برای تعیین رابطه بین مختصات محاسباتی (η_n) و مختصات تابع جریان (η) موجب کاهش ۳۰ درصدی زمان حل شده است. با توجه به این افزایش سرعت حل عددی و دقت روش حاضر، این روش برای طراحی اولیه اجسام ماوراء صوت بسیار مناسب می‌باشد.

قدردانی

این تحقیق با پشتیبانی سازمان صنایع هوا فضا انجام گرفته است. نویسندگان این مقاله از مسئولان صنعت شهید موحّد قدردانی می‌نمایند.

زیر نویس‌ها

- | | |
|------------------------|--|
| 1- Viscous Shock Layer | 10- Clauser- Klebanoff |
| 2- Thin Layer | 11- Klebanoff's Intermittency Factor |
| 3- Bow Shock | 12- Streamwise Transition Intermittency Factor |
| 4- Maslen | 13- Rankine-Hugoniot |
| 5- Stream Function | 14- Thomas |
| 6- Davis | 15- Riley and DeJarnette |
| 7- Blunt Bodies | 16- Equilibrium |
| 8- Axisymmetric | 17- Nonequilibrium |
| 9- Cebeci-Smith | |

مراجع

- [1] Gnoffo, P. A., "An Upwind-Biased Point-Implicit Relaxation Algorithm for Viscous, Compressible Perfect - Gas Flows," NASA TP 2953, June 1990.
- [2] Lawrence, S. L., Chaussee, D. S., and Tannehill, J. C., "Application of an Upwind Algorithm to the Three-Dimensional Parabolized Navier-Stokes Equations," AIAA Paper 87-1112, June 1978.
- [3] Davis, R. T., "Numerical Solution of the Hypersonic Viscous Shock Layer Equations," AIAA Journal, Vol. 8, No. 5, 1970, pp. 843-851.
- [4] Cheatwood, F. M., and DeJarnette, F. R., "Approximate Viscous Shock Layer Technique for Calculating Hypersonic Flows About Blunt-Nosed Bodies," Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 31, No. 4, 1994, pp. 621-628.
- [5] Maslen, S. H., "Asymmetric Hypersonic Flow," NASA CR-2133, 1971.
- [6] Maslen, S. H., "Inviscid Hypersonic Flow Past Smooth Symmetric Bodies," AIAA Journal, Vol. 2, July 1964, pp. 1055-1061

- [7] Bhutta, B. A., and Lewis, C. H., "Improved Nonequilibrium Viscous Shock-Layer Scheme for Hypersonic Blunt-Body Flowfields," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 29, No. 1, 1992, pp. 24-34.
- [8] Grantz, A. C., and DeJarnette, F. R., "Approximate Viscous Shock-Layer Method for Hypersonic Flows over Blunt-Nosed Bodies," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 27, No. 6, 1990, pp. 597-605.
- [9] Cebeci, T., and Smith, A. M. O., "A Finite-Difference Method for Calculating Compressible Laminar and Turbulent Boundary Layers," *Journal of Basic Engineering*, September 1970, pp. 523-535
- [10] Van Driest, E. R., "On Turbulent Flow Near a Wall," *Journal of Aeronautical Sciences*, Vol. 23, No. 11, 1956, pp. 1007-1011
- [11] Gupta, R. N., Lee, K. P., Zoby, E. V., Moss, J. N., and Thompson, R. A., "Hypersonic Viscous Shock-Layer Solutions over Long Slender Bodies – Part 1: High Reynolds Number Flows," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 27, No. 2, 1990, pp. 175-184.
- [12] Clauser, F. H. "The Turbulent Boundary Layer," *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 17, Academic Press, New York, 1956, pp. 1-15
- [13] Klebanoff, P. S., "Characteristics of Turbulence in a Boundary Layer with Zero Pressure Gradient," NACA Report 1247, 1955.
- [14] Klebanoff, P. S., "Characteristics of Turbulence in a Boundary Layer with Zero Pressure Gradient," NACA TN 3178, July 1954.
- [15] Dhawan, S., and Narasima, R., "Some Properties of Boundary Layer Flow during Transition from Laminar to Turbulent Motion," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 27, Part. 4, January 1958, pp. 418-436
- [16] Harris, J. E., "Numerical Solutions of the Equations for Compressible Laminar, Transitional, and Turbulent Boundary Layers and Comparisons with Experimental Data," NASA TR 368, 1971.
- [17] Thompson, A., Zoby, E. V., Wurster, K. E., and Gnoffo, P. A., "An Aerothermodynamic Study of Slender Conical Vehicles," AIAA Paper 87-1475, June 1987.
- [18] Cheatwood, F. M., and DeJarnette, F. R., "An Approximate Viscous Shock-Layer Approach to Calculating Hypersonic Flows about Blunt-Nosed Bodies," AIAA Paper 91-1348, June 1991.
- [19] Cheatwood, F. M., and DeJarnette, F. R., "An Approximate Viscous Shock-Layer Technique For Calculating Chemically Reacting Hypersonic Flows about Blunt-Nosed Bodies," NASA CR 187617, Aug 1991.
- [20] Cheatwood, F. M., and DeJarnette, F. R., "An Approximate Viscous Shock-Layer Technique For Calculating Nonequilibrium Hypersonic Flows about Blunt-Nosed Bodies," AIAA Paper 92-0498, Jan 1992.
- [21] Riley, C. J., and DeJarnette, F. R., "Engineering Calculations of Three-Dimensional Inviscid Hypersonic Flow Fields," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 28, Nov-Dec 1991, pp. 628-635.
- [22] Cleary, J. W., "Effects of Angle of Attack and Bluntness on Laminar Heating Rate Distribution on a 15 Degree Cone at a Mach Number of 10.6," NASA TN5450, October 1969.